Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 533.697

УСЛОВИЯ БЕЗУДАРНОСТИ ВИХРЕВОГО ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКИХ СОПЛАХ ЛАВАЛЯ

П. М. Гостев, И. А. Чернов

(Саратов)

Условия безударности потока в окрестности центра сопла для плоских безвихревых течений идеального газа [1, 2] обобщаются на случай вихревого потока. Построены как непрерывные течения, так и с ударными волнами.

1. Возьмем начало декартовой системы координат в центре сопла, направив ось x вдоль оси сопла, а ось y перпендикулярно к ней. Будем считать, что в окрестности центра сопла энтропия $S(y)$ — достаточно гладкая функция, так что справедливо представление

$$S = s_0 y + {}^1/_2 s y^2 + o(y^2)$$

Ограничиваясь потоками симметричными относительно оси x, положим $s_0 = 0$. Тогда в околозвуковом приближении система уравнений, описывающая изоэнергетическое течение идеального газа, имеет вид [3]

$$-uu_x + v_y = 0, \qquad v_x - u_y = sy \tag{1.1}$$

Поставим для системы (1.1) в области $y \geqslant 0$ следующую задачу Коши. Пусть на оси симметрии $y = 0$

$$u = ax, \ x < 0; \qquad u = cx, \ x > 0 \tag{1.2}$$
$$v = 0 \qquad (a \geqslant c \geqslant 0)$$

Искомое решение представим в автомодельной форме [4, 5]

$$u = |s| y^2 f(\xi), \qquad v = |s|^{3/2} y^3 g(\xi) \tag{1.3}$$
$$\xi = |s|^{-1/2} x y^{-2} \qquad (s \neq 0)$$

Подставив (1.3) в систему (1.1), получим два обыкновенных дифференциальных уравнения для f и g. Исключив из них g, имеем для определения f неоднородное уравнение второго порядка

$$(f - 4\xi^2) f'' + (f')^2 + 2\xi f' - 2f = \operatorname{sign} s \tag{1.4}$$

Функция g находится из соотношения

$$g = {}^1/_3 \, [4\xi f + 2\xi \operatorname{sign} s + (f - 4\xi^2) f'] \tag{1.5}$$

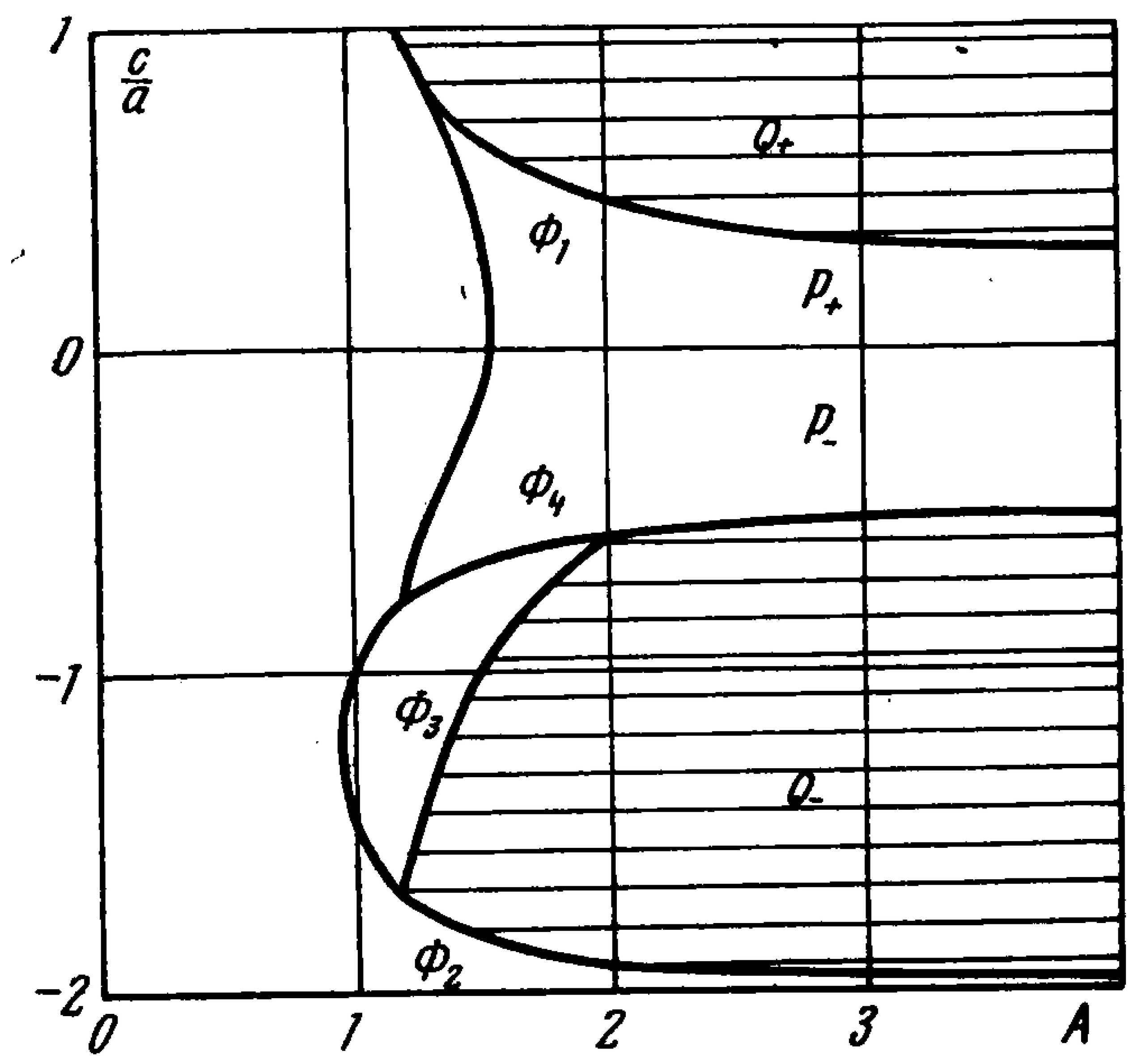
Уравнение (1.4) допускает простое частное решение [3]

