

ВЛИЯНИЕ ЗНАКА КРИВИЗНЫ ОБОЛОЧКИ НА ХАРАКТЕР НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Е. М. Зверев

(Москва)

Исследуются задачи, которые в безмоментной постановке оказываются некорректными. Цель работы — показать, что известная аномалия, отмеченная В. З. Власовым, в поведении оболочек отрицательной кривизны и вызванная некорректностью постановки для нее полной безмоментной задачи, не является сугубо собственным свойством оболочек отрицательной кривизны, а наблюдается также и у оболочек положительной кривизны, если полная безмоментная задача для них оказывается некорректной. Свойства напряженно-деформированного состояния изучаются в зависимости от знака кривизны срединной поверхности и способа закрепления краев. Сравнение напряженных состояний оболочек производится по основному напряженному состоянию; напряжения краевого эффекта не учитываются. Рассмотрены два варианта граничных условий: один край оболочки свободен, а другой — жестко заземлен (консольная оболочка) и случай, когда оба края жестко заземлены.

1. При исследовании напряженного состояния тонкой упругой оболочки будем исходить из уравнений и формул моментной теории.

Уравнения равновесия

$$(1.1) \quad \frac{1}{A} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} (T_1 - T_2) + \frac{1}{B} \frac{\partial S}{\partial \beta} + \frac{2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} S - \frac{N_1}{R_1} + X = 0 \quad (\alpha\beta)$$

$$(1.2) \quad \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_1) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_2) \right] + Z = 0$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial G_1}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} (G_1 - G_2) - \frac{1}{B} \frac{\partial H}{\partial \beta} - \frac{2}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} H - N_1 = 0 \quad (\alpha\beta)$$

Соотношения упругости

$$(1.3) \quad T_1 = \frac{2Eh}{1-\sigma^2} (\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2) \quad (\alpha\beta), \quad S = \frac{Eh}{1+\sigma} \omega$$

$$(1.4) \quad G_1 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)} (\kappa_1 + \sigma\kappa_2) \quad (\alpha\beta), \quad H = \frac{2Eh^3}{3(1+\sigma)} \tau$$

Формулы деформации — смещения

$$(1.5) \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v - \frac{w}{R_1} \quad (\alpha\beta), \quad \omega = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{u}{A} + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{v}{B}$$

$$(1.6) \quad \kappa_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) \quad (\alpha\beta)$$

$$\tau = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_2} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} \right) +$$

$$+ \frac{1}{R_1} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v \right)$$

Здесь приняты обозначения монографии [1] и считается, что α и β — безразмерные параметры ортогональной системы координат, отнесенной к линиям кривизны срединной поверхности оболочки. Символ $(\alpha\beta)$ означает, что из равенства, после которого он стоит, можно получить другое равенство взаимной заменой $(\alpha, 1, A, u, X)$ на $(\beta, 2, B, v, Y)$.

Будет обсуждаться полная безмоментная краевая задача [2], заключающаяся в интегрировании уравнений (1.1), (1.3), (1.5), в которых положено $N_1 = N_2 = 0$, с учетом только тангенциальных граничных условий и дополнительного требования тангенциальной непрерывности. Последнее означает, что на внутренней линии, если она, например, совпадает с линией $\alpha = \text{const}$, величины u, v, T_1, S должны быть непрерывны. Заметим, что в результате решения полной безмоментной задачи определяются не только усилия, но и перемещения. Зная последние, можно по формулам (1.6), (1.4) вычислить моменты. Напряженное состояние, которое составляется из напряжений от усилий и моментов и при этом не учитываются напряжения краевого эффекта, будем называть основным. Свойства основного напряженного состояния, как выясняется ниже, определяются характером полной безмоментной задачи.

Полная безмоментная задача иногда оказывается некорректно поставленной, т. е. нет соответствия между типом уравнений и характером условий, которые надо выполнить на границах области. Пример такой задачи построил В. З. Власов [3]. Он показал, что в шарнирно опертых оболочках отрицательной кривизны при некоторых критических размерах появляется повышенная напряженность и деформативность. В то же время оболочки неотрицательной кривизны ведут себя обычным образом при таких же граничных условиях. Связано это с тем, что в примере В. З. Власова полная безмоментная задача распадается на две задачи Дирихле. Такие задачи корректны для оболочек положительной кривизны и некорректны для оболочек отрицательной кривизны. Явления, отмеченные В. З. Власовым, вполне согласуются с результатами исследований С. Л. Соболева, который рассмотрел задачу Дирихле в прямоугольнике для уравнений колебания струны [4] и показал, что ее решение неустойчиво относительно размеров прямоугольника.

Можно указать на случаи противоположного характера, когда оболочки положительной кривизны имеют значительно большую напряженность, чем оболочки отрицательной кривизны. Это, например, наблюдается в консольных оболочках. Полная безмоментная задача для таких оболочек распадается на две задачи Коши (статическую и геометрическую) для уравнений параболического (при $K = 0$) и эллиптического (при $K > 0$) типов. Такие задачи в математической физике также называются некорректными, и они плохо исследованы [5, 6]. Известно [6], что их решения сильно неустойчивы. Неустойчивость приводит к тому, что при решении первой статической задачи в заделке возникают большие реактивные силы, во много раз большие, чем те, которые заданы на свободном краю. Степень такого нарастания определяется типом уравнения (для параболического уравнения нарастание происходит по степенному закону, а для эллиптического — по экспоненциальному) и величиной области, в которой разыскивается решение, т. е. расстоянием между заделанным и свободным краями. Далее решается вторая задача — геометрическая. Она того же типа, что и статическая. Следовательно, на свободном краю перемещения будут во много раз больше, чем те, которые «заданы» на защемленном краю. (Заданными считаются перемещения, соответствующие частному решению геометрических уравнений (1.5), в которых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega$ заменены с помощью соотношений упругости (1.3) на усилия T_1, T_2, S). Эти частные решения будут велики в силу неустойчивости статической задачи. Устранив эти перемещения с помощью неустойчивого решения геометрической задачи, получим на свободном краю некоторые большие перемещения, отвечающие описанному выше двойному нарастанию решения. По этим перемещениям можно вычислить компоненты изгибной деформации (1.6), моменты (1.4) и напряжения от моментов. С помощью формул

