Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 532.516

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Ю. Б. Пономаренко

(Москва)

Получены точные условия устойчивости периодических движений. Показано, что найденные в [1] условия являются необходимыми и достаточными, но применимым только к движениям, не зависящим от времени; условия [2] применимы в общем случае, но являются только достаточными (необходимыми) условиями неустойчивости (устойчивости). Рассмотрена зависимость стационарных движений от параметров.

В гидродинамике часто рассматриваются системы, длина которых l много больше поперечных размеров (например, в задаче о движении жидкости между вращающимися цилиндрами длина цилиндров считается большой по сравнению с зазором между цилиндрами; при исследовании положительного столба газового разряда длина столба считается большой по сравнению с радиусом разрядной трубки). При рассмотрении таких систем пренебрегают концевыми эффектами, считая $l = \infty$; состояние этих систем определяется параметрами бесконечной задачи.

Одно из возможных состояний — равновесное; оно не зависит от времени t и продольной координаты x $(-l < 2x < l)$. Бесконечно-малые возмущения равновесия зависят от t, x в виде $Q_1(t, k) \exp(ikx)$; амплитуды возмущений Q пропорциональны $\exp pt$, где $p(k)$ — собственные числа проблемы устойчивости. При потере равновесием устойчивости $\gamma(k) = \operatorname{Re} p > 0$ в некотором интервале волновых чисел k; амплитуды соответствующих возмущений экспоненциально нарастают.

В случае большой, но конечной длины l принимается [1, 2], что k принимает дискретный ряд значений, отличающихся на $\delta \sim 1 / l$; в результате число нарастающих возмущений оказывается конечным, но произвольно большим.

Нелинейные эффекты взаимодействия большого числа нарастающих возмущений часто приводят к «выживанию» только одного возмущения и подавлению возмущений с другими волновыми числами; в результате возникает стационарное пространственно-периодическое движение (например, вихри между вращающимися цилиндрами, волны ионизации в положительном столбе разряда). При теоретическом рассмотрении такого движения его волновое число k остается неопределенным [1–4]; оно может иметь любое значение, для которого $\gamma(k) > 0$.

Возможный способ устранения этой неопределенности — исследование устойчивости стационарного движения. Найденные в [1, 2] условия устойчивости не согласуются. Ниже показано, что эти условия — приближенные; найдены точные условия устойчивости.

Амплитуда $Q(k)$ неустановившегося движения удовлетворяет уравнению [2], описывающему взаимодействие возмущений с различными k

$$dQ / dt = pQ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum \Gamma_m Q_1 \ldots Q_{m+1} \bar{Q}_{m+2} \ldots \bar{Q}_{1+2m} \tag{1}$$

Здесь $p = \gamma + i\Omega$, $Q_i = Q(k_i)$ и вторая сумма берется по числам, удовлетворяющим условию

$$k_1 + \ldots + k_{m+1} - k_{m+2} - \ldots - k_{1+2m} = k, \quad k_i \approx k_0 \tag{2}$$

Функции $\Gamma_m(k_1, \ldots, k_{1+2m})$ симметричны по первым $(m+1)$ и последним m аргументам. Инкремент $\gamma(k) > 0$ в области с полушириной $\Delta = (-2\gamma_0 / \gamma_0'')^{1/2}$, где $\gamma_0 = \gamma(k_0)$ — максимальное значение γ. Параметр $\mu = \Delta / k_0 \ll 1$; приближенное равенство (2) означает, что $k_i' = (k_i - k_0) / \Delta \sim 1$.

В дальнейшем используются только безразмерные числа k', поэтому штрих опускается (например, $\gamma / \gamma_0 \approx 1 - k^2$).

Стационарное периодическое движение (в котором только $Q(k) \neq 0$) описывается соотношениями

$$(3) \qquad Q = \sqrt{q}e^{i\theta}, \quad \theta = \theta_0 + \omega t, \quad \omega = \Omega + \sum_{m=1}^{\infty} \Omega_m q^m$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m q^m = \gamma \geqslant 0, \quad \gamma_m + i\Omega_m = p_m(k) = \Gamma_m(k, k, \ldots, k)$$

В дальнейшем считается $\gamma_1 < 0$, так что $q \approx -\gamma / \gamma_1$.