$$f = A\xi + {}^1/_2 (A^2 - \operatorname{sign} s) \tag{1.6}$$

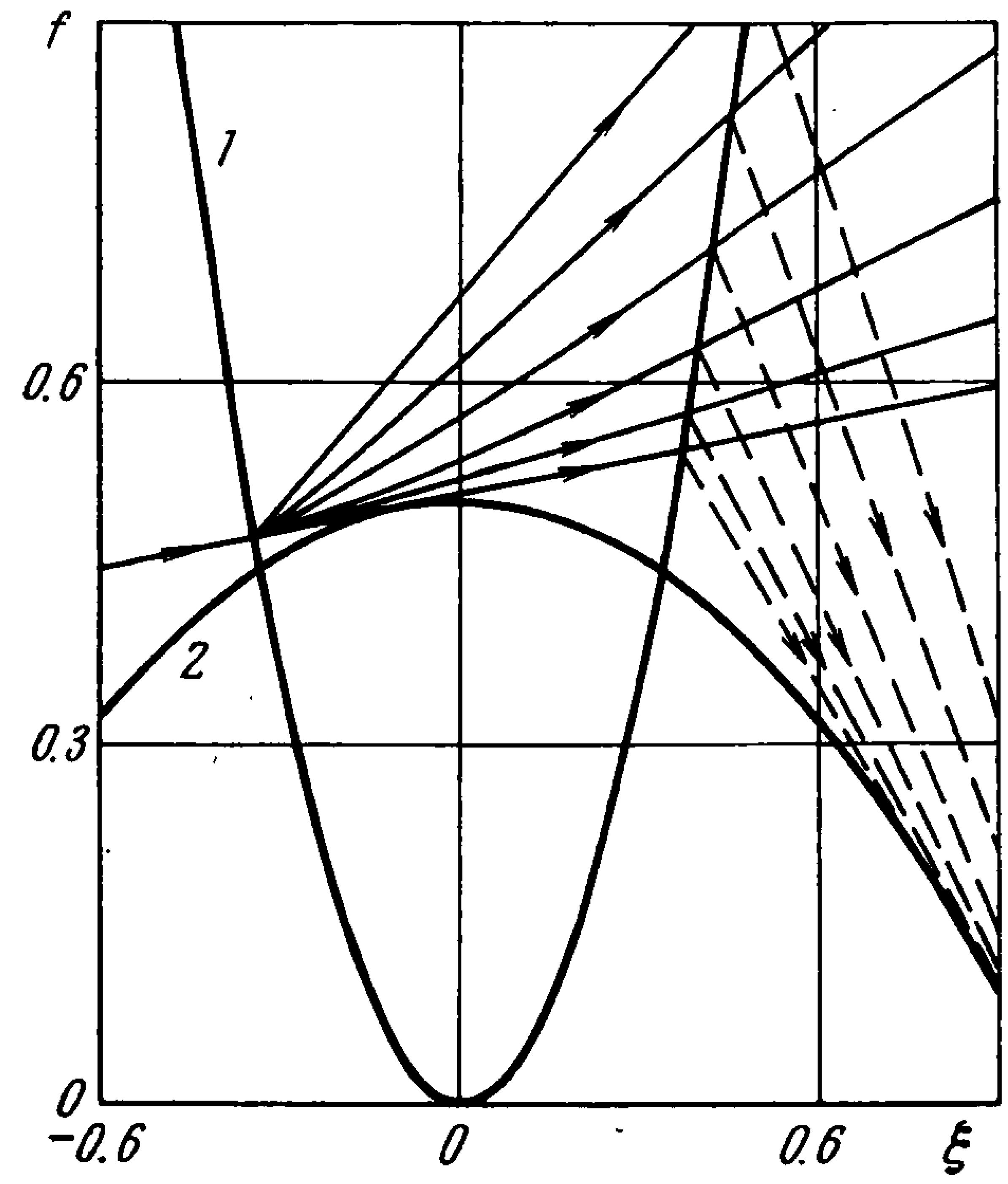
где A — произвольная постоянная. Однопараметрическое семейство прямых (1.6) имеет огибающую $f = -{}^1/_2 (\xi^2 + \operatorname{sign} s)$.