$$\sigma_T = 1/2 T / h, \quad \sigma_G = 3/2 G / h^2$$

и (1.1) — (1.6) можно получить следующие оценки для напряжений $\sigma_T = O(h^{-1}p^{-1})$ — на заделанном краю; $\sigma_T = O(h^{-1}), \sigma_G = O(p^{-2})$ — на свободном краю. Здесь принято, что на свободном краю заданы единичные тангенциальные усилия, а p — это некоторая условная мера возрастания интегралов. Это, конечно, очень грубые оценки. Однако они показывают, что напряжения от моментов не зависят от h . Ситуация меняется,

когда p^{-2} становится достаточно большим числом, т. е. двойное нарастание решения так велико, что решение полной безмоментной задачи неправильно описывает напряженно-деформированное состояние оболочки. Тогда надо переходить к расчету по моментной теории.

Для заделанной по двум краям оболочки полная безмоментная задача представляет собой задачу типа Дирихле (с двумя граничными условиями в каждой точке края). Она корректна в указанном выше смысле для оболочек положительной кривизны и формально некорректна для оболочек отрицательной кривизны. Вместе с тем есть основания полагать, что в данном случае эта некорректность не будет существенной [2].

Ниже расчетами будет показано, что в консольных оболочках самая высокая напряженность возникает в оболочках положительной кривизны и самая низкая — в оболочках отрицательной кривизны. В заделанной оболочке кривизна не оказывает существенного влияния на характер напряженного состояния.

В подтверждение высказанных соображений приводятся результаты расчетов шести конкретных примеров для оболочек, полученных вращением вокруг оси OO_1 кривых, изображенных на фиг. 1. Кривые взяты так, чтобы соответствующие им оболочки имели одинаковую высоту и максимальный и минимальный радиусы параллелей сферы и гиперboloида были равны между собой. Радиус цилиндра выбран так, чтобы погрешность решения полной безмоментной задачи была невелика. Для консольного гиперboloида погрешность решения полной безмоментной задачи оказалась ничтожной. А вот для сферы пришлось решать моментную задачу.

Погрешность оценивалась следующим образом. Как было отмечено выше, в результате решения полной безмоментной задачи могут быть найдены моменты. По ним с помощью уравнений (1.2) вычислим усилия N_1, N_2 , которые нельзя было найти раньше из (1.1) вследствие их малости. Подставив теперь в (1.1) известные усилия N_1, N_2 и интегрируя, найдем поправки к тангенциальным усилиям T_1^*, S^* . Наибольшую из величин $T_1^* / T_1, S^* / S$ считаем погрешностью расчета.

Во всех рассмотренных ниже случаях для жестко закрепленных оболочек нагрузка выбрана такой: $X = Y = 0, Z = \cos 2\beta$, т. е. рассмотрено решение, соответствующее первому члену разложения Фурье самоуравновешенной по параллели нагрузки. Несамуравновешенные по параллели нагрузки здесь не рассматриваются, так как это подробно исследовано в [7].

В примерах, посвященных консольным оболочкам, поверхностная нагрузка считается отсутствующей, а свободный край считается загруженным тангенциальными усилиями $T_1 = t(\beta), S = s(\beta)$. Такой выбор нагрузки позволит лучше разобраться в особенностях напряженных состояний для оболочек различной кривизны.

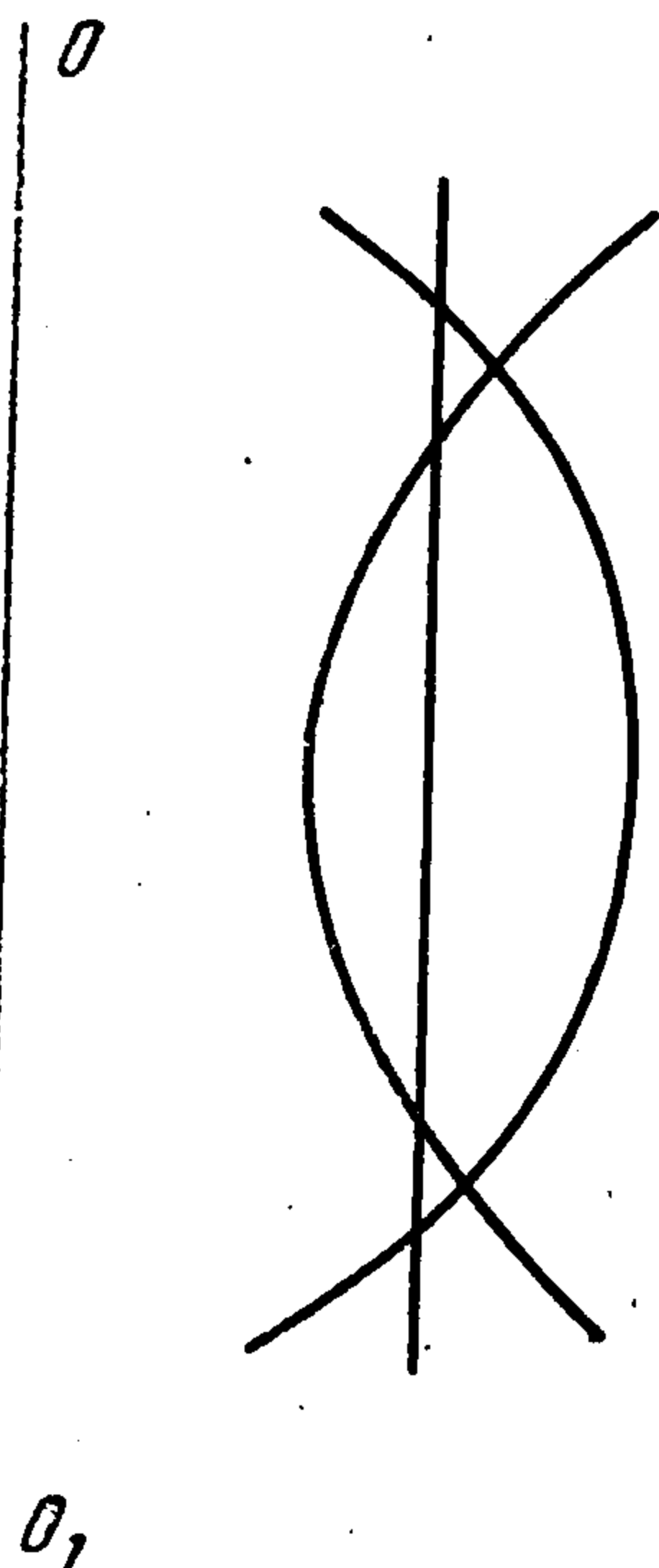
2. Изучим напряженно-деформированное состояние консольной сферической оболочки. Пусть её срединная поверхность отнесена к координатам α, β , связанным с географическим и координатами θ, φ формулами $\alpha = \text{Intg}^{1/2}\theta, \beta = \varphi$.

