Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 532.593

ОБ ОДНОМ ВИДЕ УСТАНОВИВШИХСЯ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ НАД ВОЛНИСТЫМ ДНОМ

Я. И. Секерж-Зенькович

(Москва)

Рассматривается задача о плоских установившихся капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды на поверхности потока идеальной несжимаемой жидкости над волнистым дном при давлении, периодически распределенном вдоль поверхности и заданном некоторым бесконечным тригонометрическим рядом. Предполагается, что волнистое дно пересекается с вертикальной плоскостью по периодической кривой, называемой линией дна и заданной тоже в форме некоторого бесконечного тригонометрического ряда.

Задача рассматривается в строгой постановке и сводится к решению системы нелинейных интегральных и трансцендентных уравнений. Решение строится в виде рядов по степеням малого безразмерного параметра, которому пропорциональны амплитуды первых гармоник как линии дна, так и волны давления на поверхности. До конца рассчитаны первые три приближения. Дано приближенное уравнение профиля волны.

Рассматривается и тот особый случай, когда длина дуги волны линии дна совпадает с длиной установившейся свободной линейной волны, отвечающей взятой скорости потока при горизонтальном плоском дне и постоянном давлении вдоль поверхности. В этом случае значение параметра интегрального уравнения оказывается равным одному из собственных значений ядра этого уравнения и решение строится в виде рядов по степеням корня кубического из указанного выше малого параметра.

Аналогичная задача, но при постоянном вдоль поверхности давлении, была рассмотрена в работах автора [1,2] и в его докладе на XIII Международном конгрессе по теоретической и прикладной механике (Москва, 1972 г. [3]).

Аналогичная задача о капиллярно-гравитационных волнах над волнистым дном рассмотрена в работе [4], где, кроме топологического доказательства существования и единственности решения, указан алгоритм его построения, но расчет приближений только намечен, а механическое содержание решения исследовано мало.

В предлагаемой работе в отличие от [4] уравнение линии дна и выражение для давления на поверхность берутся в форме, позволяющей представлять любые приближения в виде конечных сумм, и дается исследование основной системы нелинейных интегральных и трансцендентных уравнений аналитическими методами Ляпунова — Шмидта и их развитием.

1. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение идеальной, несжимаемой тяжелой жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью, на которой давление $p_0 = p_0' + p_0(x)$; здесь $p_0' = \mathrm{const}$, а $p_0(x)$ — заданная периодическая функция горизонтальной координаты x. Снизу жидкость читается ограниченной волнистым дном, которое пересекается вертикальной плоскостью течения по некоторой заданной периодической, дважды дифференцируемой кривой L, называемой линией дна. Предполагается, что волнообразная линия L симметрична относительно вертикалей у ее гребней и у середин ее впадин. Предположим, что поток обладает постоянной заданной средней горизонтальной скоростью c при $y = 0$ (см. ниже) и направленной слева направо.

Благодаря периодичности как заданного на поверхности давления, так и линии дна, свободная поверхность принимает форму неподвижной периодической волны в координатах, связанных с прогрессивной волной, имеющей скорость $-c$. Рассматриваемые волны обусловлены волнистостью дна и периодически распределенным давлением вдоль поверхности жидкости. Если дно обращается в горизонтальную плоскость, а давление становится постоянным, то эти волны перестают существовать и течение переходит в равномерный поток. Такие волны, как и в случае постоянного на поверхности давления [2], назовем вынужденными в отличие от свободных, которые существуют при горизонтальном плоском дне, постоянном давлении на поверхности и особых значениях скоростей потока.

Пусть гребень одной волны кривой L расположен на некоторой вертикали; пусть искомая волна и кривая, изображающая давление $p_0(x)$, обладают симметрией относительно этой вертикали и вертикали линии L у середины ее впадины. Совместим ось y прямоугольной системы координат xy с осью симметрии у гребня и направим ее вертикально вверх. За начало координат O примем точку пересечения оси y с линией L, а ось x направим слева направо по горизонтальной касательной к линии дна. Пусть период по x (или длина волны) линии L равен λ. На протяжении одной волны посередине между двумя гребнями имеется, по крайней мере, одна впадина (в общем случае на протяжении одной волны может быть несколько гребней и впадин). Предполагается, что линия L имеет горизонтальные касательные в точках $x = 0$ и $x = \pm {}^1/_2\lambda$. Примем угол с осью x, образованный касательной к линии L, заданным в виде функции $\Theta(s)$ длины дуги s, отсчитываемой от нуля. Положительное направление на касательной выбрано соответствующим увеличению длины дуги s. Через $2l$ обозначим длину дуги линии L за период по x, т. е. при $0 \leqslant x \leqslant \lambda$. При $x = -{}^1/_2\lambda$ и $x = {}^1/_2\lambda$ длины дуг соответственно равны $s = -l$ и $s = l$. Так как $\Theta(s)$ — непрерывная функция от s, меняющая знак при переходе через вершины гребней и середины впадин, то

$$\Theta(0) = \Theta(l) = \Theta(-l) = 0 \tag{1.1}$$

В силу наложенного условия симметрии имеем

$$\Theta(-l + s) = -\Theta(l - s) \tag{1.2}$$

Предполагая наклон линии L малым, будем считать в согласии с условием периодичности и условиями (1.1) и (1.2), что функция $\Theta(s)$ задается в виде следующего тригонометрического ряда:

$$\Theta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \beta_n \sin \frac{n\pi s}{l} \tag{1.3}$$

Здесь ε — малый безразмерный положительный параметр, β_n — заданные действительные числа, причем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \beta_n$ сходится в круге радиуса $\varepsilon_0 > 0$.

С помощью функции $\Theta(s)$ параметрическое уравнение линии дна представляется в виде

$$x = \int_0^s \cos\Theta(s)\,ds, \qquad y = \int_0^s \sin\Theta(s)\,ds \tag{1.4}$$

Отсюда следует, что λ — длина волны линии L — определяется формулой

$$\lambda = \int_0^{2l} \cos\Theta(s)\,ds \tag{1.5}$$

Из (1.3) и (1.5) вытекает, что λ будет следующей известной функцией ε:

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varepsilon^n, \quad \lambda_0 = 2l, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{\beta_1^2 l}{2}, \quad \lambda_3 = 0 \tag{1.6}$$

где λ_n $(n = 4, 5, \ldots)$ — полиномы относительно β_i.

Предполагается, что длина искомой установившейся волны над волнистым дном и период заданной функции $p_0(x)$ также равны λ.