Точки ξ_0 параболы $f = 4\xi^2$ являются особыми для уравнения (1.4) и соответствуют приходящим C_-° ($\xi_0 < 0$) и уходящим C_+° ($\xi_0 > 0$) предельным характеристикам.

При $A < 2\sqrt{2}/3$, $\operatorname{sign} s = 1$ прямая (1.6) не пересекает параболу $f = 4\xi^2$. Это означает, что задача (1.2) имеет решение только при условии $a = c$, соответствующее решение аналитическое. Для построения решения при $A > 2\sqrt{2}/3$, $\operatorname{sign} s = 1$ разобьем область течения на три части:



Фиг. 1



Фиг. 2

область *1* — слева от характеристики C_-°, область *2* — между характеристиками $C_\pm^\circ$, область *3* — справа от характеристики C_+°. Воспользовавшись решением (1.6), можно удовлетворить начальным условиям (1.2), положив $A = a\,|s|^{-1/2}$ в области *1* и $A = c\,|s|^{-1/2}$ — в области *3*. В промежуточной области *2* решение уравнения (1.4) находилось численным интегрированием из условия непрерывности на предельных характеристиках.

Используя (1.6), можно построить одно непрерывное течение со слабыми разрывами на предельных характеристиках. Пусть в области *1* поток описывается решением (1.6) с постоянной A, а в области *2* — тем же решением с постоянной B. Осуществляя склейку на характеристике C_-°, получим, в частности $B = [(9A^2 - 8 \operatorname{sign} s)^{1/2} - 5A]/4$.

Условие непрерывности на характеристике C_+° дает значение постоянной

$$C = -[(9B^2 - 8 \operatorname{sign} s)^{1/2} + 5B]/4$$

в области *3*. Аналогично безвихревому случаю [2] построенное решение аналитическое и предельное в том смысле, что все другие интегральные кривые, описывающие безударные течения газа, расположены между ними. Соответствующий непрерывным течениям диапазон значений c/a определяется неравенствами