Коэффициенты первой квадратичной формы поверхности в этой системе координат имеют вид $A = B = r \text{ch}^{-1}\alpha$.

Равенство $\zeta = \exp(\alpha + i\beta)$ устанавливает между плоскостью комплексного переменного ζ и сферой, заданной в системе координат α, β , взаимно однозначное соответствие.

Будем считать, что контур $|\zeta| = \rho_2$ загружен потенциальными усилиями $t(\beta), s(\beta)$, а контур $|\zeta| = \rho_1$ жестко заземлен ($\rho_1, \rho_2 = \text{const}, \rho_2 > \rho_1$), т. е. рассмотрим консоль.

В работе [8] показано, что напряженно-деформированное состояние в сферической оболочке разбивается на три: безмоментное, чисто моментное (изгибное) и смешанное.



Фиг. 1

Нахождение первых двух состояний при отсутствии поверхностной нагрузки сводится к построению двух аналитических функций $\psi(\zeta)$ и $\chi(\zeta)$, через которые непосредственно выражаются искомые усилия и моменты

$$\begin{aligned} -T_1 + iS &= r^2 A^{-2} \psi, \quad T_2 = -T_1, \quad N_i = G_i = H = 0 \quad (i = 1, 2) \\ -H + iG_1 &= r^2 A^{-2} \chi, \quad G_2 = -G_1, \quad T_i = N_i = S = 0 \end{aligned}$$

В тех случаях, когда изменяемость смешанного напряженного состояния по одной координате значительно больше, чем по другой, рационально вместо отыскания смешанного состояния воспользоваться известным решением простого краевого эффекта [1].

Перемещения через функции ψ и χ подсчитываются по формулам [8]

$$\begin{aligned} \varphi^{(m)} &= r \operatorname{ch} \alpha (u^{(m)} + i v^{(m)}) = -r^2 \frac{1 + \sigma}{2Eh} \int \operatorname{ch}^2 \alpha \bar{\psi} \frac{d\bar{\zeta}}{\bar{\zeta}} \\ \varphi^{(b)} &= r \operatorname{ch} \alpha (u^{(b)} + i v^{(b)}) = r\eta^{-4} \frac{1 + \sigma}{2Eh} 3i \int \frac{d\zeta}{\zeta^3} \int \chi d\zeta d\bar{\zeta} \end{aligned}$$

Здесь и далее индексы (m) , (b) означают принадлежность отмеченной ими величины соответственно к безмоментному и чисто моментному напряженным состояниям.

В кольце $\rho_1 < |\zeta| < \rho_2$ решение будем разыскивать, задавая искомые функции ψ , χ в форме рядов Лорана. Эти ряды, для ψ , χ и перемещений запишем так:

$$\begin{aligned} (2.1) \quad \psi &= \sum_{m=2} \left(C_{1m} \frac{\zeta^m}{\rho_2^m} + C_{2m} \frac{\rho_2^m}{\zeta^m} \right), \quad i\chi = \sum_{m=2} \left(M_{1m} \frac{\zeta^m}{\rho_2^m} + M_{2m} \frac{\rho_2^m}{\zeta^m} \right) \\ \frac{2Eh}{1 + \sigma} \varphi^{(m)} &= -r^2 \sum_{m=2} \left(C_{1m} k_{1m} \frac{\bar{\zeta}^m}{\rho_2^m} - C_{2m} k_{2m} \frac{\rho_2^m}{\bar{\zeta}^m} \right) \\ k_{1m} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\rho^2}{m+1} + \frac{2}{m} + \frac{1}{\rho^2(m-1)} \right), \\ k_{2m} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\rho^2}{m-1} + \frac{2}{m} + \frac{1}{\rho^2(m+1)} \right) \\ \frac{2Eh}{1 + \sigma} \varphi^{(b)} &= \eta^{-4} \sum_{m=2} \frac{3r^2}{m(m^2-1)} \left(M_{1m} \frac{\zeta^m}{\rho_2^m} - M_{2m} \frac{\rho_2^m}{\zeta^m} \right) \end{aligned}$$