Плоскость течения xy примем за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Пусть φ — потенциал скоростей, ψ — функция тока, $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал скоростей, U, V — проекции вектора скорости $\mathbf{q}$ на оси координат. Тогда имеем

$$dw/dz = -U + iV, \qquad U = -\partial\varphi/\partial x, \qquad V = -\partial\varphi/\partial y$$

Для вывода из граничных условий основных уравнений задачи сначала отобразим конформно область, занятую одной волной и представляющую собой вертикальный прямоугольник, ограниченный сверху и снизу волнообразными кривыми на прямоугольник

$$0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0, \qquad 0 \leqslant \psi \leqslant \psi_0$$

в плоскости w (здесь $\psi = \psi_0$ — расход потока в единицу времени; $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_0$ соответственно при $x = 0$ и $x = \lambda$), а затем этот прямоугольник — на внутренность кругового кольца с центром в нуле плоскости $u = u_1 + iu_2$. Последнее отображение, как известно, дается формулой

$$w = \frac{\varphi_0}{2\pi i} \ln u \tag{1.7}$$

При этом отрезок $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, отвечающий свободной поверхности, перейдет в окружность внешнего круга единичного радиуса, а отрезок, соответствующий дну, перейдет в окружность внутреннего круга радиуса $r_0 = \exp(-2\pi\psi_0 / \varphi_0)$, меньшего единицы. Кольцо будет иметь разрез вдоль отрезка $(r_0, 1)$.

При решении предполагается, что величина ψ_0 / φ_0 и, следовательно, r_0 заданы и не зависят от ε (см. (1.3)).

Отображение этого кольца плоскости u на область одной волны плоскости z определяется из соотношения

$$(1.8) \qquad \frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i}\frac{e^{i\omega(u)}}{u}, \qquad \omega(u) = \Phi + i\tau$$

В силу (1.7) и (1.8), положив $\varphi_0 = c\lambda$, находим

$$dw/dz = -ce^{\tau - i\Phi}$$

Отсюда следует, что всюду в потоке функция Φ равна углу, образуемому вектором скорости $\mathbf{q}$ с осью x, и что

$$q = |\mathbf{q}| = ce^{\tau}$$

Функция $\omega(u)$, как голоморфная, представляется рядом Лорана внутри рассматриваемого кольца плоскости u. Коэффициенты этого ряда, как можно показать, должны быть действительными в силу симметрии волны, линии дна и давления $p_0(x)$.

Из (1.8) находим при $u = e^{i\theta}$ (θ — угол радиуса вектора с осью u_1) дифференциальное соотношение; отделяя в нем действительные и мнимые части и интегрируя, получаем параметрическое уравнение профиля волны

$$(1.9) \qquad x = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\cos\Phi(\eta)\,d\eta, \qquad y = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta)\,d\eta$$

При определении y предполагается, что начало координат перенесено в вершину гребня волны; в (1.9)

$$\tau(\eta) = \tau(1, \eta), \qquad \Phi(\eta) = \Phi(1, \eta)$$

Из (1.9) следует, что при решении задачи, кроме $\Phi(\theta)$, необходимо найти и $\tau(\theta)$. В силу симметрии искомой волны относительно вертикали гребня, функция $\tau(\theta)$ является четной, а $\Phi(\theta)$ — нечетной. Поэтому их можно представить следующими тригонометрическими рядами:

$$(1.10) \qquad -\tau(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta, \qquad \Phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta$$

Из теории аналитических функций известно, что на внешней окружности имеют место следующие соотношения, вытекающие из формул Вилля [5] для кольца:

$$(1.11) \qquad -\tau(\theta) - A_0 = \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\frac{d\Phi}{d\eta}\,d\eta - 2\int_0^{2\pi} N(\eta, \theta)\frac{d\Phi^*}{d\eta}\,d\eta$$

$$K(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta \cos n\theta}{\nu_n'}, \qquad N(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\cos n\theta}{\nu_n^*}$$

$$\nu_n' = n\frac{r_0^{-n} - r_0^{n}}{r_0^{-n} + r_0^{n}}, \qquad \nu_n^* = n(r_0^{-n} - r_0^{n}), \qquad \frac{4}{\nu_n^{*2}} = \frac{1}{\nu_n'^2} - \frac{1}{n^2}$$

$$\Phi(\theta)=\int_0^{2\pi}K_0(\eta,\theta)\frac{d\tau}{d\eta}d\eta+2\int_0^{2\pi}M(\eta,\theta)\frac{d\Phi^*}{d\eta}d\eta$$

$$K_0(\eta,\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\eta\sin n\theta}{\nu_n{}^*},\quad M(\eta,\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\sin n\theta}{\nu_n^{**}}$$

$$\nu_n''=n\frac{r_0^{-n}+r_0{}^n}{r_0^{-n}-r_0{}^n},\quad \nu_n^{**}=n(r_0{}^n+r_0^{-n}),\quad \nu_n'\nu_n''=n^2$$

Здесь $\tau^*(\theta)=\tau(r_0,\theta)$, $\Phi^*(\theta)=\Phi(r_0,\theta)$

В силу симметрии линии дна для этих функций справедливы разложения (1.10), но с другими A_n и B_n $(n=1,2,3,\ldots)$.

Переходя к граничному условию на поверхности, берем для нее интеграл Бернулли

(1.12) $$p/\rho=C-gy-{}^1/_2q^2$$

где C — константа, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность. На свободной поверхности разность давлений уравновешивается нормальной составляющей сил поверхностного натяжения. Для этих сил по закону Лапласа имеем

(1.13) $$p-p_0=\pm\mu/R$$

Здесь p — давление со стороны жидкости, $p_0=p_0'+p_0(x)$ — давление со стороны свободной поверхности, μ — капиллярная постоянная, R — радиус кривизны в точках поверхности. Отсюда, выражая кривизну через $d\Phi/d\theta$, получим

(1.14) $$p-p_0=\frac{2\pi\mu}{\lambda c}q\frac{d\Phi}{d\theta}$$

Подставив p из (1.14) в (1.12), находим

(1.15) $$\frac{d\Phi}{d\theta}=\nu\left[\delta e^{-\tau}-e^{\tau}-\frac{2\pi}{\lambda}\varkappa ye^{-\tau}-p_0{}^*(x)e^{-\tau}\right]$$

