

**АВТОМОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О ВОЛНАХ КОШИ — ПУАССОНА
У НАКЛОННОГО БЕРЕГА**

Б. Н. Румянцев

(Москва)

Рассматривается плоская задача о волнах Коши — Пуассона у наклонного берега в случае начального возмущения, сосредоточенного вблизи береговой кромки. Исследуется поведение решения вблизи берега и на больших расстояниях от него.

Многочисленные исследования, посвященные изучению стоячих и прогрессивных волн у наклонного берега, описаны в монографии [1]. Плоская задача о неустановившихся волнах у берега с углом наклона $\gamma = \pi/2n$, где n — целое число, рассматривалась в работах [2, 3]. Ниже рассматривается случай, когда угол наклона берега соизмерим с $\pi/2$, при условии, что начальное возмущение сосредоточено в окрестности кромки берега, так что задачу можно считать автомоделной.

1. Плоские неустановившиеся волны на поверхности тяжелой жидкости определяются из решения следующей задачи:

$$(1.1) \quad \Delta\varphi = 0$$

$$g \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad y = 0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad y = -x \operatorname{tg} \gamma$$

Здесь начало координат находится в точке соприкосновения свободной поверхности с берегом, ось x направлена вдоль свободной поверхности, ось y — вертикально вверх. В качестве начального условия задается распределение давления вдоль свободной поверхности (ρ_1 — плотность)

$$\varphi(x, 0; 0) = P(x) / \rho_1, \quad \partial\varphi(x, 0; 0) / \partial t = 0$$

Будут рассмотрены также более общие начальные условия.

2. Рассмотрим сформулированную задачу в случае, когда начальное возмущение сосредоточено вблизи начала координат и характеризуется постоянной A , которая имеет размерность $L^p T^q$.

Решение задачи (1.1) разыскивается в виде

$$(2.1) \quad \varphi(x, y; t) = A\rho^\alpha g^\beta \Phi(u, \theta), \quad u = \sqrt{gt} / 2\sqrt{\rho}$$

$$p + \alpha + \beta = 2, \quad q - 2\beta = -1$$

Здесь ρ, θ — полярные координаты. Начальное условие будет сформулировано позднее. Подстановка (2.1) в (1.1) приводит к соотношениям

$$(2.2) \quad 4\alpha^2\Phi - 4\alpha u \Phi_u' + u(u\Phi_u')_u' + 4\Phi_{\theta\theta}'' = 0, \quad -\gamma < \theta < 0$$

$$4\Phi_{\theta'}' + \Phi_{u^2}'' = 0, \quad \theta = 0; \quad \Phi_{\theta'}' = 0, \quad \theta = -\gamma$$

Решение задачи (2.2) ищем в виде

$$(2.3) \quad \Phi(u, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_*(p, \theta) u^{-p} dp \quad (c = \text{const} > 0)$$

После подстановки в (2.2) получим

$$(2.4) \quad \Phi_*''(\theta/2) + (p + 2\alpha)^2 \Phi_* = 0 \\ 4\partial\Phi_*(p, \theta) / \partial\theta + (p - 1)(p - 2)\Phi_*(p - 2, \theta) = 0, \quad \theta = 0 \\ \partial\Phi_*(p, \theta) / \partial\theta = 0, \quad \theta = -\gamma$$

Общее решение уравнения (2.4) можно представить в одной из следующих двух форм:

$$(2.5) \quad \Phi_*(p, \theta) = U(p) \sin \left[\frac{p + 2\alpha}{2} \theta + \sigma(p) \right]$$

$$(2.6) \quad \Phi_*(p, \theta) = U_1(p) \cos \frac{p + 2\alpha}{2} \theta + U_2(p) \sin \frac{p + 2\alpha}{2} \theta$$

Подстановка (2.5) в граничные условия из (2.4) приводит к соотношениям

$$(2.7) \quad \sigma(p) = \frac{p\gamma}{2} + \alpha\gamma + \frac{\pi}{2} + k\pi \\ U(p + 2) \sin \left[\frac{p\gamma}{2} + (\alpha + 1)\gamma \right] - U(p) \frac{(p + 1)p}{2(p + 2 + 2\alpha)} \times \\ \times \cos \left[\frac{p\gamma}{2} + \alpha\gamma \right] = 0$$