Для бесконечно-малых возмущений Q° из (1)—(3) получается

$$(4) \qquad dQ_+^\circ / dt = Q_+^\circ A_+^\circ + \bar{Q}_-^\circ B_+ e^{2i\theta}, \qquad \overset{\circ}{Q}_\pm = Q^\circ(k \pm \xi)$$

$$\overset{\circ}{A}_\pm = p(k \pm \xi) + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) q^m \Gamma_m (k \pm \xi, k, k, \ldots, k)$$

$$B_\pm = \sum_{m=1}^{\infty} m q^m \Gamma_m \quad (k, k, \ldots, k, \ k \mp \xi)$$

Второе уравнение получается из (4) заменой ξ на $-\xi$. Эти уравнения получены в [1] в приближении

$$(5) \qquad \overset{\circ}{A}_\pm = p(k \pm \xi) + 2qp_1, \qquad B_\pm = qp_1$$

Подстановка

$$(6) \qquad \overset{\circ}{Q}_\pm = R_\pm e^{i\theta}, \qquad A_\pm = \overset{\circ}{A}_\pm - i\omega$$

приводит (4) к виду

$$(7) \qquad dR_+ / dt = R_+ A_+ + \bar{R}_- B_+, \quad d\bar{R}_- / dt = \bar{R}_- \bar{A}_- + R_+ \bar{B}_-$$

Здесь второе уравнение получается из первого заменой ξ на $-\xi$ и комплексным сопряжением. Решения этих уравнений пропорциональны $\exp \sigma t$, где

$$(8) \qquad \sigma = \alpha_+ \pm (\alpha_-^2 + \beta)^{1/2}, \ \alpha_\pm = {}^1/_2 (A_+ \pm \bar{A}_-), \ \beta = B_+ \bar{B}_-$$

Сопряженным уравнениям (7) соответствуют сопряженные значения σ. Решение (3) устойчиво, если $\operatorname{Re} \sigma < 0$ при любых ξ, и неустойчиво, если $\operatorname{Re} \sigma > 0$ при некоторых ξ. Полагая

$$(9) \qquad U_\pm = \operatorname{Re} A_\pm, \ x = -{}^1/_2 (U_+ + U_-), \quad \chi = |\operatorname{Re} (\alpha_-^2 + \beta)^{1/2}|$$

$$\alpha_- = u + iv, \ \beta = r + is, \ y = U_+ U_-, \ \varepsilon = s(uv + {}^1/_4 s)$$

и учитывая что

$$2\chi^2 = \varphi + (\varphi^2 + \psi^2)^{1/2}, \ \ \varphi = u^2 - v^2 + r, \ \ \psi = s + 2uv$$

можно найти, что условие устойчивости $x > \chi$ выполняется, если

(10) $$x > 0,\ f = x^2 (x^2 - \varphi) - {}^1/_4\psi^2 = y (x^2 + v^2) - x^2 r - \varepsilon > 0$$

При $\xi = 0$ будет $f = 0$; непосредственно из (8) следует, что соответствующее число $\sigma = 0$, а другое число отрицательное. С помощью (7) нетрудно установить, что при $t \to \infty$ возмущение с $\xi = 0$ не исчезает полностью, но вызывает лишь изменение фазы θ_0 стационарного решения (3). Это означает, что стационарное решение устойчиво относительно возмущений с $\xi = 0$.