(1.16) $$\nu=\frac{\lambda c^2\rho}{4\pi\mu},\quad \delta=\frac{2(C\rho-p_0')}{\rho c^2},\quad \varkappa=\frac{g\lambda}{\pi c^2},\quad p_0{}^*(x)=\frac{2p_0(x)}{\rho c^2}$$

Здесь x и y как функции θ определяются формулами (1.9). Выделив в правой части (1.15) слагаемые, линейные относительно Φ и τ, получаем

(1.17) $$\frac{d\Phi}{d\theta}=\nu\Big\{\delta-1-(\delta+1)\tau+\varkappa\int_0^{\theta}\Phi(\eta)\,d\eta-$$
$$-S(\theta)(1-\tau)+F[\tau,\Phi,S,\delta]\Big\}$$

$$F[\tau,\Phi,S,\delta]=\delta(e^{-\tau}-1+\tau)-(e^{\tau}-1-\tau)+$$
$$+\varkappa e^{-\tau}\int_0^{\theta}[e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta)-\Phi(\eta)]\,d\eta-$$
$$-\varkappa\int_0^{\theta}\Phi(\eta)\,d\eta+\varkappa e^{-\tau}\int_0^{\theta}\Phi(\eta)\,d\eta-S(\theta)(e^{-\tau}-1+\tau)$$

Здесь предполагается, что с точностью до константы, включенной в p_0'

$$p_0^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n d_n \cos \frac{2\pi n}{\lambda} x = S(\theta) \tag{1.18}$$

где ε — тот же малый параметр, что и в (1.3); d_n — заданные действительные числа, причем ряд $\Sigma \varepsilon^n d_n$ сходится в круге радиуса $\varepsilon_0 > 0$ (см. (1.3)). Для получения $S(\theta)$ следует в (1.18) подставить значения x / λ, найденные из уравнения

$$\frac{x}{\lambda} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\theta e^{-\tau(\eta)} \cos \Phi(\eta)\, d\eta \tag{1.19}$$

которое вытекает из (1.9). Выражение для y учтено в (1.17).

Уточним значения параметров в уравнении (1.17). Из (1.6) и (1.16) следует, что

$$\nu = \nu^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \nu^{(n)} \varepsilon^n, \quad \nu^{(0)} = \frac{c^2 \rho \lambda_0}{4\pi\mu}, \quad \nu^{(n)} = \frac{\nu^{(0)}}{\lambda_0} \lambda_n \tag{1.20}$$

$$\varkappa = \varkappa_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_n \varepsilon^n, \quad \varkappa_0 = \frac{g\lambda_0}{\pi c^2}, \quad \varkappa_n = \frac{\varkappa_0}{\lambda_0} \lambda_n$$

В силу (1.20) уравнение (1.17) принимает вид

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = \nu^{(0)} \Big\{ \delta - 1 - (\delta + 1)\tau + \varkappa_0 \int_0^\theta \Phi(\eta)\, d\eta + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \varkappa_n \int_0^\theta \Phi(\eta) d\eta - \tag{1.21}$$

$$- S(\theta)(1 - \tau) + F[\tau, \Phi, S, \delta] \Big\} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \nu^{(n)} \Big\{ \ldots \Big\}$$

Здесь опущенное выражение во второй фигурной скобке должно быть таким же, как и в первой. Линейные относительно τ, Φ и ε слагаемые в фигурных скобках (1.21) преобразуем, применяя формулы (1.11) и интегрирование по частям. Затем в первой фигурной скобке объединяем слагаемые (с коэффициентами 2 и $-\varkappa_0$) с одинаковой подынтегральной функцией $d\Phi / d\eta$ и с разными ядрами $K(\eta, \theta)$ и $K_2(\eta, \theta)$ из (1.23). Скорость c считается заданной; поэтому параметры $\nu^{(0)}$ и $\varkappa_0$ фиксированы, а δ определяется из условия периодичности: $\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta)$.

В правую часть уравнения (1.21) входит параметр ε, поэтому решение и, следовательно, δ будут зависеть от ε. Положим

$$\delta = \delta_0 + \delta'(\varepsilon) \tag{1.22}$$

Из условия периодичности при $\varepsilon \to 0$ найдем, что $\delta_0 = 1$, так как при этом решение и величина $\delta'(\varepsilon)$ стремятся к нулю.

После всех преобразований с учетом (1.22) уравнение (1.21) принимает окончательный вид (многоточие во второй фигурной скобке заменяет шесть последних членов, таких же как и в первой фигурной скобке)

$$
\begin{aligned}
(1.23)\qquad \zeta(\theta) = \nu^{(0)}\Big\{&\int_0^{2\pi} K^*(\eta,\theta)\zeta(\eta)\,d\eta + \delta'(\varepsilon) - \\
&- 2(2+\delta'(\varepsilon))\int_0^{2\pi} N(\eta,\theta)\zeta^*(\eta)\,d\eta + (2+\delta'(\varepsilon))A_0(\varepsilon) + \\
&+ \delta'(\varepsilon)\int_0^{2\pi} K(\eta,\theta)\zeta(\eta)\,d\eta + \varkappa_0\int_0^{2\pi} K_2(\eta,0)\zeta(\eta)\,d\eta + \Psi(\theta,\varepsilon)\Big\} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\nu^{(n)}\varepsilon^n\Big\{2\int_0^{2\pi} K(\eta,\theta)\zeta(\eta)\,d\eta - \varkappa_0\int_0^{2\pi} K_2(\eta,\theta)\zeta(\eta)\,d\eta + \ldots\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\zeta(\theta) = d\Phi \,/\, d\theta, \qquad \zeta^*(\theta) = d\Phi^* \,/\, d\theta
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi(\theta,\varepsilon) = &\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa_n\varepsilon^n\int_0^{\theta}\Phi(\eta)\,d\eta - S(\theta)\Big[1 + A_0 + \int_0^{2\pi} K(\eta,\theta)\zeta(\eta)\,d\eta - \\
&- 2\int_0^{2\pi} N(\eta,\theta)\zeta^*(\eta)\,d\eta\Big] + F[\tau,\Phi,S,1+\delta'(\varepsilon)]
\end{aligned}
$$

$$
K_2(\eta,\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\cos n\theta}{n^2}, \qquad K^*(\eta,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(\eta)\varphi_n(\theta)}{\nu_n}
$$

$$
\nu_n = \frac{n^2}{2\nu_n'' - \varkappa_0}, \qquad \varphi_n(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}}
$$

где ν_n — собственные значения, $\varphi_n(\theta)$ — собственные функции ядра $K^*(\eta,\theta)$.

