Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 534

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА К ЗАДАЧЕ ОТЫСКАНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ

В. В. Стрыгин

(Куйбышев)

Для отыскания автоколебаний предлагается использовать метод Бубнова — Галеркина. Устанавливается существование и сходимость приближений. В основном случае получена асимптотика скорости сходимости.

В работе [1] на основании результатов [2] показано, как можно строить конечномерные аппроксимации периодических решений автономных систем. Ниже указан другой подход к решению задачи об аппроксимации, основанный на методе функционализации параметра, предложенном М. А. Красносельским [3].

1. Рассмотрим сначала автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

(1.1) $$dx/dt = f(x) \qquad (x \in R^n)$$

где f — непрерывно дифференцируемое отображение области $G \subset R^n$ в R^n. Предположим, что система (1.1) в области G имеет изолированный цикл Γ, наименьший положительный период которого ω_0. Пусть $x_0 \in \Gamma$ и $x^*(t)$ — решение системы (1.1) с начальным условием x_0 при $t = 0$. Будем считать, что цикл Γ простой, т. е. единица является простым собственным значением оператора сдвига за время ω_0 по траекториям системы в вариациях

(1.2) $$d\xi/dt = f_x[x^*(t)]\,\xi$$

Пусть $C[0, 1]$ — банахово пространство непрерывных на $[0, 1]$ функций со значениями в R^n, принимающих равные значения на концах промежутка $[0, 1]$. Обозначим через P_m конечномерный проектор, ставящий в соответствие каждой непрерывной функции $u(\tau) \in C[0, 1]$ с рядом Фурье

$$u(\tau) \cong a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2k\pi\tau + b_k \sin 2k\pi\tau)$$

часть ряда

$$u_m(\tau) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} (a_k \cos 2k\pi\tau + b_k \sin 2k\pi\tau)$$

Пусть G_0 — некоторая окрестность элемента $u_0(\tau) = x^*(\tau\omega_0)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ пространства $C[0,1]$. Допустим, что в G_0 определен строго положительный функционал $\Omega(u)$.

Галеркинскими приближениями системы (1.1) будем называть тригонометрические полиномы $u_m(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$, которые являются решениями конечномерной алгебраической системы

(1.3) $$du_m/d\tau = P_m\Omega(u_m) f(u_m)$$

Теорема 1. Предположим, что функционал $\Omega(u)$ непрерывно дифференцируем в точке u_0 и удовлетворяет условиям

$$\Omega(u_0) = \omega_0, \qquad \Omega_u(u_0)(du_0/d\tau) \neq 0$$

Тогда при достаточно больших m галёркинские приближения u_m существуют и сходятся к u_0, причем при некоторых a_1, $a_2 > 0$ справедливы следующие оценки скорости сходимости:

$$a_1 \| (I - P_m) u_0 \|_C \leqslant \| u_0 - u_m \|_C \leqslant a_2 \| (I - P_m) u_0 \|_C$$

Доказательство. Равенством

$$Hu = \sum_{k=1}^{\infty} (2\pi k)^{-1} (-b_k \cos 2k\pi\tau + a_k \sin 2k\pi\tau)$$

определим оператор, действующий из пространства $L_2[0, 1]$ суммируемых с квадратом функций со значениями в R^n, в пространство $C[0, 1]$. Очевидно, H вполне непрерывен. С помощью H введем теперь в рассмотрение действующий в пространстве $C[0, 1]$ вполне непрерывный оператор (аналогичный интегральный оператор для неавтономных систем рассматривался ранее в работе [4])

(1.4) $$\mathbf{U}_\Omega u(\tau) = \int_0^1 \{u(\tau) + \Omega(u) f[u(\bar{\tau})]\} d\tau + H(I - P_0)\Omega(u) f[u(\tau)] \qquad (u \in G_0)$$

Пусть $u(\tau)$ — неподвижная точка оператора $\mathbf{U}_\Omega$, т. е.

(1.5) $$u(\tau) \equiv \int_0^1 \{u(\tau) + \Omega(u) f[u(\tau)]\} d\tau + H(I - P_0)\Omega(u) f[u(\tau)]$$

Функция $u(\tau)$ на концах промежутка $[0, 1]$ принимает равные значения. Далее, интегрируя тождество (1.5) по промежутку $[0,1]$, получаем

$$\int_0^1 \Omega(u) f[u(\tau)] d\tau = 0$$

Отсюда следует, что $f[u(\tau)] \equiv (I - P_0) f[u(\tau)]$. Поэтому, дифференцируя (1.4), получаем $u'(\tau) \equiv \Omega(u) f[u(\tau)]$. Таким образом, неподвижные точки оператора $\mathbf{U}_\Omega$ являются однопериодическими решениями системы

(1.6) $$du/d\tau = \Omega(u) f[u(\tau)]$$

Верно и обратное утверждение.