Подставив (2.1) и известные выражения для величин краевого эффекта в следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} T_1 = t_1, \quad S - H/r = s, \quad G_1 = N_1 - B^{-1} \partial H / \partial \beta = 0 \quad \text{при } |\zeta| = \rho_2 \\ u = v = w = \gamma = 0 \quad \text{при } |\zeta| = \rho_1 \end{aligned}$$

получим выражения для коэффициентов рядов искомых величин

$$\begin{aligned} (2.2) \quad C_{2m} &= \left[-1 - m^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_2 + \frac{3\eta^{-4} p^2}{m(m^2-1)k_{1m1}} \right] \frac{t_m}{\Delta \operatorname{ch}^2 \alpha_2} + \\ &+ \left[m \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} \alpha - \frac{3\eta^{-4} p^2}{m(m^2-1)k_{1m1}} \right] \frac{s_m}{\Delta \operatorname{ch}^2 \alpha_2} \\ M_{2m} &= \frac{t_m + s_m}{\Delta \operatorname{ch}^2 \alpha_2} + O(\eta^4 p^2), \quad C_{1m} = \frac{3\eta^{-4} p^2 M_{2m}}{m(m^2-1)k_{1m1}} \\ M_{1m} &= 1/3 \eta^4 p^2 m(m^2-1)k_{2m1} C_{2m}, \quad p = \rho_1^m / \rho_2^m \\ \Delta &= -1 - m^2 \operatorname{ch}^2 \alpha_2 - m \operatorname{ch} \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_2 + 1/6 \eta^{-4} p^2 m^{-1} (m^2-1)^{-1} k_{1m1}^{-1} + O(p^4) \end{aligned}$$

Здесь t_m, s_m — коэффициенты Фурье разложений функций $t(\beta), s(\beta)$.

Если p достаточно мало, то формулы будут давать тот же результат, как если бы расчет был проведен для незакрепленной оболочки, т. е., чем больше края оболочки отдалены друг от друга, тем менее она безмоментна. Закон, по которому растет решение — экспоненциальный (в цилиндрической оболочке он степенной).

Из формул (2.2) можно получить условия безмоментности или, наоборот, чистой моментности в зависимости от тех или иных входящих в них параметров. Отметим только, что если p достаточно мало, то условие безмоментности (для вывода которого надо потребовать $M_{2m} = 0$) совпадает с условием, полученным в [7] для сферической оболочки с одним краем, который свободен. Это условие имеет вид

$$(2.3) \quad s_m + t_m = 0$$

В зависимости от степени нарушения условия (2.3) будет нарушаться безмоментность напряженного состояния. Однако практическая ценность этого условия весьма мала, так как вследствие сильной неустойчивости решения малое нарушение условия (2.3) будет вызывать большие моментные напряжения.

3. Подобный расчет для оболочек отрицательной кривизны проведем на примере однополостного гиперболоида вращения. Отнесем срединную поверхность гиперболоида к линиям параллелей $z = \text{const}$ и меридианов $\beta = \text{const}$. В системе координат z, β для коэффициентов первой квадратичной формы A, B и главных радиусов кривизны R_1, R_2 имеют место такие выражения:

$$| | | \quad A = (1 + r'^2)^{1/2}, B = r, R_1 = -A^3 / r'', R_2 = Ar$$

где $r = r(z)$ — уравнение меридиана, штрих означает производную по z .

Известно, что с их помощью безмоментные уравнения для оболочек вращения отрицательной кривизны, очерченных по поверхностям второго порядка, приводятся к виду [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{r}{A} T_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\lambda r^2 S) &= -\lambda r^3 (X + r'Z) \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{r}{A} T_1 \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\lambda r^2 S) &= -\lambda r^4 A \left(Y - A \frac{\partial Z}{\partial \beta} \right) \end{aligned}$$

где

$$r = (az^2 + bz + c)^{1/2} \quad \lambda = 4(4ac - b^2)^{-1} \quad \alpha = \text{arc tg } [1/2\lambda(2az + b)]$$

Произведя в них замену координат по формулам $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$ и попарно складывая и вычитая эти уравнения, после интегрирования получим решение типа Даламбера

$$\begin{aligned} \frac{r}{A} T_1 + \lambda r^2 S &= -\frac{1}{2} \int [\lambda r^3 (X + r'Z) + \lambda^2 r^4 A (Y - AZ_{,\beta})] d\xi + f_1(\eta) \\ \frac{r}{A} T_1 - \lambda r^2 S &= -\frac{1}{2} \int [\lambda r^3 (X + r'Z) - \lambda^2 r^4 A (Y - AZ_{,\beta})] d\eta + f_2(\xi) \end{aligned}$$

Здесь f_1, f_2 — произвольные функции интегрирования, подлежащие определению из краевых условий.

Обратимся сначала к отысканию напряженного состояния консольной оболочки. Граничные условия для такой конструкции

$$(3.1) \quad u = v = w = \gamma_1 = 0 \quad \text{при } z = z_1;$$

$$T_1 = t, S = s, G_1 = N_1 = 0 \quad \text{при } z = z_2$$

При отсутствии поверхностной нагрузки решения уравнений равновесия, соответствующие условиям (3.1), имеют следующий вид:

$$T_1^{(m)} = 1/2 A r^{-1} \{ A_2 r_2^{-1} [t(\alpha_2 - \eta) + t(\xi - \alpha_2)] + r_2^{-2} \lambda^{-1} [s(\alpha_2 - \eta) - s(\xi - \alpha_2)] \}$$

$$S_1^{(m)} = 1/2 r^{-2} \lambda^{-1} \{ A_2^{-1} r_2 [t(\alpha_2 - \eta) - t(\xi - \alpha_2)] + r_2^{-2} \lambda^{-1} [s(\alpha_2 - \eta) + s(\xi - \alpha_2)] \}$$

$$r_2 = r(z_2), A_2 = A(z_2)$$

Уравнения для перемещений гиперблоида приводятся к виду [3]

$$(3.2) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} (\lambda A u) = \lambda A r \omega$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\lambda A u) = \frac{A^2}{r r'} \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Решение этой системы записывается аналогично решению для усилий и поэтому не приводится.