Условие периодичности для функции $\Phi(\theta)$ дает соотношение

$$
\begin{aligned}
(1.24)\qquad \delta'(\varepsilon) = &-\varkappa_0\int_0^{2\pi} K_2(\eta,0)\zeta(\eta)\,d\eta - (2+\delta'(\varepsilon))A_0 - \\
&- \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta,\varepsilon)\,d\theta - \frac{1}{2\pi\nu^{(0)}}\sum_{n=1}^{\infty}\nu^{(n)}\varepsilon^n\Big\{\Big[\delta'(\varepsilon) + (2+\delta'(\varepsilon))A_0 + \\
&+ \varkappa_0\int_0^{2\pi} K_2(\eta,0)\zeta(\eta)\,d\eta\Big]2\pi + \int_0^{2\pi}\Psi(\theta,\varepsilon)\,d\theta\Big\}
\end{aligned}
$$

Обратимся к граничному условию на дне при $r = r_0$. Очевидно, должно выполняться условие обтекания дна. В силу (1.3) это условие принимает вид

$$
(1.25)\qquad \Phi^*(\theta) = \Theta\,[s(\theta)] = \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\beta_n\sin\frac{n\pi s(\theta)}{l}
$$

Для представления этого условия в окончательной форме надо найти функцию $s(\theta)$.

Напомним, что при $r = r_0$

$$
dz = -\frac{\lambda}{2\pi}e^{-\tau^*(\theta)+i\Phi^*(\theta)}\,d\theta
$$

Отсюда

(1.26) $$ds = |dz| = -\frac{\lambda}{2\pi} e^{-\tau^*(\theta)}\, d\theta$$

В этой формуле приписан знак минус, чтобы отрицательным приращениям θ отвечали положительные приращения дуг s.

Из (1.26) имеем

(1.27) $$s(\theta) = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau^*(\eta)}\, d\eta$$

Коэффициент $A_0(\varepsilon)$ определяем так, чтобы длина дуги линии дна, отвечающая периоду, равнялась заданной величине $2l$. Согласно (1.27), это требование выражается формулой

$$2l = -\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{-2\pi} e^{-\tau^*(\eta)}\, d\eta$$

или

(1.28) $$2le^{-A_0(\varepsilon)} = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\tau^*(-\eta)-A_0(\varepsilon)}\, d\eta$$

при этом $-\tau^*(-\eta) - A_0(\varepsilon)$, в силу (1.10) для τ^*, и Φ^* не содержит $A_0(\varepsilon)$.

Заметим, что для $A_0(\varepsilon)$ можно получить и другое уравнение, выражающее условие равенства длин волн на линии дна длинам волн на поверхности жидкости. Опираясь на формулу из (1.11), выражающую связь между ν_n^{*2} и $\nu_n'^2$, можно было бы показать, что это условие, вытекающее из (1.23), эквивалентно (1.28).

Из (1.28) вытекает, что разложение $s(\theta)$ по степеням ε имеет единственный вековой член, и следовательно

(1.29) $$s(\theta) = -\frac{l}{\pi}\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n s_n(\theta) = -\frac{l}{\pi}\theta + s'(\theta)$$

Дифференцируя (1.25) по θ и учитывая (1.27), представляем граничное условие на дне в виде

(1.30) $$\zeta^*(\theta) = -\frac{d\Theta(s)}{ds}\frac{\lambda}{2\pi} e^{-\tau^*(\theta)}$$

Применяя разложение (1.29), можно было бы (1.30) написать в той форме, как оно дано в [2].

Функция $\tau^*(\theta)$ в уравнениях (1.27), (1.28) и (1.30) определяется по формуле

(1.31) $$-\tau^*(\theta) - A_0 = -\int_0^{2\pi} K(\eta, \theta)\frac{d\Phi^*}{d\eta}\, d\eta + 2\int_0^{2\pi} N(\eta, \theta)\frac{d\Phi}{d\eta}\, d\eta$$

Эта формула выводится аналогично первой из формул (1.11).

Таким образом, задача сводится к определению функций

$$\zeta(\theta, \varepsilon) = d\Phi / d\theta, \quad \zeta^*(\theta, \varepsilon) = d\Phi^* / d\theta, \quad x(\theta, \varepsilon) / \lambda, \quad s(\theta, \varepsilon)$$

и констант $\delta = 1 + \delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$ из системы уравнений (1.19), (1.23), (1.24), (1.27), (1.28), (1.30). При этом $\tau(\theta, \varepsilon)$ и $\tau^*(\theta, \varepsilon)$ найдутся из (1.11) и (1.31), а

$$\Phi(\theta, \varepsilon) = \int_0^\theta \zeta(\eta, \varepsilon)\, d\eta, \quad \Phi^*(\theta, \varepsilon) = \int_0^\theta \zeta^*(\eta, \varepsilon)\, d\eta \tag{1.32}$$

Если в этой системе исключить $\tau(\theta)$, $\tau^*(\theta)$, $x(\theta)/\lambda$, $s(\theta)$ и $A_0(\varepsilon)$ с помощью формул (1.11) (1.19), (1.27), (1.28) и (1.31), а $\Phi(\theta, \varepsilon)$ и $\Phi^*(\theta, \varepsilon)$ представить в виде (1.32), то уравнения (1.23) и (1.30) будут нелинейными интегральными относительно $\zeta(\theta, \varepsilon)$ и $\zeta^*(\theta, \varepsilon)$, а уравнение (1.24) будет трансцендентным относительно $\delta'(\varepsilon)$ с функционалами относительно искомых функций. Однако для решения удобнее этого исключения не производить, а рассматривать как нелинейное интегральное только уравнение (1.23) относительно $\zeta(\theta, \varepsilon)$; остальные, так же и (1.23), считать нелинейными трансцендентными уравнениями относительно функций $\zeta^*(\theta, \varepsilon)$, $x(\theta, \varepsilon)/\lambda$, $s(\theta, \varepsilon)$ и констант $\delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$ с линейными операторами и функционалами относительно искомых функций.

При решении приходится рассматривать два случая: 1) $\nu^{(0)} \neq \nu_n$, 2) $\nu^{(0)} = \nu_n$.