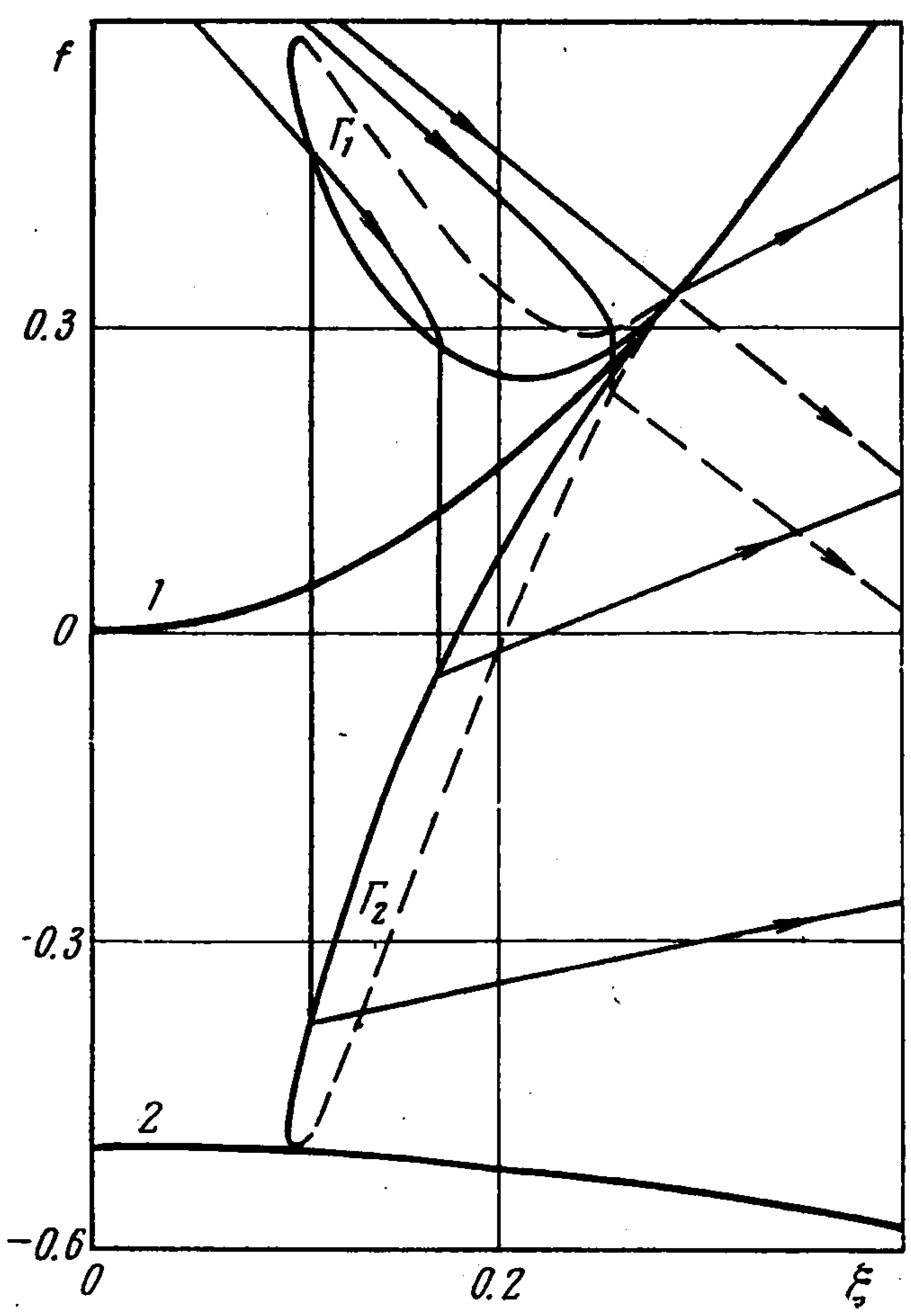
$$\Phi_1(A) \leqslant c/a \leqslant 1, \qquad \Phi_1(A) = C/A$$

обобщающими неравенства Ф. И. Франкля на вихревые течения.

При $A \to \infty$, что эквивалентно $s \to 0$, имеем $\Phi_1 \to {}^1/_4$. График функции Φ_1 приведен на фиг. 1. Численный анализ показывает, что для значений A из интервала

$$2\sqrt{2}\,/\,3 \leqslant A \leqslant 5\sqrt{2}\,/\,6$$

в области *2* не существует непрерывных решений за исключением (1.6) с $B = A$. При $A < {}^1/_3$, $\operatorname{sign} s = -1$ слабый разрыв, приходящий в центр сопла вдоль C_-°, дает эффект ускорения потока, что невозможно в безвихревом случае.