Перейдем к конкретному числовому примеру и положим

$$t = \cos 2\beta, s = \sin 2\beta \text{ при } z = z_2, r = (1 + z^2)^{1/2}$$

Тогда искомые усилия имеют вид

$$(3.3) \quad T_1^{(m)} = A r^{-1} (C_1 \sin 2\alpha - C_2 \cos 2\alpha) \cos 2\beta$$

$$S^{(m)} = r^{-2} (C_1 \cos 2\alpha + C_2 \sin 2\alpha) \sin 2\beta$$

$$C_1 = r_2^2 \cos 2\alpha_2 + r_2 A_2^{-1} \sin 2\alpha_2, C_2 = r_2^2 \sin 2\alpha_2 - r_2 A_2^{-1} \cos 2\alpha_2$$

Графики этих усилий изображены на фиг. 2 сплошной линией.

Тангенциальные условия для перемещений выглядят так: $u = v = 0$ при $z = z_1$.

Удовлетворяющие им решения уравнений (3.2) представимы следующим образом:

$$(3.4) \quad 2Ehu^{(m)} = \frac{1}{A} \left[\sin 2\alpha \int_{\alpha_2}^{\alpha} (h_1 \sin 2\alpha - h_2 \cos 2\alpha) d\alpha + \right.$$

$$\left. + \cos 2\alpha \int_{\alpha_2}^{\alpha} (h_1 \cos 2\alpha + h_2 \sin 2\alpha) d\alpha \right] \cos 2\beta$$

$$2Ehv^{(m)} = r \left[\sin 2\alpha \int_{\alpha_2}^{\alpha} (h_2 \sin 2\alpha + h_1 \cos 2\alpha) d\alpha + \right.$$

$$\left. + \cos 2\alpha \int_{\alpha_2}^{\alpha} (h_2 \cos 2\alpha - h_1 \sin 2\alpha) d\alpha \right] \sin 2\beta$$

$$h_1 = [2 - 2\sigma + 4z^4 (2z^2 + 1)^{-1}] T_1^{(m)}, h_2 = 2(1 + \sigma) (2z^2 + 1)^{1/2} S^{(m)}$$

$$w^{(m)} = 2A v^{(m)} + z r^{-1} u^{(m)} - (1 - \sigma A r) T_1^{(m)} (2Eh)^{-1}$$

$$u^{(b)} = A^{-1} (D_1 \cos 2\alpha + D_2 \sin 2\alpha) \cos 2\beta$$

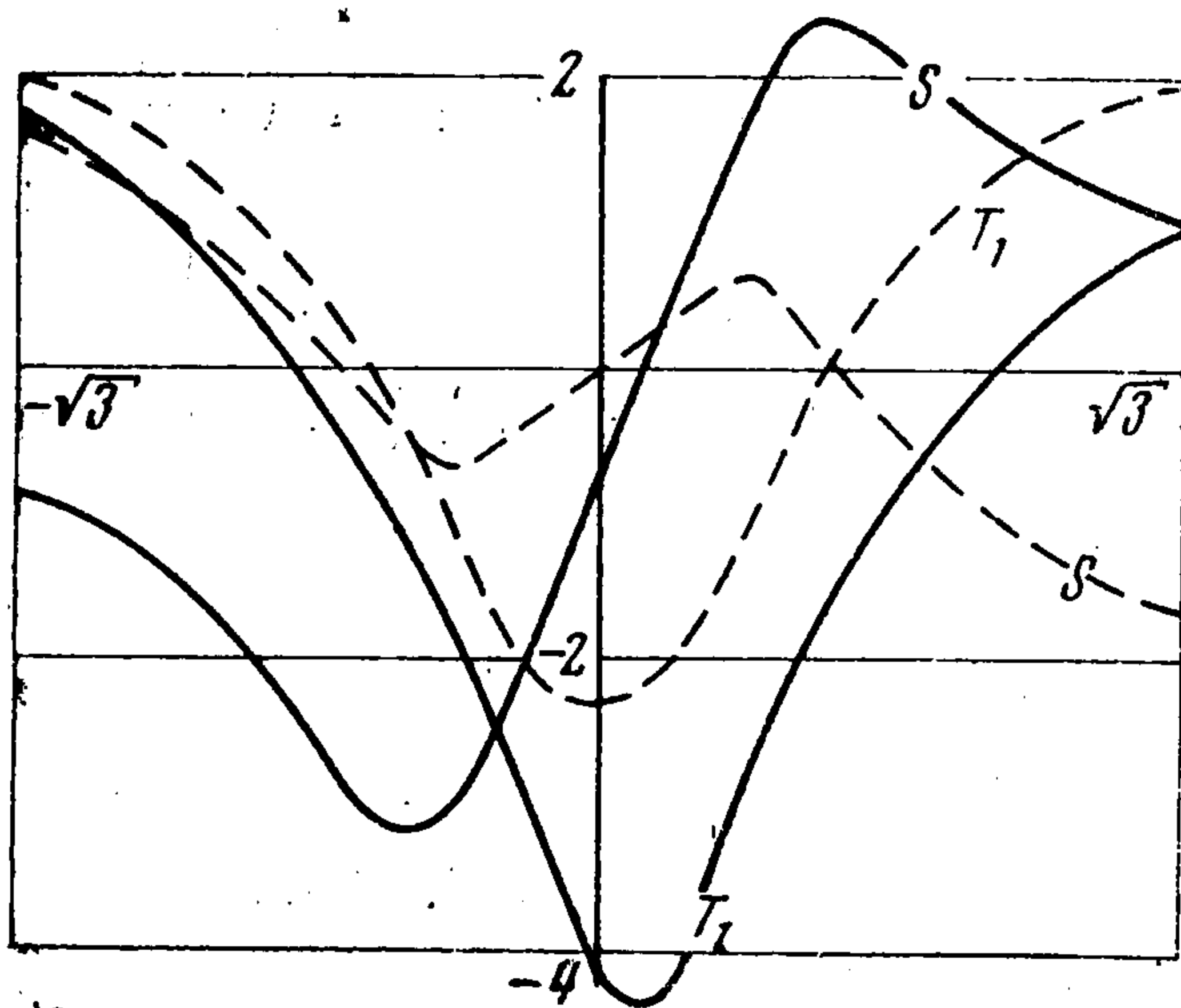
$$v^{(b)} = r (D_1 \sin 2\alpha - D_2 \cos 2\alpha) \sin 2\beta$$