В первом случае решение строится в виде рядов по целым степеням параметра ε. Во втором случае решение получается в рядах по степеням $\varepsilon^{1/3}$. В обоих случаях для коэффициентов разложения $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получаются линейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода с ядром $K^*(\eta, \theta)$ и параметром $\nu^{(0)}$. Для коэффициентов разложений остальных искомых величин получается всегда разрешимая система линейных алгебраических уравнений.

В п. 2 проводится исследование уравнений для первых коэффициентов этих разложений при $\nu^{(0)} = \nu_n$ и при $\nu^{(0)} \neq \nu_n$.

Отметим механический смысл предельного решения при $\varepsilon \to 0$. Как и в [2], можно показать, что в пределе течение переходит в равномерный поток над горизонтальным дном с горизонтальной свободной поверхностью.

2. Решение линейной задачи. 2.1. *Решение линейной задачи при $\nu^{(0)} = \nu_n$ и исследование ядра интегрального уравнения (1.23).* Строя решения уравнений (1.23) и (1.24) в форме рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$, получаем

$$\zeta_1(\theta) = \nu^{(0)}\left[\int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta)\zeta_1(\eta)\, d\eta + \delta_1 + 2A_{01} + \right.$$
$$\left. + \varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\zeta_1(\eta)\, d\eta\right] \tag{2.1}$$

$$\delta_1 = -\varkappa_0 \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0)\zeta_1(\eta)\, d\eta - 2A_{01} \tag{2.2}$$

К такой же системе придем, если считать $\zeta^*(\theta) \equiv 0$ и $S(\theta) \equiv 0$ в (1.23) и (1.24) как для свободной волны при плоском дне и ограничиться линейными слагаемыми.

Исключив δ_1 из (2.2) и (2.1) и отбросив индекс, получим

$$\zeta(\theta) = \nu^{(0)} \int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta)\zeta(\eta)\, d\eta \tag{2.3}$$

Это уравнение является линейным однородным уравнением Фредгольма второго рода, поэтому по второй теореме Фредгольма оно имеет отличное от нуля решение при $\nu^{(0)} = \nu_n$, где ν_n — собственное значение ядра $K^*(\eta, \theta)$. С другой стороны, в силу (1.16), параметр $\nu^{(0)} > 0$, а ν_n, согласно (1.23), зависит от n и $\varkappa_0$. Параметр $\varkappa_0$ считается фиксированным. Поэтому надо исследовать зависимость ν_n от n при фиксированном $\varkappa_0$.

Такое исследование подробно проведено в работе [6].

Будем теперь считать n фиксированным и исследуем связь между $\nu^{(0}$ и $\varkappa_0$, при которой имеется отличное от нуля решение уравнения (2.3). Положив $\nu^{(0)} = \nu_n$, имеем из (1.23)

$$\frac{1}{\nu^{(0)}} = \frac{1}{n^2}(2\nu_n'' - \varkappa_0) \tag{2.4}$$

Подставив сюда значения $\nu^{(0)}$ и $\varkappa_0$ из (1.16), получаем известную зависимость между c^2 и λ_0

$$c^2 = \left(\frac{2\pi\mu n}{\lambda_0\rho} + \frac{g\lambda_0}{2\pi n}\right) \operatorname{th}\left(2\pi n \frac{h}{\lambda_0}\right) \tag{2.5}$$

Соотношения (2.4) и (2.5) также подробно исследованы в работе [6].

Здесь приводим только некоторые результаты исследования решения линейной задачи.

Теорема 2.1. Пусть

$$\frac{1}{\nu^{(0)}} = \frac{1}{n^2}(2\nu_n'' - \varkappa_0)$$

где n — фиксированное целое положительное число. Тогда при всех $\varkappa_0$ в интервале $0 < \varkappa_0 < 2\nu_n''$ уравнение (2.3) имеет нетривиальное решение

$$\zeta(\theta) = C_1\varphi_n(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}}\cos n\theta$$

Если

$$\varkappa_0 = \varkappa_0^{(m)} = \frac{2(m^2\nu_n'' - n^2\nu_m'')}{m^2 - n^2}$$

(m — целое положительное число), то частным и линейно независимым от $\varphi_n(\theta)$ решением будет также

$$\zeta(\theta) = C_2\varphi_m(\theta) = \frac{C_2}{\sqrt{\pi}}\cos m\theta$$

и общим решением будет

$$\zeta(\theta) = C_1\varphi_n(\theta) + C_2\varphi_m(\theta) = \frac{C_1}{\sqrt{\pi}}\cos n\theta + \frac{C_2}{\sqrt{\pi}}\cos m\theta$$

Значение $\varkappa_0 = \varkappa_0^{(m)}$ назовем бифуркационным, а волны, отвечающие значениям $\varkappa_0 = \varkappa_0^{(m)}$ и определяемые решением в виде суммы из двух гармоник,— двойными. Соответствующее собственное значение $\nu_n = \nu_m$ является при $\varkappa_0 = \varkappa_0^{(m)}$ двукратным.

Теорема 2.2. Кривая $c^2 = c^2(\lambda_0)$, изображающая уравнение (2.5), имеет вертикальную асимптоту $\lambda_0 = 0$ и горизонтальную $c^2 = gh$. В первом квадранте находится значение $c^2_{\min}$, отвечающее $\lambda_0 = \lambda_0^*$, где λ_0^* — положительный корень некоторого трансцендентного уравнения. Назвав соответствующее $\varkappa_0 = \varkappa_0{}^*$ критическим, из (1.16) имеем

$$\varkappa_0{}^* = \frac{g\lambda_0{}^*}{\pi c_{\min}^2}$$

Ветвь кривой $c^2 = c^2(\lambda_0)$, отвечающая $0 < \lambda_0 < \lambda_0{}^*$ или $0 < \varkappa_0 < \varkappa_0{}^*$, соответствует волнам, названным капиллярно-гравитационными. При $\lambda_0 > \lambda_0{}^*$ или $\varkappa_0{}^* < \varkappa_0 < 2\nu_n{}''$ имеют место волны, названные гравитационно-капиллярными.

