УДК 539.3:534.1

УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ОВАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ МОМЕНТНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Е. М. Королева

(Ростов-на-Дону)

Исследуется устойчивость цилиндрических оболочек овального сечения при совместном действии осевого сжатия и осесимметричных нагрузок с учетом моментного докритического состояния. Исследование основано на анализе решения уравнений равновесия оболочек овального сечения, полученного при помощи метода конечных разностей. Путем численного анализа на ЭЦВМ определяются величины критических нагрузок.

1. Для решения задачи используем уравнения равновесия и совместности деформаций для цилиндрической оболочки [1] относительно функций напряжений φ и функции радиальных перемещений ω в безразмерном виде

$$k_0^2\nabla^4\varphi + k(\theta)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} - \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\,\partial\theta}\right)^2 + \frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{12(1-\sigma^2)k_0^2}\nabla^4\omega - k(\theta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} + 2\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\,\partial\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\theta} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial\xi^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\,\partial\theta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\theta^4}$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{EhR_0^2}, \quad k(\theta) = \frac{R(\theta)}{h}, \quad \xi = \frac{x}{R_0}, \quad \theta = \frac{y}{R_0}$$

Здесь ω — прогиб, положительный внутрь оболочки и отнесенный к толщине оболочки h, Φ — функция усилий в срединной поверхности, $R(\theta)$ — радиус оболочки.

Будем исследовать цилиндрические оболочки с радиусом кривизны поперечного сечения

$$R(\theta) = \frac{R_0}{1+\mu\cos 2\theta} \qquad (0 \leqslant \mu \leqslant 1)$$

Граничные условия при потере устойчивости возьмем в виде

$$\omega = \frac{\partial\omega}{\partial\xi} = \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 0 \qquad \text{(жесткая заделка)}$$

$$\omega = M = \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = 0 \qquad \text{(шарнирное опирание)}$$

2. Функции φ и ω представим как суммы двух составляющих

$$\varphi = \varphi_0(\xi,\theta) + \varphi(\xi,\theta), \quad \omega = \omega_0(\xi,\theta) + \omega(\xi,\theta) \tag{2.1}$$

Здесь $\varphi_0(\xi,\theta)$, $\omega_0(\xi,\theta)$ характеризуют докритическое состояние оболочки, $\varphi(\xi,\theta)$, $\omega(\xi,\theta)$ — приращения этих величин, возникающие при потере устойчивости.

Подставляя (2.1) в систему (1.1) и пренебрегая величинами второго порядка, линеаризуем эту систему

$$k_0^2\nabla^4\varphi + k_0(1+\mu\cos 2\theta)\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} - 2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\xi\,\partial\theta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\,\partial\theta} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} = \left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\xi\,\partial\theta}\right)^2 - \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\theta^2} - k_0(1+\mu\cos 2\theta)\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\xi^2} - k_0^2\nabla^4\varphi_0 \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{12(1-\sigma^2)k_0^2}\nabla^4\omega - k_0(1+\mu\cos 2\theta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2} + 2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\xi\,\partial\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\,\partial\theta} + 2\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\xi\,\partial\theta}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\,\partial\theta} - \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\theta^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2} = \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\theta^2} - 2\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\xi\,\partial\theta}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\xi\,\partial\theta} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\theta^2} + k_0(1+\mu\cos 2\theta)\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial\xi^2} - \frac{1}{12(1-\sigma^2)k_0^2}\nabla^4\omega_0$$

Система уравнений (2.2) дает возможность находить решения нелинейной системы (1.1) при фиксированном значении параметра нагрузки, а также решить вопрос об устойчивости рассматриваемого состояния. Правые части системы (2.2) по виду в точности совпадают с левыми частями системы (1.1). Поэтому, когда будут найдены точные значения функций φ_0, ω_0 (каким-либо способом), система (2.2) становится однородной. При некотором значении параметра нагрузки она может иметь нетривиальное решение.

Согласно [2], в качестве нулевого приближения для численного решения уравнений (1.1) возьмем некоторые функции φ_0°, ω_0° и в их окрестности найдем решение с наперед заданной точностью.

Следующий шаг состоит в нахождении добавок φ', ω', которые предполагаются малыми

$$\varphi_0 = \varphi_0^\circ + \varphi', \quad \omega_0 = \omega_0^\circ + \omega' \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (1.1) и отбрасывая величины второго порядка малости относительно φ' и ω', для добавок φ' и ω' получим систему линейных дифференциальных уравнений (2.2).