$$w^{(b)} = 2A v^{(b)} + z r^{-1} u^{(b)}$$

$$D_1 = -v^{(m)}(\alpha_1) r_1^{-1} \sin 2\alpha_1 - A_1 u^{(m)}(\alpha_1) \cos 2\alpha_1$$

$$D_2 = v^{(m)}(\alpha_1) r_1^{-1} \cos 2\alpha_1 - A_1 u^{(m)}(\alpha_1) \sin 2\alpha_1$$

Интересно, что хотя решение (3.3) для гиперboloида выражается через тригонометрические функции, оно не является осциллирующим. Это происходит из-за того, что когда z изменяется в пределах от $-\infty$ до ∞ , α изменяется в пределах от $-\frac{1}{2}\pi$ до $\frac{1}{2}\pi$



Фиг. 2

и, следовательно, решения (3.3) в гиперboloиде, каким бы он длинным ни был, могут поменять знак не более двух раз. Причем эта смена знаков происходит тем ближе к точке $z = 0$, чем больше λ , т. е. чем больше кривизна «шейки». Здесь безмоментная теория может стать неприменимой из-за большой изменчивости напряженного состояния.

Расчет жестко заземленного по двум контурам гиперboloида был проведен численно при такой нагрузке:

$$X = Y = 0, Z = \cos 2\beta$$

Граничные условия жесткого заземления записываются так:

$$(3.5) \quad u = v = w = \gamma_1 = 0 \text{ при } z = z_1, z = z_2$$

При вычислении использовались выражения для усилий (3.3) и перемещений (3.4). Процесс удовлетворения крайним условиям (3.5) хорошо известен. Из первых двух условий определяются произволы C_2, D_2 ($C_1 = D_1 = 0$ — это следует из симметрии конструкции), используя которые вычисляются усилия и перемещения. Графики усилий для заземленного по двум контурам гиперboloида изображены на фиг. 2 пунктирной линией. Погрешность расчета оценивается величиной

$$T_1^* / T_1 = O(10^{-4})$$

4. Процесс расчета цилиндрической оболочки здесь не описывается, так как он подробно изложен в [1]. Напряжения для всех оболочек подсчитаны при $h = 0.01$.

В консольных оболочках максимальные напряжения таковы: а) в цилиндрической оболочке $\sigma_T = 200$ — в заделке, $\sigma_G = 50$ — на свободном краю; б) в сферической оболочке (принято $t_2 = s_2 = 1$) $\sigma_T = 19$, $\sigma_G = 765$ — на свободном краю (в заделке напряжения пренебрежимо малы); в) в гиперболической оболочке $\sigma_T = 210$, $\sigma_G = 40$ — в шейке, гиперboloида, $\sigma_G = 6.6$ — на свободном краю.

В жестко закрепленных оболочках напряжения таковы:

а) в цилиндрической оболочке $\sigma_T^* = 70$, $\sigma_G = 0.85$ — посередине оболочки; б) в сферической оболочке $\sigma_T = 150$ — на экваторе, $\sigma_G = 7.4$ — на краю; в) в гиперболической оболочке $\sigma_T = 110$, $\sigma_G = 27$ — в шейке.

Эти числа подтверждают общие рассуждения. Как и ожидалось, моментные напряжения оказались самыми большими в сферической консоли, а самыми малыми — в гиперболической. Напряжения в жестко закрепленных оболочках разнятся значительно меньше.

Обеспечение безмоментной работы, за счет закрепления одного края, в большей степени удается достигнуть у гиперboloида и в меньшей — у цилиндра. Для сферической консоли закрепление играет роль только в случае достаточно узкого сферического пояса. Этот результат является следствием того, что в задаче о напряженном состоянии сферической консоли приходится решать задачу Коши для уравнений эллиптического типа. Сильная неустойчивость такого решения и привела к тому, что на свободном краю появились большие перемещения, чем были вызваны большие перерезывающие усилия и моменты.

5. Проанализируем статику рассмотренных задач с тем, чтобы выяснить физический смысл появления в оболочках моментности.