2.2. О решении линейной задачи в случае $\nu^{(0)} \neq \nu_n$. Для исследования в линейном приближении возможных форм свободной поверхности в зависимости от скорости распространения волны предположим линию дна заданной в виде

$$\Theta(s) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\frac{n\pi s}{l} \tag{2.6}$$

Тогда

$$\zeta^*(\theta, \varepsilon) = \varepsilon\zeta_1{}^*(\theta) = -\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \cos i\theta \tag{2.7}$$

Функция $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получается в результате решения соответствующего линейного неоднородного интегрального уравнения при $\nu^{(0)} \neq \nu_n$ и имеет вид

$$\zeta(\theta, \varepsilon) = \varepsilon\nu^{(0)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i}{(\nu_i - \nu^{(0)})}\left(\frac{4\beta_i}{\nu_i{}^*} - d_i\right)\cos i\theta \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8), интегрируя, находим

$$\Phi^*(\theta, \varepsilon) = -\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta_i}{i} \sin i\theta \tag{2.9}$$

$$\Phi(\theta, \varepsilon) = \varepsilon\nu^{(0)} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i}{i(\nu_i - \nu^{(0)})}\left(\frac{4\beta_i}{\nu_i{}^*} - d_i\right)\sin i\theta \tag{2.10}$$

Обозначим через c_i скорость волны, определяемую формулой (2.5) при $i = n$. Тогда можно показать, что

$$\begin{aligned} &\nu_i - \nu^{(0)} > 0 \text{ при } c < c_i \\ &\nu_i - \nu^{(0)} < 0 \text{ при } c > c_i \end{aligned} \tag{2.11}$$

При доказательстве учтено условие

$$c^2 > \frac{g\lambda_0}{2\pi n} \operatorname{th}(2\pi n\psi_0 / \varphi_0) \tag{2.12}$$

вытекающее из положительности ν_n.

Так как $\nu^{(0)} > 0$ и $\nu_i > 0$, то знаки коэффициентов в формуле (2.10) определяются знаками

$$\frac{1}{\nu_i - \nu^{(0)}}\left(\frac{4\beta_i}{\nu_i{}^*} - d_i\right)$$

Пусть $(4\beta_i/\nu_i^* - d_i) > 0$ и $\beta_i > 0$. Тогда из (2.11) следует, что коэффициенты у соответствующих слагаемых в (2.9) и (2.10) будут иметь разные знаки при $c < c_i$ и одинаковые при $c > c_i$.

Применяя неравенства (2.11) к анализу выражений (2.9) и (2.10), приходим к следующему результату.

Пусть для скорости c выполняется неравенство $c_{2n-1} < c < c_{2n}$. Тогда при значениях c, близких к c_{2n-1}, главный член разложения (2.10) будет иметь знак минус. Если же c близко к c_{2n}, то главный член в (2.10) будет положительным. В первом случае над гребнями и впадинами линии дна расположены соответственно гребни и впадины свободной поверхности. Во втором случае, наоборот, над гребнями и впадинами линии дна будут лежать соответственно впадины и гребни волны на поверхности; в следующем интервале $c_{2n} < c < c_{2n+1}$ взаимное расположение гребней и впадин линии дна и профиля волны будет аналогичным. При этом исследовании предполагается, что все $\beta_i > 0$ и главным слагаемым, определяющим форму линии дна, является первое слагаемое в формуле (2.9).

Относительно исследования решения линейной задачи при $\nu^{(0)} \neq \nu_n$ и линии дна в виде ряда (1.3) см. п. 4, замечание 4.3 (см. также [1], стр. 380).

3. Решение основных уравнений задачи. Как уже отмечено в конце п. 1, при решении системы уравнений (1.19), (1.23), (1.24), (1.27), (1.28) и (1.30) приходится рассматривать два случая: $\nu^{(0)} \neq \nu_n$ и $\nu^{(0)} = \nu_n$. В обоих случаях укажем метод построения решения. В первом случае приведем результат определения первых трех приближений. Во втором случае в качестве примера подробно рассмотрено значение $\nu^{(0)} = \nu_1$. При этом параметр $\varkappa_0$ выбран так, чтобы собственное значение ν_1 было простым и положительным. До конца рассчитаны первые два приближения. Третье приближение определено не полностью. В случае $\nu^{(0)} = \nu_n = \nu_m$ $(n \neq m)$ укажем только метод построения решения.

3.1. Случай $\nu^{(0)} \neq \nu_n$. Как уже отмечено, в этом случае решение строится в рядах по целым степеням параметра ε. Для каждого коэффициента разложения функции $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получается линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K^*(\eta, \theta)$ и параметром $\nu^{(0)}$. Все эти уравнения последовательно решаются по первой теореме Фредгольма. Для коэффициентов разложения остальных искомых величин получается система линейных алгебраических уравнений. Из этой, всегда разрешимой системы, коэффициенты данного приближения явно выражаются через величины, найденные в предшествующих приближениях.

Приводим выражения $\zeta^*(\theta, \varepsilon)$, $\zeta(\theta, \varepsilon)$, $\delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$, определенные по первым трем приближениям

$$\zeta^*(\theta, \varepsilon) = -\varepsilon\beta_1 \cos\theta - \varepsilon^2 D_{22} \cos 2\theta - \varepsilon^3 (D_{13}\cos\theta + D_{33}\cos 3\theta) \tag{3.1}$$

$$\zeta(\theta, \varepsilon) = \varepsilon C_{11} \cos\theta + \varepsilon^2 C_{22} \cos 2\theta + \varepsilon^3 (C_{13}\cos\theta + C_{33}\cos 3\theta)$$

$$\delta'(\varepsilon) = -\varepsilon\varkappa_0 C_{11} - \varepsilon^2(^1/_4\varkappa_0 C_{22} + 2A_{02} + {}^1/_4\varkappa_0 C_{11}E_{11}) + \varepsilon^3\delta_3'$$

$$A_0(\varepsilon) = \varepsilon^2 A_{02} = -\frac{1}{4}\varepsilon^2\left[\left(\frac{\beta_1}{\nu_1'} + \frac{2}{\nu_1^*}C_{11}\right) - \beta_1^2\right]$$

где

$$C_{11} = \frac{\nu^{(0)}\nu_1}{\nu_1 - \nu^{(0)}}\left(\frac{4\beta_1}{\nu_1^*} - d_1\right) \tag{3.2}$$

$$C_{22} = \frac{\nu^{(0)}\nu_2}{\nu_2 - \nu^{(0)}}\left[\frac{4}{\nu_2^*}D_{22} + \left(d_1 + \frac{3}{4}\varkappa_0 C_{11}\right)E_{11} - d_2\right]$$

$$D_{22} = \beta_1\left(\frac{\beta_1}{\nu_1'} + \frac{2C_{11}}{\nu_1^*}\right) + 2\beta_2, \quad E_{11} = -\left(\frac{1}{\nu_1'}C_{11} + \frac{2\beta_1}{\nu_1^*}\right)$$

$$E_{22}' = -\left(\frac{1}{\nu_2'}C_{22} + \frac{2}{\nu_2^*}D_{22}\right), \quad C_{13} = \frac{\nu^{(0)}\nu_1}{\nu_1 - \nu^{(0)}}C_{13}^*, \quad C_{33} = \frac{\nu^{(0)}\nu_3}{\nu_3 - \nu^{(0)}}C_{33}^*$$