Аналогичные соотношения, соответствующие формуле (2.6), имеют вид

$$(2.8) \quad U_2(p) = -U_1(p) \operatorname{tg} \frac{p + 2\alpha}{2} \gamma \\ U_1(p + 2) - U_1(p) \frac{(p + 1)p}{2(p + 2 + 2\alpha)} \operatorname{ctg} \frac{p + 2 + 2\alpha}{2} \gamma = 0$$

Второе соотношение (2.7) (или (2.8)) есть уравнение в конечных разностях первого порядка для определения функции $U(p)$ (соответственно $U_1(p)$).

В дальнейшем ограничимся частным случаем $\alpha = -1$, $\beta = 0$, соответствующим начальному импульсу, приложенному в окрестности начала координат. Другие случаи могут быть исследованы аналогично; кроме того, из найденных решений могут быть получены решения, отвечающие другим α , если применить дифференцирование и интегрирование по t .

Второму уравнению (2.7) при $\gamma = \pi/2$ и $\gamma = \pi$ удовлетворяют следующие функции соответственно:

$$(2.9) \quad U(p) = \omega(p) \Gamma\left(\frac{p + 1}{2}\right), \quad \gamma = \frac{\pi}{2} \\ U(p) = \omega(p) \Gamma\left(\frac{p + 1}{2}\right) \left(\operatorname{ctg} \frac{p\pi}{2}\right)^{p/2} \cos^{-1} \frac{p\pi}{2}, \quad \gamma = \pi$$

Здесь $\omega(p)$ — произвольная периодическая функция периода 2. Ее выбор означает выбор некоторого начального условия для $\varphi(x, y; t)$

а именно, величины и плоскости приложения импульса; кроме того, должно быть обеспечено существование интеграла (2.3).

Пусть $\gamma = \pi m / 2n$, где m и n — взаимно простые целые числа. Здесь удобнее пользоваться формулой (2.6). Второму уравнению (2.8) удовлетворяют функции

$$(2.10) \quad U_1(p) = \omega(p) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Omega(p, m, n)$$

$$\Omega = \prod_{k=0}^{n-1} \sin \kappa_k, \quad m = 4l + 1$$

$$\Omega = \prod_{k=0}^{3n-1} \sin \kappa_k, \quad m = 4l + 3$$

$$\Omega = \prod_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg}^{(p+2k)/2n} \kappa_k, \quad m = 2l$$

$$\kappa_k = (p + 2k) \frac{\pi}{4} \frac{m}{n}$$

Здесь $\omega(p)$ — также произвольная периодическая функция периода 2. Таким образом, получено семейство решений исходной задачи, каждое из которых соответствует определенным m и n . Выбор функции $\omega(p)$ позволяет удовлетворить широкому классу начальных условий, как будет показано ниже.

3. Поставим условие: функция $\Phi_*(p, \theta)$ (или ее рассматриваемая ветвь) должна иметь в точке $p = 0$ полюс первого порядка с вычетом, пропорциональным $\sin \theta$. Тогда оказывается, что при малых θ

$$\Phi(p, \theta; 0) \sim \frac{\sin \theta}{p} \approx \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Известно [4], что функция $y / \pi (x^2 + y^2)$ при $y \rightarrow 0$ стремится к δ -функции, так что распределение вдоль свободной поверхности начального импульса пропорционально $\delta(\rho)$.

Окончательное решение задачи о волнах Коши — Пуассона в случае импульса, приложенного к свободной поверхности при $\gamma = \pi / 2$, $\gamma = \pi$, получается из (2.9), если выбрать в качестве $\omega(p)$ соответственно функции $(2\sqrt{\pi})^{-1} \operatorname{ctg} p\pi / 2$ и $(2\sqrt{\pi})^{-1} \operatorname{ctg}^2 p\pi / 2$. Можно заметить, что при других γ решения, которые разыскиваются в форме (2.5), соответствуют начальным импульсам, приложенным в плоскостях, наклоненных к горизонтали. Например, пусть в (2.9) при $\gamma = \pi / 2$ выбрано $\omega = (2\sqrt{\pi})^{-1} \operatorname{ctg}^2 p\pi / 2$. Тогда при $p = 0$ вычет пропорционален $\cos \theta = \cos(\pi/2 - \theta_1) = \sin \theta_1$, т. е. импульс приложен под прямым углом к свободной поверхности.