Найденные добавки в первом приближении прибавляем к решениям нулевого приближения и получим новое приближение и т. д. Для нахождения решений системы (2.2) применим метод конечных разностей. Процесс последовательных приближений можно продолжить до получения таких решений, при которых правые части в системе (2.2), замененной конечно-разностными уравнениями, будут сколь угодно близки к нулю.

Дифференциальные уравнения (2.2) удовлетворяются в i-узле при помощи разностных приближений вида

$$\frac{1}{2\Delta a}(b_{i+1} - b_{I-1})$$

Здесь $b = \{\varphi, \omega\}$, Δa — шаг вдоль образующей или по дуге. Тогда уравнения (2.2) примут следующее конечно-разностное выражение (в векторной форме):

$$\begin{gathered} E_1\varphi_{m-2} + A\varphi_{m-1} + B\varphi_m + A\varphi_{m+1} + E_1\varphi_{m+2} + D_1\omega_{m-1} + Z\omega_m + D_2\omega_{m+1} = F_{0m} \\ E_2\omega_{m-2} + X_1\omega_{m-1} + Y\omega_m + X_2\omega_{m+1} + E_2\omega_{m+2} + D_1\varphi_{m-1} + Z\varphi_m + D_2\varphi_{m+1} = H_{0m} \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\varphi_m = \{\varphi_{m0}, \varphi_{m1}, \varphi_{m2}, \ldots, \varphi_{mn}\}$$

$$\omega_m = \{\omega_{m0}, \omega_{m1}, \omega_{m2}, \ldots, \omega_{mn}\}$$

Вид матриц E_i, A, B, D_i, Z, X_i, Y, F_{0m}, H_{0m} ($i = 1, 2$) не приведен ввиду громоздкости.

В граничных узлах записываются также в конечных разностях восемь граничных условий, приведенных выше. Уравнения в предконтурных узлах записываются с учетом принятых граничных условий, в уравнениях на осях симметрии учитывается симметрия.

В качестве нулевого приближения выбирается решение линейных уравнений при принятых граничных условиях докритического состояния.

Составлена вычислительная программа на БЭСМ-4, позволяющая определять критические нагрузки. Исследованы вопросы сходимости.

3. Рассмотрим задачи устойчивости цилиндрической оболочки овального сечения конечной длины, нагруженной:

1) кольцевой сосредоточенной силой Q, приложенной посередине поперечного сечения;
2) осевой сжимающей силой T;
3) совместным действием осевого сжатия T и сосредоточенного усилия Q;
4) совместным действием осевого сжатия T и внешнего давления P.

В результате расчетов при $\sigma = 0.3$ установлено, что критическое значение нагрузок определяется из выражений

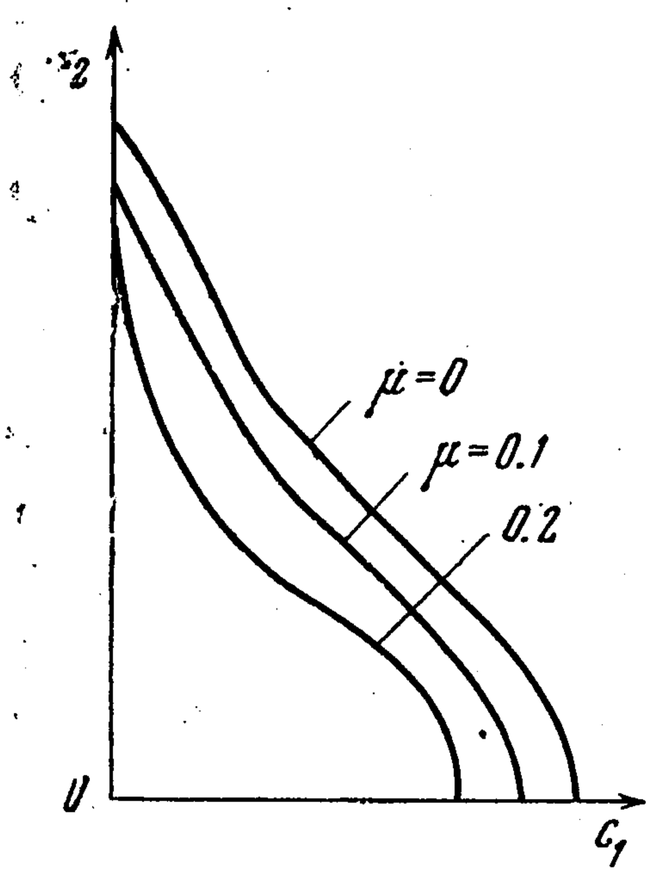
$$Q^* = C_1(\mu) Eh \left(\frac{h}{R_0}\right)^{3/2}, \qquad T^* = C_2(\mu) Eh \frac{h}{R_0}$$