Вырежем из круговой цилиндрической оболочки, несущей краевую нагрузку

$$(5.1) \quad t = t_2 \cos 2\beta, \quad s = s_2 \sin 2\beta$$

панель $\beta \in (-1/4\pi, 1/4\pi)$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ (фиг. 3). Краевую нагрузку должны уравновешивать силы реакции в закреплении и внутренние силы, приложенные к прямолинейным краям панели. Последние имеют вид [1]

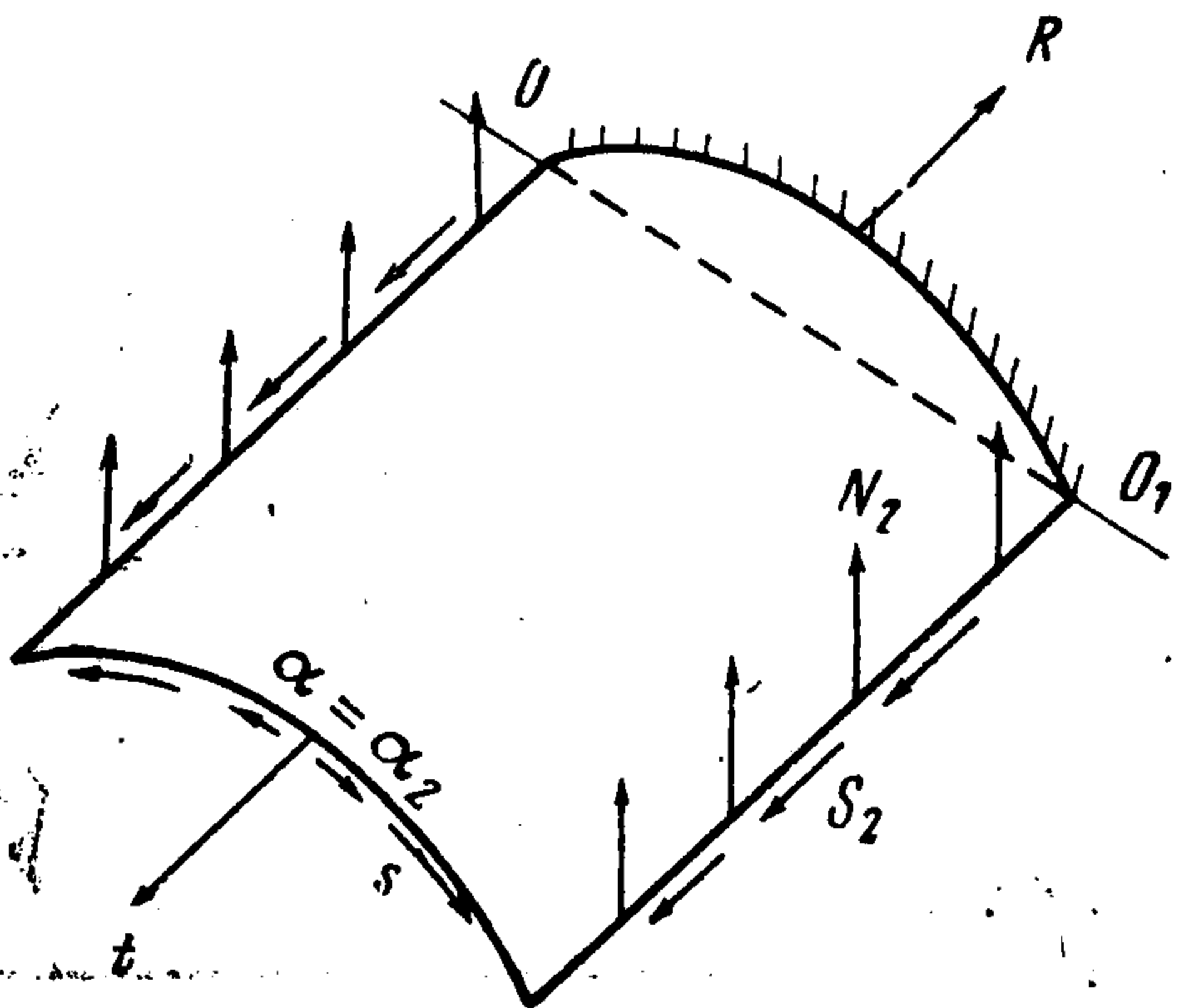
$$(5.2) \quad T_2 = T_{22} \cos 2\beta, \quad G_2 = G_{22} \cos 2\beta, \quad S = S_{22} \sin 2\beta, \quad N_2 = N_{22} \sin 2\beta$$