Если требуется решить задачу при произвольном $\gamma = \pi m / 2n$ в случае импульса, приложенного к свободной поверхности или под произвольным заданным углом к ней, достаточно построить линейную комбинацию двух решений вида (2.5), которые отличаются множителем, имеющим при $p = 0$ полюс первого порядка, коэффициенты при этом выбираются из условия, что вычет в точке $p = 0$ имеет заданный вид.

Пусть, например, $\gamma = 3\pi/4$. Преобразуя описанным образом соответствующее выражение из (2.10), можно получить следующее решение исходной задачи, удовлетворяющее требуемым условиям при $t = 0$ на свободной поверхности:

$$(3.1) \quad \Phi_*(p, \theta) = \left(\operatorname{ctg} \frac{p\pi}{2} + \beta_1 \operatorname{ctg}^2 \frac{p\pi}{2} \right) \sin^{-2} p\pi \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \times \\ \times \prod_{k=0}^4 \sin \kappa_k \sin\left(\kappa_5 + \frac{p\theta}{2} - \theta\right) \\ \beta_1 = [\theta/4 - \psi(1/2)/\pi]^{-1}$$

Здесь $\psi(p)$ — логарифмическая производная Γ -функции, множитель $\sin^{-2} p\pi$ введен для того, чтобы существовал интеграл (2.3).

Дополняя контур интегрирования в (2.3) до замкнутого полуокружностью в левой полуплоскости и применяя теорему о вычетах, можно получить известное [5] представление решения в виде ряда при $\gamma = \pi/2$

$$\Phi(u, \theta) = \frac{-1}{\pi^{3/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) u^{2n} \sin\left[\frac{n\pi}{2} + (n+1)\theta\right]$$

Известно [5], что в задачах рассматриваемого типа для численного анализа решений в практически важных случаях достаточно найти асимптотические выражения для интегралов при больших значениях u . Ниже выводятся соответствующие формулы для некоторых γ при $\theta = 0$. В других случаях вычисления аналогичны.

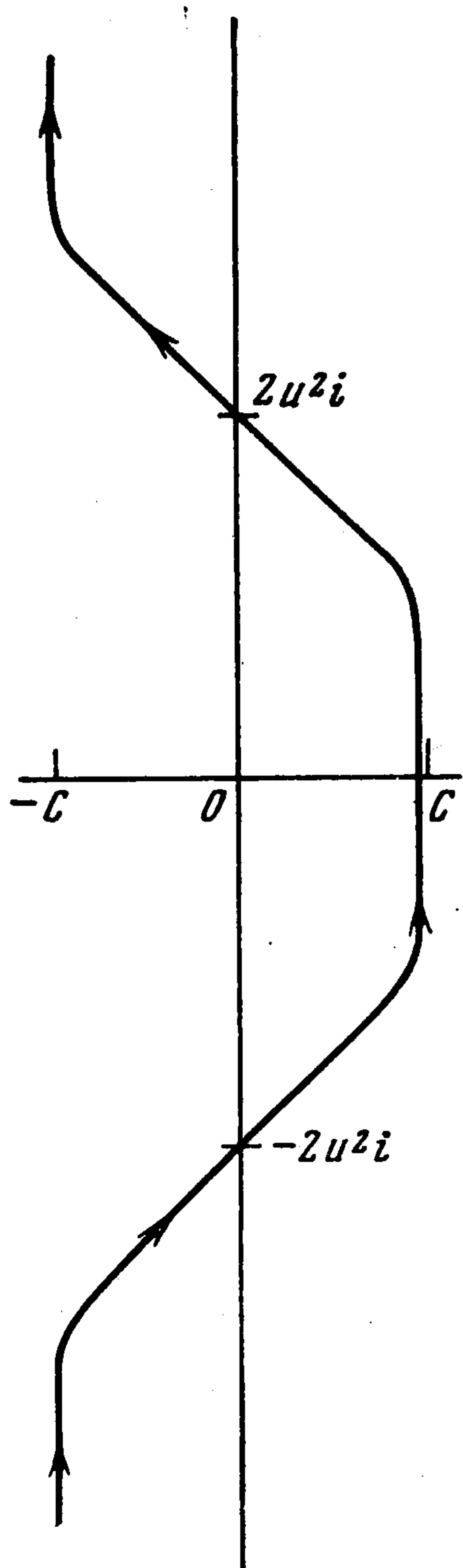
Оценки показывают, что для полученных решений модуль подынтегральной функции в (2.3) на прямых, параллельных мнимой оси, возрастает при $c > 0$ и убывает при $c < 0$ при возрастании $|\operatorname{Im} p|$, а на мнимой оси при больших $|p|$ имеется минимум. Поэтому для вычисления интеграла (2.3) при больших u естественно взять контур, изображенный на фигуре и проходящий через точку перевала, которую следует искать при больших $|p|$.