На фиг. 2 показано семейство интегральных кривых уравнения (1.4) для $A = 0.1$, $\operatorname{sign} s = -1$; кривым *1* и *2* соответствуют $f = 4\xi^2$ и $f = -{}^1/_2(\xi^2 - 1)$.

2. При построении разрывных решений необходимо удовлетворить граничным условиям на фронте ударной волны

$$f_2 + f_1 = 8\xi_2^2 \tag{2.1}$$
$$10\xi_2 f_2 + (f_2 - 4\xi_2^2) f_2' = 10\xi_2 f_1 + (f_1 - 4\xi_2^2) f_1'$$

Индекс 1 относится к состоянию газа перед скачком уплотнения, индекс 2 — непосредственно за ним. Координата ударного фронта ξ_2 подлежит определению. Соотношения (2.1) совпадают с соответствующими условиями для безвихревых течений [2].

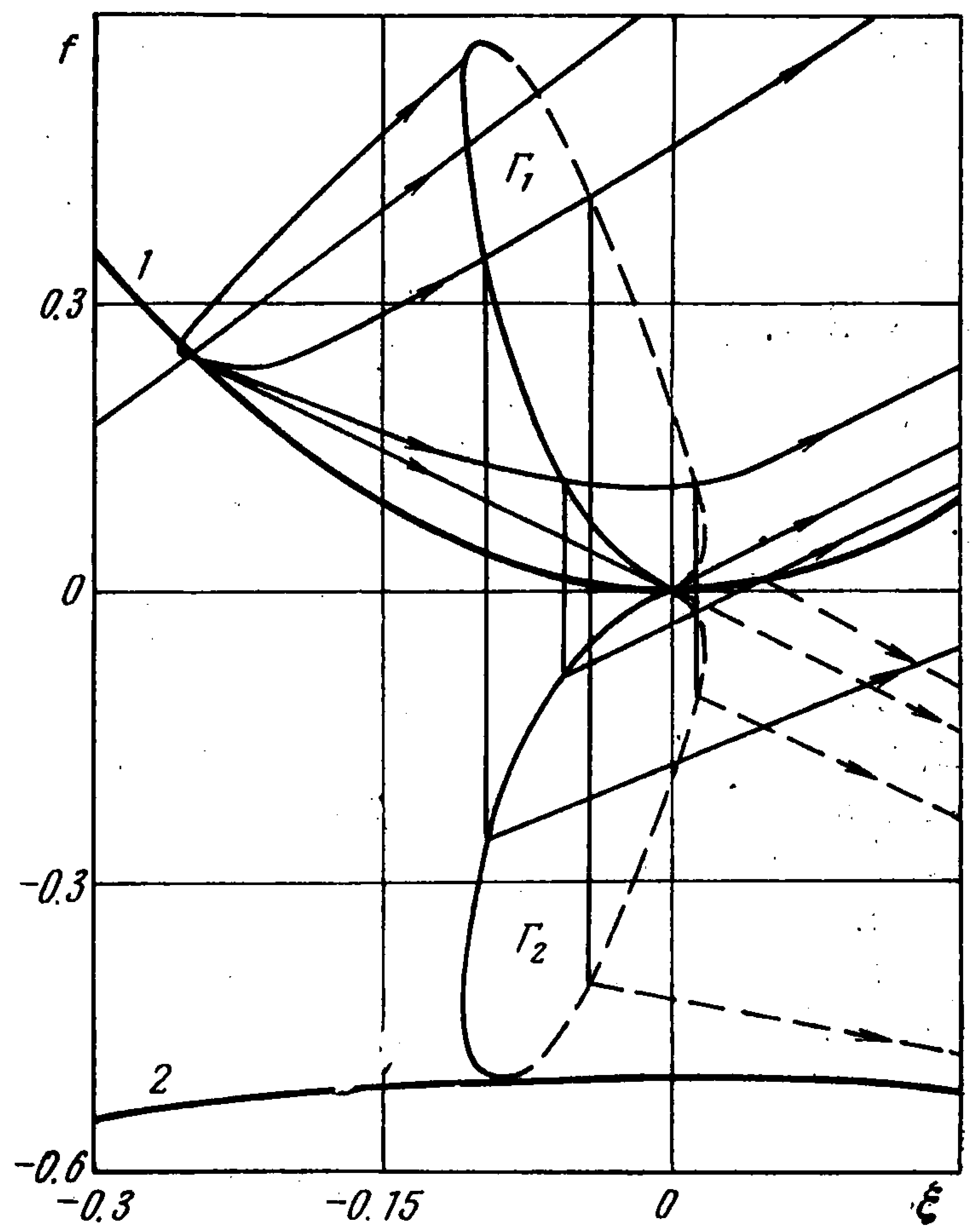
На фиг. 3, 4 показано поведение интегральных кривых для течений с ударными волнами. Точки кривых Γ_1 и Γ_2 соответствуют состоянию газа перед скачком уплотнения и непосредственно за ним. Кривым *1* и *2* соответствуют $f = 4\xi^2$ и $f = -{}^1/_2(\xi^2 + 1)$. На фиг. 3 ($A = 3$, $\operatorname{sign} s = 1$) рассматриваемые интегральные кривые расположены ниже предельного решения со слабыми разрывами. Так как $\xi_2 > 0$, то скачок уплотнения зарождается в центре сопла и простирается вниз по потоку. Скорость за скачком может быть как сверхзвуковой, так и дозвуковой. Отметим, что продолжение течений в области *3* введением скачка уплотнения осуществляется неоднозначно: соответствующие интегральные кривые могут пересекать Γ_1 в нескольких точках.