Нетрудно видеть, что система алгебраических уравнений

$$u_m = P_m \mathbf{U}_\Omega u_m$$

эквивалентна системе (1.3). Следовательно, вопрос о галеркинских приближениях системы (1.1) эквивалентен вопросу об отыскании обычных галеркинских приближений уравнения

$$u = \mathrm{U}_\Omega u$$

в банаховом пространстве C [0,1].

Покажем прежде всего, что единица не является собственным значением оператора $(\mathrm{U}_\Omega)_u(u_0)$. С этой целью уравнение $h = (\mathrm{U}_\Omega)_u(u_0)\, h$ запишем более подробно

$$h(\tau) = \int_0^1 h(\tau)\, d\tau + \int_0^1 \{\Omega(u_0) f_u[u_0(\tau)]\, h + \Omega_u(u_0) hf[u_0(\tau)]\}\, d\tau +$$
$$+ H(I - P_0)\{\Omega(u_0) f_u[u_0(\tau)]\, h + \Omega_u(u_0) hf[u_0(\tau)]\}$$

Видно, что $h(\tau)$ является однопериодическим решением системы уравнений

$$dh/d\tau = \omega_0 f_u[u_0(\tau)]\, h + \Omega_u(u_0)\, h\, f[u_0(\tau)]$$

Положим, $\tau\omega_0 = t$, $\psi(t) = h(t/\omega_0)$. Тогда функция $\psi(t)$ является ω_0-периодическим решением системы уравнений

$$d\psi/dt = f_u[x^*(t)]\, \psi + \frac{1}{\omega_0}\Omega_u(u_0)\, h x^{\cdot *}(t)$$

Последнее возможно лишь в случае, когда

$$\Omega(u_0)\, h \int_0^{\omega_0} (x^{\cdot *}(t), \varphi(t))\, dt = 0$$

Здесь $\varphi(t)$ — ω_0-периодическое решение сопряженной системы

$$dy/dt = -f_u^*[x^*(t)]\, y$$

Рассмотрим два возможных случая. Пусть сначала

$$\int_0^{\omega_0} (x^{\cdot *}(t), \varphi(t))\, dt = 0$$

Тогда, очевидно,

$$(x^{\cdot *}(0), \varphi(0)) = 0 \qquad (1.7)$$

Обозначим через $\Phi(t)$ фундаментальную матрицу системы дифференциальных уравнений (1.2), удовлетворяющую условию $\Phi(0) = I$. Видно, что $\Phi(\omega_0)\, x^{\cdot *}(0) = x^{\cdot *}(0)$ и $\varphi(0) = \Phi^*(\omega_0)\, \varphi(0)$. Поэтому из равенства (1.7) вытекает, что уравнение

$$z = \Phi(\omega_0) z + x^{\cdot *}(0) \qquad (z \in R^n)$$

имеет ненулевое решение. Это противоречит простоте единичного собственного значения оператора сдвига $\Phi(\omega_0)$.

Если $\Omega_u(u_0)\, h = 0$, то, очевидно, $\psi(t) = kx^*(t)$ и $h(\tau) = ku_0(\tau)$. Тогда из условий теоремы 1 вытекает, что $k = 0$ и поэтому $h(\tau) \equiv 0$. Следовательно, единица не является собственным значением оператора $(\mathrm{U}_\Omega)_u(u_0)$.

Отметим, наконец, что оператор U_Ω представим в виде

$$\mathrm{U}_\Omega u = TSu$$

$$Tu = H(I - P_0)u + \int_0^1 u(\tau)\,d\tau$$

$$Su = \int_0^1 u(\tau)\,d\tau + \Omega(u) f[u(\tau)]$$

причем

$$P_m T = TP_m, \qquad \lim_{m\to\infty} \| T(I - P_m)\|_{L_2\to C} = 0$$

Утверждение теоремы вытекает теперь из одной леммы, установленной в работе [4]. Теорема доказана.

Следует добавить, что существование и сходимость галеркинских приближений могут быть установлены и в случае, когда система (1.1) имеет семейство циклов. Если, например, вращение $\gamma(I - \mathrm{U}_\Omega, G^\cdot)$ вполне непрерывного векторного поля $I - \mathrm{U}_\Omega$ на границе $G^\cdot$ некоторой области G отлично от нуля, то при достаточно больших m галеркинские приближения существуют и сходятся к множеству однопериодических решений системы (1.6). Для вычисления $\gamma(I - \mathrm{U}_\Omega, G^\cdot)$ может оказаться полезной теорема родственности, установленная в работе [5].