Здесь C_{13}^* — линейная функция от C_{11}^3, $C_{11}^2\beta_1$, $C_{11}\beta_1^2$, $C_{11}C_{22}$, $C_{22}\beta_1$, β_1^3, $C_{11}\beta_2$, $\beta_1\beta_2$, $C_{11}d_2$, $C_{11}d_1\beta_1$, $C_{11}^2d_1$, d_1C_{22}, $\beta_1 d_2$, $\beta_1^2 d_1$; D_{13} не зависит явно от d_1 и d_2 и является линейной функцией от тех же произведений из коэффициентов C_{11}, C_{22}, β_1 и β_2, как и C_{13}^*, кроме C_{11}^3; C_{33}^* — линейная функция от тех же аргументов, что и C_{13}^* и еще от β_3 и d_3; D_{33} не зависит явно от d_1, d_2 и d_3 и является линейной функцией от β_3 и от тех же произведений из коэффициентов C_{11}, C_{22}, β_1, β_2, что и C_{33}^*, кроме C_{11}^3; δ_3' — линейная функция от C_{13}, C_{33}, C_{11}^3, $C_{11}^2\beta_1$, $\beta_1^2C_{11}$, $C_{11}E_{11}^2$, $C_{11}E_{22}$, $E_{11}C_{22}$.

3.2. Случай $\nu^{(0)} = \nu_1$. В этом случае при построении решения в виде ряда по степеням $\varepsilon^{1/3}$ для первого коэффициента разложения $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получается линейное однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода при значении $\nu^{(0)} = \nu_1$, которое решается по второй теореме Фредгольма. Уравнения для всех последующих коэффициентов будут такими же, но неоднородными, и при том же значении параметра $\nu^{(0)} = \nu_1$. Эти уравнения решаются по третьей теореме Фредгольма. Из условия разрешимости уравнения для $(n + 2)$-го приближения определяется коэффициент в решении однородного уравнения n-го приближения.

Каждый из коэффициентов C_{11}, C_{12} и C_{13} последовательно определяется из соответствующего условия разрешимости уравнения для третьего, четвертого и пятого приближения. Коэффициент C_{13} не вычислен, так как пятое приближение не определялось. Коэффициенты разложений остальных искомых величин определяются аналогично случаю $\nu^{(0)} \neq \nu_n$.

Приводим выражения для $\zeta(\theta, \varepsilon)$, $\zeta^*(\theta, \varepsilon)$, $\delta'(\varepsilon)$ и $A_0(\varepsilon)$, найденные по первым трем приближениям

$$\zeta^*(\theta,\varepsilon) = -\varepsilon\beta_1\cos\theta \tag{3.3}$$

$$\zeta(\theta,\varepsilon) = \varepsilon^{1/3}C_{11}\cos\theta + \varepsilon^{2/3}C_{22}\cos 2\theta + \varepsilon(C_{13}\cos\theta + C_{33}\cos 3\theta)$$

$$\delta'(\varepsilon) = -\varepsilon^{1/3}\varkappa_0 C_{11} + \varepsilon^{2/3}\left[C_{11}^2\left(\frac{2}{\nu_1^{*2}} + \frac{\varkappa_0}{4\nu_1'}\right) - \frac{1}{4}\varkappa_0 C_{22}\right] + \varepsilon\delta_3'$$

$$A_0(\varepsilon) = -\frac{1}{4}\varepsilon^{2/3}\left(\frac{1}{\nu_1'^2} - 1\right)C_{11}^2$$

где

(3.4)
$$C_{11} = \left(d_1 - \frac{4\beta_1}{\nu_1^*}\right)^{1/3} \alpha^{1/3}$$

$$\alpha = \frac{32\nu_1'^3(\nu_2 - \nu_1)}{(\nu_2 - \nu_1)\,[8\,(3 - 2\nu_1'^2) + 12\varkappa_0\nu_1'\,(1 - \nu_1'^2)] + 9\varkappa_0^2\nu_1\nu_2\nu_1'}$$

$$C_{22} = -\frac{3}{4}\,\frac{\nu_1\nu_2\varkappa_0}{\nu_1'\,(\nu_2 - \nu_1)}\,C_{11}^2, \quad C_{33} = \frac{\nu_1\nu_3}{\nu_3 - \nu_1}\,C_{33}^*$$

Здесь C_{33}^* — линейная функция от C_{11}^3 и $C_{11}C_{22}$; δ_3' — линейная функция от C_{13}, C_{33}, C_{11}^3 и $C_{11}C_{22}$; коэффициент $C_{12} = 0$.

Напомним, что в обоих случаях $\tau\,(\theta,\,\varepsilon)$ и $\tau^*\,(\theta,\,\varepsilon)$ найдутся из (1.11) и (1.31), а $\Phi\,(\theta,\,\varepsilon)$ и $\Phi^*\,(\theta,\,\varepsilon)$ — из (1.32).

3.3. Случай $\nu^{(0)} = \nu_n = \nu_m\ (n \neq m)$. В этом случае решение строится аналогично случаю $\nu^{(0)} = \nu_n$. Отличие состоит в том, что решение однородного интегрального уравнения в каждом i-м приближении будет содержать сумму $C_{in}\cos n\theta + C_{im}\cos m\theta$. Коэффициенты C_{in} и C_{im} в общем случае определятся из условия разрешимости уравнения для $(i+2)$-го приближения.

4. Определение профиля волны. Профиль волны в параметрической форме $x\,(\theta,\,\varepsilon)$ и $y\,(\theta,\,\varepsilon)$ определяется из соотношений (1.9). Перейдем к безразмерным координатам $x\,/\,\lambda$ и $y\,/\,\lambda$, не меняя обозначений, и после подстановки найденных $\Phi\,(\theta,\varepsilon)$ и $\tau\,(\theta,\,\varepsilon)$ получим параметрические уравнения профиля. Исключая из этих уравнений θ, найдем уравнение профиля волны в форме $y = y\,(x,\,\varepsilon)$.

Приводим приближенное с точностью до членов третьего порядка уравнения профиля волны в обоих случаях, положив $2\pi = k$.