и поэтому на прямолинейных краях

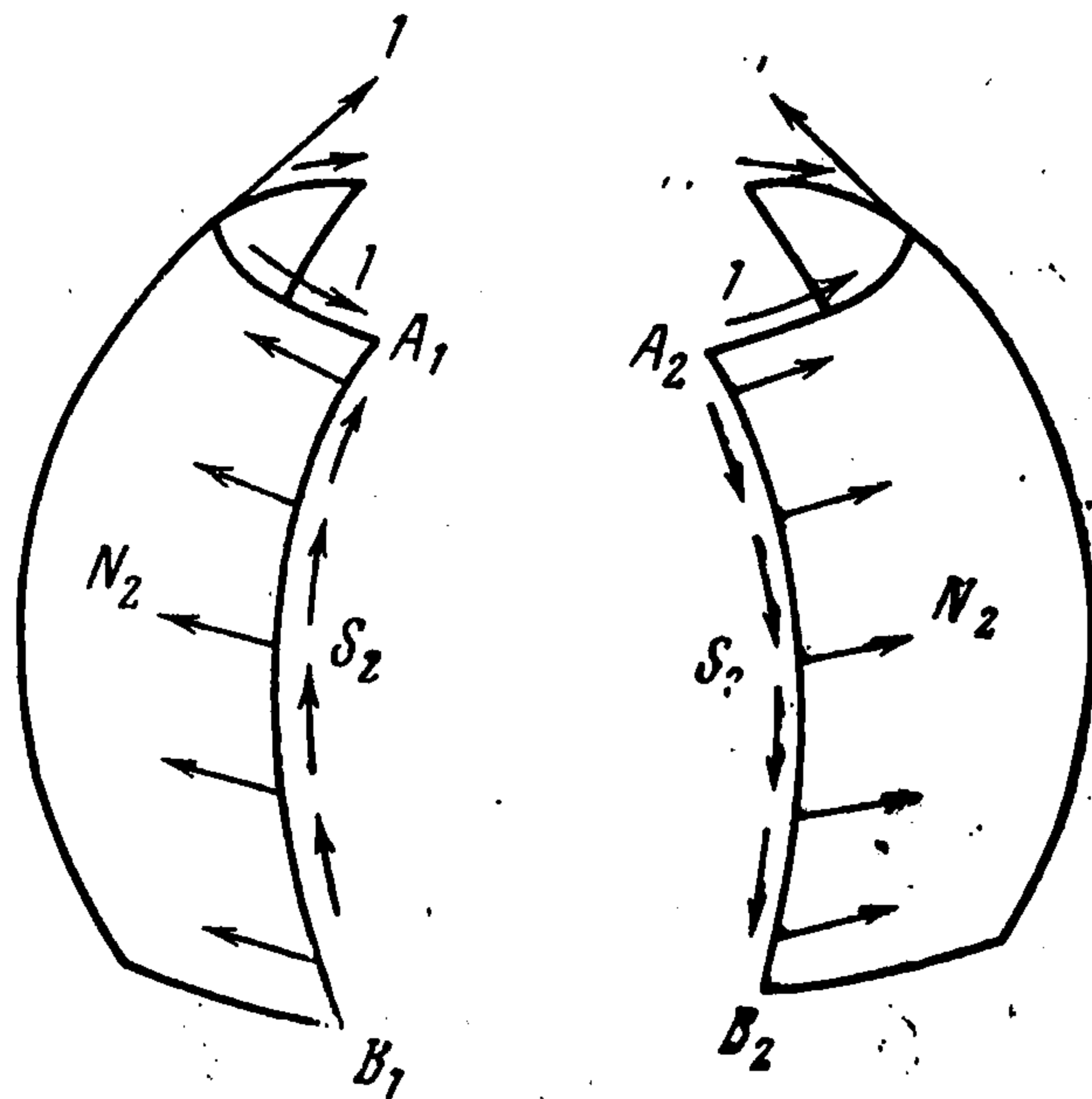
$$(5.3) \quad T_2 = G_2 = 0$$

Под действием краевых сил панель стремится повернуться вокруг линии 00_1 против часовой стрелки. Этому будут препятствовать силы N_2 и реакция R . Предположим, что $N_2 = 0$. Тогда работа панели не будет отличаться от работы аналогичной балки прямолинейные края которой испытывают перемещения, легко подсчитываемые по формулам сопротивления материалов. Если панель, изображенная на фиг. 3, стремится повернуться против часовой стрелки, то соседние с ней в оболочке будут стремиться повернуться по часовой стрелке. А при работе таких панелей в оболочке перемещение w на прямолинейных краях отсутствует, так как $w = w_2 \cos 2\beta$. Следовательно, силы N_2 разгибают панель-балку в соответствии с требованиями их совместной работы в оболочке. Теперь становится очевидным тот факт, почему N_2 уже велики в недлинной консольной оболочке. В достаточно длинной оболочке силы N_2 становятся главными, а реакция R второстепенной, так как реакция R на прогиб никак не влияет. И получается, что краевое воздействие в длинной оболочке уравновешивается силами N_2 , которые, в соответствии с рассмотренной выше геометрической схемой работы оболочки, должны затухать, и затухать тем быстрее, чем толще оболочка.

Вырежем из сферической оболочки, загруженной лежащими в тангенциальной плоскости краевыми силами (5.1), часть $\beta \in (-1/4\pi, 1/4\pi)$, $|\xi| \in (\rho_1, \rho_2)$. На фиг. 4 изображены две такие доли, по-разному загруженные внутренними усилиями. Для частей, вырезанных указанным способом, верно (5.2), (5.3), и это учтено при загрузке сторон $\beta_1 = -1/4\pi$, $\beta_2 = 1/4\pi$. К части, расположенной на фиг. 4 слева, приложены краевые силы, коэффициенты Фурье которых в (5.1) $t_2 = s_2 = 1$, а для правой части оболочки $t_2 = -s_2 = 1$. В угловых точках A_1 и A_2 направления сил S_2 возьмем в соответствии с правилом знаков. Дальше, при движении от точки A_1 к B_1 и от A_2 к B_2 знаки усилий не меняются (это следует из решения, которое известно). В первом случае моменты всех тангенциальных сил (внешних и внутренних) суммируются с одним знаком, а во втором — с различными. Ясно, что силы N_2 в первом случае совершенно необходимы, а во втором, может быть, и нет. (Решение показывает, что $N_2 = 0$.)



Фиг. 3



Фиг. 4

Для оболочки отрицательной кривизны не удастся найти какую-либо часть, которая не может быть уравновешена без учета перерезывающих сил и моментов. Более того, моменты от сил S_1 и S_2 , действующих на вырезанную удобным образом, как это проделывалось выше, часть оболочки, имеют разные знаки, в то время как в оболочке положительной кривизны — одинаковые. Следовательно, в оболочке отрицательной кривизны меньше оснований ожидать появления моментности, чем в оболочке положительной кривизны, что находится в соответствии с результатами расчетов.

Поступила 15 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
2. Гольденвейзер А. Л. Теорема о возможных изгибаниях в безмоментной теории оболочек. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
3. Власов В. З. Избранные труды, т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962.
4. Соболев С. Л. Пример корректной краевой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе. Докл. АН, 1956, т. 109, № 4.
5. Курант Р. Уравнения в частных производных. М., «Мир», 1964.
6. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
7. Чернина В. С. Статика тонкостенных оболочек вращения. М., «Наука», 1968.
8. Гольденвейзер А. Л. Исследование напряженного состояния сферической оболочки. ПММ, 1944, т. 8, вып. 6.

Технический редактор Э. Ф. Бунова

Сдано в набор 25/VII-1973 Т-12491 Подписано к печати 21/IX 1973 г. Тираж 2710 экз.
Зак. 2668 Формат бумаги 70×108^{1/16} Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 15,4

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10