2. Рассмотрим теперь систему дифференциально-разностных уравнений

$$dx/dt = f[x(t - h_1), \ldots, x(t - h_k)] \tag{2.1}$$

$$x, f \in R^n, \qquad 0 \leqslant h_1 \leqslant \ldots \leqslant h_k$$

Предположим, что $f(x_1, \ldots, x_k)$ определена и непрерывно дифференцируема в $R^n \times \ldots \times R^n$ и принимает значения в R^n. Пусть, далее, у системы (2.1) есть изолированный цикл Γ, который определяется ω_0-периодическим решением $x^*(t)$. Будем считать, что система уравнений в вариациях

$$\frac{d\xi}{dt} = \sum_{i=1}^{k} f_{x_i}[x^*(t - h_1), \ldots, x^*(t - h_k)]\,\xi \tag{2.2}$$

имеет одномерное подпространство ω_0-периодических решений. (Очевидно, $x^{\cdot *}(t)$ принадлежит этому подпространству.) Пусть, наконец, для некоторого ω_0-периодического решения $\varphi(t)$ присоединенной к (2.2) системы [6] справедливо неравенство

$$\int_0^{\omega_0} \Big([x^{\cdot *}(t) + \sum_{i=1}^{k} h_i f_{x_i} x^{\cdot *}(t - h_i)],\ \varphi(t)\Big)\,dt \neq 0$$

Такие циклы будем называть квазипростыми.

Покажем, как можно использовать метод Галеркина для приближенного отыскания квазипростых циклов. С этой целью введем в рассмотрение пространство $C_1[0,1]$ непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$ функций $u(\tau)$ со значениями в R^n, для которых $u(0) = u(1)$, $u^\cdot(0) = u^\cdot(1)$. Функция $u_0(\tau) = x^*(\tau\omega_0)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ принадлежит $C_1[0,1]$. Будем считать, что взятый наудачу положительный функционал $\Omega(u)$ определен в некоторой окрестности G_0 точки $u_0 \in C_1$ [0, 1], непрерывно дифференцируем в точке u_0 и удовлетворяет условиям

$$\Omega(u_0) = \omega_0, \ \Omega_n(u_0)(du_0 / d\tau) \neq 0$$

Галеркинскими приближениями системы (2.1) будем называть тригонометрические полиномы u_m, которые являются решениями следующей алгебраической системы:

$$\frac{du_m}{d\tau} = P_m \Omega(u_m) f\left[u_m\left(\tau - \frac{h_1}{\Omega(u_m)}\right), \ldots, u_m\left(\tau - \frac{h_k}{\Omega(u_m)}\right)\right]$$

Теорема 2. При достаточно больших m галеркинские приближения существуют и сходятся к u_0. Более того, при некоторых $a_1, a_2 > 0$ справедливы неравенства

$$a_1\|(I - P_m)u_0\|_{C_1} \leqslant \|u_0 - u_m\|_{C_1} \leqslant a_2\|(I - P_m)\dot{u}_0\|_{C_1} \tag{2.3}$$

Для доказательства этой теоремы нужно рассмотреть уравнение $u = \mathrm{U}_\Omega u$ в пространстве C_1 [0, 1] и проверить, что: 1) единица не является собственным значением оператора $(\mathrm{U}_\Omega)_u(u_0)$; 2) $P_m T = T P_m$; 3) $\lim\limits_{m\to\infty}\| T(I - P_m)\|_{L_2\to G_1} = 0$.

Остается неясным, можно ли установить для дифференциально-разностных уравнений оценки типа (2.3) в пространстве C [0, 1].

Автор благодарит М. А. Красносельского за внимание к работе.

Поступила 11 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стокс А.* Об аппроксимации нелинейных колебаний. В кн.: Тр. 5-й Междунар. конф. по нелинейным колебаниям, 1969, т. 2. Киев, 1970.
2. *Урабе М.* Метод Галеркина для нелинейных периодических систем. Механика. Сб. перев., 1966, т. 3.
3. *Бобылев Н. А., Красносельский М. А.* Функционализация параметра и теорема родственности для автономных систем. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 11.
4. *Забрейко П. П., Стрыгина С. О.* О периодических решениях эволюционных уравнений. Матем. заметки, 1971, т. 9, вып. 6.
5. *Стрыгин В. В.* Теоремы родственности для периодической задачи автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В сб.: Седьмая летняя матем. школа. 1969. Киев 1970.
6. *Шиманов С. Н.* К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.