Случай $\xi \neq 0$ рассмотрен ниже в приближении (5), когда $s = \varepsilon = 0$. Точность приближения дается оценкой $(s / \xi) / r \sim \varepsilon / f \sim \mu$ (она следует из того, что величины Γ_m, β разлагаются в ряды по $\mu\xi$ с коэффициентами одного порядка и что r — четная, а s — нечетная функция ξ). С точностью до величин $\sim\mu$ из (5), (6), (8), (9) получается

(11) $$\gamma = 1 - k^2, \quad x = \gamma + \xi^2, \quad U_{\neq} = -x \mp 2k\xi$$
$$y = x^2 - 4k^2\xi^2, \quad r = \gamma^2 (1 + \eta^2), \quad v = \rho\xi^2 - \gamma\eta$$
$$(\eta = \Omega_1 / \gamma_1, \quad \rho = -\Omega_0'' / \gamma_0'', \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$$

Здесь y, r записаны с точностью до множителя γ_0^2, остальные величины — с точностью до γ_0 (в неравенствах (10) эти множители несущественны).

Согласно (11), условие $x > 0$ выполняется всегда Для выполнения второго условия (10) необходимо $x^2 > \varphi$; это дает

(12) $$\rho\eta < 1, \quad \gamma > 2 / (3 - \eta\rho)$$

Другое необходимое условие выполнения неравенства $f > 0$ есть $y > 0$, что имеет место при $\gamma > {}^1/_2$ (противоположное неравенство является достаточным условием неустойчивости). Последнее соотношение можно также получить из неравенства

$$\operatorname{Re} \sigma - \max (U_+, U_-) = \chi - |u| \geqslant 0$$

выполняющегося с точностью до величин $\sim\mu$ (если $u^2 r \geqslant -\varepsilon$). Из этого неравенства следует, что для устойчивости необходимо $U_+ < 0$; последнее выполняется [2] при $\gamma > {}^1/_2$.

В частном случае $\rho = \eta = 0$ условие $\gamma > {}^2/_3$ необходимо и достаточно для устойчивости [1]. В общем случае условие устойчивости есть

$$f / (\xi^2 a) = F (x) = x^3 + bx^2 + cx + d > 0 \qquad (x \geqslant \gamma)$$
$$a = 1 + \rho^2, \quad b = \gamma (3 + h) - 4, \quad c = 4\gamma (1 - \gamma) (2 - h)$$
$$d = -4\gamma^2(1 - \gamma) (g - h + 1)$$
$$h = 2(1 - \eta\rho) / a, \quad g = (1 + \eta^2) / a$$

Для устойчивости необходимо $F (\gamma) > 0$, что дает

(13) $$h > 0, \quad \gamma > 1 / (1 + {}^1/_4 h / g)$$

Условия (12) следуют из (13). При выполнении (13) для устойчивости достаточно $dF / dx \geqslant 0$ при $x \geqslant \gamma$; последнее выполняется, если

(14) $$\gamma \geqslant 4 / (\min (h, 1 / h) + 6)$$

или если

(15) $$b^2 < 3c$$

Если ни одно из условий (14), (15) не выполняется, то F имеет минимум при $x_* > \gamma$; устойчивость имеет место, если при выполнении (13)

(16) $$F(x_*) > 0 \qquad (3x_* = (b^2 - 3c)^{1/2} - b)$$

При выполнении (16) многочлен F имеет только один вещественный корень, поэтому условие единственности корня

(17) $$(b^3 - {}^9/_2 bc + {}^{27}/_2 d)^2 > (b^2 - 3c)^3$$

эквивалентно (16).

Таким образом, периодическое решение (3) устойчиво, если выполняются оба условия (13) и одно из условий (14)—(17); оно неустойчиво, если не выполняется одно из условий (13) или все условия (14)—(17).

В частности, решение с $\gamma = 1$ устойчиво, если $h > 0$, когда

(18) $$\gamma_1\gamma'' + \Omega_1\Omega'' = \mathrm{Re}\,(\bar{p}_1 p'') > 0$$

При $h < 0$ решение с $\gamma = 1$ неустойчиво относительно возмущений, для которых $\xi^2 < -h$. Инкремент $\mathrm{Re}\,\sigma$ принимает максимальное значение γ_* при $\xi = \xi_*$, где

(19) $$\xi_*^2 = (-h + {}^1/_4 h^2 a) / (E - {}^1/_2 ha), \quad \gamma_* = -{}^1/_2 \xi_*^2 \gamma_0 ha / E$$
$$E = (1 - h + {}^1/_4 h^2 a)^{1/2} + 1$$

При малых h отсюда получается используемая ниже оценка $\gamma_* \sim \gamma_0 h^2$.