Пусть $\gamma = \pi/2$. Интеграл (2.3) можно представить в виде

$$\Phi(u, 0) = \frac{1}{4\pi^{3/2} i} \left[\int_c^{-c+i\infty} L(u, p) dp + \int_{-c-i\infty}^c L(u, p) dp \right] = I_1 + I_2$$

$$L(u, p) = \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) (e^{ip\pi/2} + e^{-ip\pi/2}) (e^{ip\pi/4} + e^{-ip\pi/4})^{-1}$$

При больших $|p|$ в I_1 и I_2 можно отбросить малые слагаемые и воспользоваться асимптотическим представлением для $\Gamma[(p+1)/2]$. Тогда



Фиг. 1

да (2.3) после замены переменных $p = 2u^2t$ приобретает вид

$$\Phi(u, 0) = \frac{u^2}{2\sqrt{2\pi i}} \left\{ \int_c^{-c+i\infty} \exp \left[u^2 \left(t \ln t - t - it \frac{\pi}{2} \right) \right] dt + \right. \\ \left. + \int_{-c-i\infty}^c \exp \left[u^2 \left(t \ln t - t + it \frac{\pi}{2} \right) \right] dt \right\}$$

Точки перевала располагаются соответственно в i и в $-i$. Вычисления показывают, что направления быстрейшего спуска составляют с мнимой осью углы $\pm \pi/4$. Обычные формулы метода перевала приводят к следующему известному [5] асимптотическому выражению:

$$\varphi(x, 0; t) = \frac{Ag^{1/2}t}{2\pi^{1/2}\rho_1 x^{3/2}} \sin \left(\frac{gt^2}{4x} + \frac{\pi}{4} \right)$$

Переходя к случаю $\gamma = \pi$, заметим, что хотя функция $\Phi_*(p, \theta)$ в (2.3) многозначна, применимы те же рассуждения, что и в рассмотренном случае, поскольку можно рассматривать ее однозначную ветвь. Интеграл (2.3) принимает вид

$$\Phi(u, 0) = -\frac{1}{4\pi^{3/2}i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma \left(\frac{p+1}{2} \right) \operatorname{ctg}^{p/2+2} \frac{p\pi}{2} u^{-p} dp$$

Аналогичное разбиение интеграла на две части, использование асимптотических выражений для подынтегральной функции, та же замена переменных и применение метода перевала приводят к асимптотическому выражению

$$\varphi(x, 0; t) = \frac{Ag^{1/2}t}{2\pi^{1/2}\rho_1 x^{3/2}} \sin \left(\frac{gt^2}{4x} + \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \right)$$

В случае $\gamma = 3\pi/4$ аналогичные рассуждения приводят к формуле

$$\varphi(x, 0; t) \approx \frac{Ag^{1/2}t}{3\pi^{1/2}\rho_1 x^{3/2}} \cos \frac{gt^2}{4x}$$

Поступила 10 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Д. Д. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Румянцев Б. Н. О неустановившихся движениях тяжелой жидкости у наклонного берега. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
3. Румянцев Б. Н. К теории волн Коши — Пуассона у наклонного берега. Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 2.
4. Владимиров В. С. Уравнения математической физики, М., «Наука», 1971.
5. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.