На фиг. 4 ($A = 1.5$, $\operatorname{sign} s = 1$) интегральные кривые, лежащие выше прямой (1.6), физически нереальны из-за предельных линий, неустранимых введением ударной волны. Это дает вырезку в области $P_\pm$ существования течений с ударной волной на фиг. 1. Остальные интегральные кривые, описывающие течения с ударными волнами, расположены в области существования непрерывных течений. Поэтому предварительное появление в потоке предельной линии не является необходимым условием для образования ударной волны, как это имеет место для безвихревых течений [2]. Через точки Γ_1 интегральные кривые могут проходить как непрерывным образом, так и терпеть в них разрыв. Координата ударного фронта ξ_2 может быть как положительной, так и отрицательной, т.е. допускаются как уходящие, так и приходящие скачки уплотнения.

В диапазоне значений

$$0 < c / a < \Phi_1 (A)$$

в потоке образуется ударная волна, скорость за которой увеличивается по направлению к выхлопной части сопла.



Фиг. 4

3. Пусть в данных Коши (1.2) $a > 0$, $c < 0$. Тогда непрерывным течениям соответствуют значения c / a, определяемые неравенствами

$$\Phi_2 (A) \leqslant c / a \leqslant \Phi_3 (A)$$

Здесь

$$\Phi_2 (A) = - [(9A^2 - 8 \operatorname{sign} s)^{1/2} + 5A] / 4A$$

$$\Phi_3 (A) = \begin{cases} B / A, & A > 17\sqrt{2}/12 \\ -[(9C^2 - 8 \operatorname{sign} s)^{1/2} + 5C] / 4A, & A < 17\sqrt{2}/12 \end{cases}$$

При $A \to \infty$ $(s \to 0)$ имеем $\Phi_2 \to -2$, $\Phi_3 \to -1/2$. Если

$$\Phi_4 (A) < c / a < 0, \quad \Phi_4 (A) = B / A.$$

то в потоке возникает ударная волна, скорость за которой убывает по направлению к выхлопной части сопла. Зависимость Φ_2, Φ_3, Φ_4 от A показана на фиг. 1. Здесь области $Q_\pm$ соответствует непрерывное течение.

Авторы благодарят С. В. Фальковича за полезные обсуждения в процессе работы.

Поступила 8 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франкль Ф. И.* К теории сопел Лаваля. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9, № 5.
2. *Рыжов О. С.* Образование ударных волн в соплах Лаваля. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
3. *Шифрин Э. Г.* Плоское вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
4. *Фалькович С. В.* К теории сопла Лаваля. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
5. *Ильинская Г. Б., Лифшиц Ю. Б.* О возмущениях трансзвукового течения, вызываемых завихренностью. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.