Результаты работ [1–6] и данной работы допускают следующую интерпретацию.

Пусть параметрам λ соответствует неустойчивое равновесное состояние и начальные амплитуды Q при $k \approx k_0$ одного порядка (здесь и ниже k имеет обычную размерность). Тогда при выполнении (18) устанавливается [2,3] периодическое движение [1] с $k = k_0(\lambda)$. В согласии с экспериментом [5] характерное время установления $\tau \sim l^2 / \gamma_0''$ пропорционально [2] квадрату длины l.

При невыполнении (18) устанавливается непериодическое (турбулентное) движение; его амплитуды Q_i удовлетворяют оценке [4]

$$\sum_i |Q_i|^2 \leqslant -\gamma_0/\gamma_1 \qquad (k_i \approx k_0)$$

Время установления $\tau_* \sim 1/\gamma_*$ этого движения зависит от h.

Пусть h мало, так что $(-h)^{1/2} \sim \delta \sim 1/(l\Delta) \ll 1$, где δ — безразмерное расстояние между соседними волновыми числами; тогда из (19) получается $\tau / \tau_* \sim \delta^2 \ll 1$. Из последнего неравенства следует, что при малых h движение периодическое при $\tau \ll t \ll \tau_*$.

Выше принималось, что начальные амплитуды возмущений одного порядка. Экспериментально такое начальное условие осуществляется следующим образом. Сначала устанавливается устойчивое однородное равновесное состояние, соответствующее каким-либо параметрам λ_0, для которых $\gamma_0(\lambda_0) < 0$. Затем параметры быстро (по сравнению с временем τ)

---

[1] Зависимость этого движения от λ рассмотрена в [2].

изменяются до значений λ, которым соответствует неустойчивое равновесное состояние; при этом существенно, что характерное время установления равновесия определяется (независимо от его устойчивости) «поперечными» размерами системы (расстоянием между плоскостями, радиусом трубки) и поэтому много меньше τ.

При быстром изменении параметров установившееся движение не зависит от λ_0 и вида кривой L, соединяющей в пространстве параметров точки λ_0, λ. Вид этой кривой существен при медленном (по сравнению с τ) изменении параметров; в частности, если L пересекает границу устойчивости в точке λ_*, то при выполнении (18) возникает периодическое движение с числом $k_* = k_0(\lambda_*)$. Это движение может оказаться устойчивым на всей кривой L, включая точку λ; отсюда следует, что при медленном изменении параметров волновое число возможных периодических движений в точке λ зависит от вида кривой L (такая зависимость наблюдалась в [5]).

Непрерывный переход периодического стационарного движения в непериодическое наблюдался в [6]; такой переход можно объяснить тем, что при изменении параметров левая часть (18) меняет знак.

Поступила 27 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eckhaus W.* Studies in non-linear stability theory. N. Y., Springer, 1965.
2. *Пономаренко Ю. Б.* О возникновении пространственно-периодических движений в гидродинамике. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
3. *Newell A. C., Lange C. G., Aucoin P. J.* Random convection. J. Fluid Mech., 1970, vol. 40, pt 3, p. 513.
4. *Diprima R. C., Eckhaus W., Segel L. A.*, Non-linear wave-number interaction in nearcritical two-dimensional flows. J. Fluid Mech., 1971, vol. 49, pt. 4, p. 705.
5. *Snyder H. A.* Wave-number selection at finite amplitude in rotating Couette flow. J. Fluid. Mech., 1969, vol. 35, pt. 2, p. 273.
6. *Зайцев А. А., Швилкин Б. Н.* Характер подвижных страт вблизи границы их исчезновения при уменьшении давления. Радиотехника и электроника, 1967, т. 12, вып. 4.