В случае $\nu^{(0)} \neq \nu_n$

(4.1)
$$y\,(x,\,\varepsilon) = \frac{1}{k}\Big\{\varepsilon C_{11}(\cos kx - 1) + \frac{1}{4}\varepsilon^2(C_{22} - E_{11}C_{11})(\cos 2kx - 1) + \frac{1}{6}\varepsilon^3\Big[6C_{13} + \frac{3}{8\nu_1'^2}(3\nu_1'^2 - 4)\,C_{11}^3 - 6\,\frac{\beta_1}{\nu_1'\nu_1^*}\,C_{11}\Big(C_{11} - \frac{\beta_1}{\nu_1'\nu_1^*}\Big) + \frac{3}{8}C_{11}E_{11}^2 - \frac{3}{2}C_{11}E_{22} + 3C_{22}E_{11}\Big](\cos kx - 1) + \frac{1}{6}\varepsilon^3\Big[\frac{2}{3}C_{33} - \frac{7}{24}C_{11}^3 + \frac{5}{8}C_{11}E_{11}^2 - \frac{1}{2}C_{11}E_{22} - C_{22}E_{11}\Big](\cos 3kx - 1)$$

Здесь коэффициенты C_{ij} и E_{ij} выражаются формулами (3.2).

В случае $\nu^{(0)} = \nu_1$ выражение для $y\,(x,\,\varepsilon)$ получается из (4.1), если в нем ε заменить на $\varepsilon^{1/3}$, а в E_{11}, E_{22} и D_{22} положить $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $d_1 = d_2 = 0$.

В рассматриваемом случае коэффициенты C_{ij} определяются формулами (3.4).

Замечание 4.1. При определении $y\,(x,\,\varepsilon)$ начало координат перенесено в точку пересечения оси Oy с профилем волны. Поэтому из анализа главного члена в (4.1), полагая $\nu_1 < \nu^{(0)} < \nu_2$, заключаем, что над гребнем линии дна может быть как гребень, так и впадина волны на поверхности, в зависимости от знака C_{11}. Согласно (3.2), этот знак определяется соотношением между коэффициентами β_1 и d_1.

Замечание 4.2. Если $\nu^{(0)} = \nu_n$ — собственному значению ядра интегрального уравнения, то это и будет тот особый случай, который отмечен в начале статьи. Действительно, при $\nu^{(0)} = \nu_n$ из формул (1.16) и (1.23) имеем выражение (2.5), связывающее в линейном приближении c и λ_0 в указанном особом случае.

Замечание 4.3. В случае $\nu^{(0)} \neq \nu_1$ и линии дна в виде ряда (1.3) исследование решения линейной задачи проводится аналогично п. 2, 2.2 и соответствует значению $n =$

$= 1$. Для учета последующих гармоник следует в первом члене ряда (1.3) к первой гармонике добавить сумму n гармоник порядка i ($i = 2, 3, \ldots, n$).

Если считать, что решение линейной задачи определяет главные слагаемые полного решения, то результат исследования п. 2, 2.2, можно применить и к решению нелинейной задачи.

5. Существование и единственность решения задачи. Применяя методы Ляпунова — Шмидта и их развитие [7], устанавливаем следующие теоремы.

Теорема 5.1. Система уравнений (1.19), (1.23), (1.24), (1.27), (1.28) и (1.30) при $\nu^{(0)} \neq \nu_n$ имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) решение $\zeta^*(\theta, \varepsilon)$, $\zeta(\theta, \varepsilon)$, $x(\theta, \varepsilon) / \lambda$, $s(\theta, \varepsilon)$, $A_0(\varepsilon)$, $\delta'(\varepsilon)$ ($\delta'(\varepsilon) = \delta(\varepsilon) - 1$), и это решение является аналитической функцией ε при малых $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Теорема 5.2. Система уравнений (1.19), (1.23), (1.24), (1.27), (1.28) и (1.30) при $\nu^{(0)} = \nu_1$, где ν_1 — простое и положительное собственное значение, имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$) решение $\zeta^*(\theta, \varepsilon)$, $\zeta(\theta, \varepsilon)$, $x(\theta, \varepsilon) / \lambda$, $s(\theta, \varepsilon)$, $A_0(\varepsilon)$, $\delta'(\varepsilon)$, и это решение представимо в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$, сходящихся при малых $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Доказательства этих теорем проводятся аналогично тому, как это выполнено в работах [8,9].

Из этих теорем вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов для $\Phi(\theta, \varepsilon)$, $\tau(\theta, \varepsilon)$, $\Phi^*(\theta,\varepsilon)$ и $\tau^*(\theta, \varepsilon)$. Сходимость рядов по степеням ε и $\varepsilon^{1/3}$ (при $\nu^{(0)} = \nu_1$) для подынтегральных функций в (1.9) вытекает из общих теорем анализа о подстановке ряда в ряд. На основании общих теорем анализа устанавливается сходимость рядов, приближенные суммы которых выражаются формулами (4.1) и (4.2).

Поступила 12 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Секерж-Зенькович Я. И.* К теории установившихся капиллярно-гравитационных волн конечной амплитуды на поверхности жидкости над волнистым дном. В сб.: Приложения теории функций в механике сплошной среды (Тр. Междунар. симпоз., Тбилиси, 1963), т. 2. М., «Наука», 1965.
2. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об установившихся капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды на поверхности жидкости над волнистым дном. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
3. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об установившихся капиллярно-гравитационных волнах конечной амплитуды на поверхности потока жидкости с волнистым дном. В сб. аннот. XIII Междунар. конгресс по теоретической и прикладной механике. М., «Наука», 1972, стр. 97—98.
4. *Zeidler Eberhard.* Beiträge zur Theorie und Praxis freier Randwertaufgaben Funktionalanalytische Untersuchungen über eine Klasse nichtlinearer hydrodynamischer Probleme. Schriftenr. Inst. Math. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, 1971, ANo 9, XII, S. 222, ill.
5. *Villat M. H.* Sur l'écoulement des fluides. Ann. Ec. Norm. Sup., t. 32, 1915.
6. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об установившихся капиллярно-гравитационных вынужденных волнах конечной амплитуды на поверхности жидкости конечной глубины. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
7. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 2.
8. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об одном виде установившихся волн конечной амплитуды. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
9. *Секерж-Зенькович Я. И.* Об одном виде установившихся волн. В кн.: М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М., «Наука», 1969.