$$P^* = q^* E \left(\frac{h}{R_0}\right)^2, \qquad q^* = C_3(\mu) \frac{R_0}{L} \left(\frac{h}{R_0}\right)^{1/2}$$

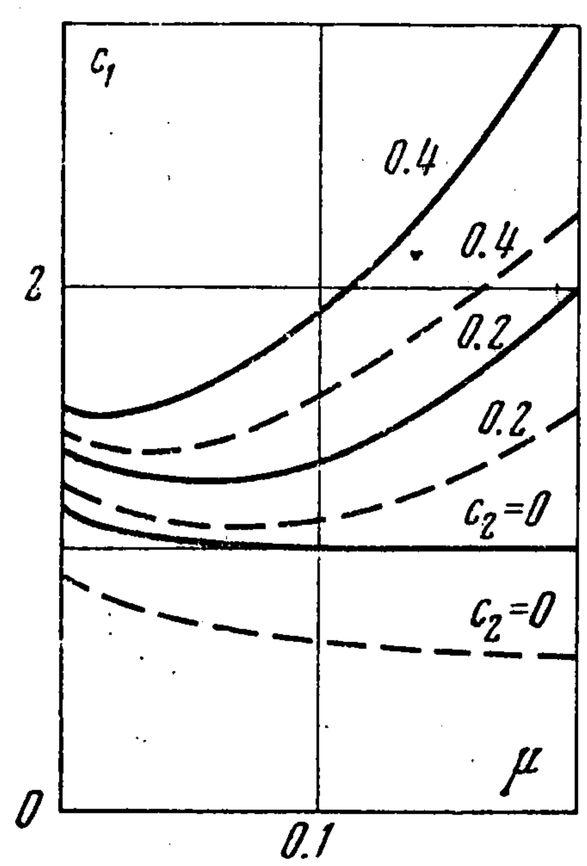
Для достаточно длинной оболочки в случае раздельного действия сосредоточенной силы и осевого сжатия получено

$\mu = 0$,	0.01,	0.1,	0.15,	0.2
$C_1 = 0.35$,	0.34,	0.31,	0.30,	0.26
$C_2 = 0.51$,	0.50,	0.46,	0.43,	0.41

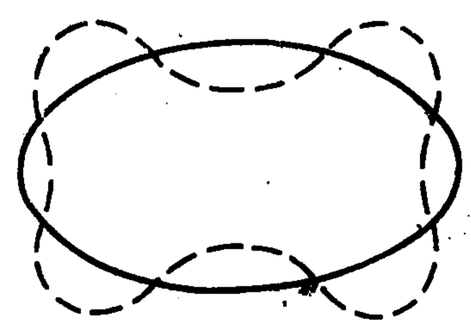
Таким образом, критические нагрузки с увеличением μ существенно снижаются по сравнению с соответствующей нагрузкой для кругового цилиндра [3].



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

В случае совместного действия сосредоточенной силы и осевого сжатия зависимость C_2 (C_1) при фиксированном μ представлена на фиг. 1. Результаты исследования устойчивости шарнирно-опертых (пунктирные линии) и защемленных (сплошные линии) оболочек при совместном действии осевого усилия T и внешнего давления P приведены на фиг. 2. Таким образом, увеличение осевой сжимающей силы T способствует повышению критического внешнего давления P. Форма волнообразования оболочек при потере устойчивости представлена на фиг. 3.

В заключение автор благодарит И. И. Воровича за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступила 11 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
2. Длугач М. И., Степаненко А. С. Определение верхних критических нагрузок для цилиндрических оболочек по нелинейной теории. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 4.
3. Мяченков В. И., Пахомова Л. А. Устойчивость цилиндрических оболочек при сосредоточенных кольцевых нагрузках. Изв. АН СССР. МТТ, 1968, № 5.