УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАНКЕЛЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ ПРИ СТЕПЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ОТ ГЛУБИНЫ

А. Э. Пуро

(Таллин)

Применение преобразования Ханкеля к пространственным осесимметричным задачам теории упругости при степенной зависимости модуля упругости от глубины приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1], решение которых представляет некоторые математические трудности. Поэтому в работах [1, 2] решение этих задач проводилось применением преобразования А. Я. Александрова [3].

Ниже строится фундаментальная система решений указанных обыкновенных дифференциальных уравнений и дается решение двух краевых задач при весьма частных условиях.

1. В случае осевой симметрии уравнения теории упругости в перемещениях имеют вид

$$(\lambda+2\mu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}\right]+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+$$
$$+\frac{\partial\mu}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right]=0$$

$$\mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right]+(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial z}\right]+(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-$$
$$-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{u}{r}\right]+\frac{\partial(2\mu+1)}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

Применим метод Фурье, используя преобразования Ханкеля в следующей форме

$$u(r,z)=\int_0^\infty \varphi(s,z)J_1(sr)\,ds,\quad w(r,z)=\int_0^\infty f(s,z)J_0(sr)\,ds$$

Получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [1]

$$\varphi''=-\frac{\mu'}{\mu}\varphi'+\frac{\lambda+\mu}{\mu}sf'+\frac{\lambda+2\mu}{\mu}s^2\varphi+\frac{\mu'}{\mu}sf \tag{1.1}$$
$$f''=-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}s\varphi'-\frac{\lambda'+2\mu'}{\lambda+2\mu}f'-\frac{\lambda'}{\lambda+2\mu}s\varphi+\frac{\mu s^2}{\lambda+2\mu}f$$

Рассмотрим случай, когда коэффициенты Ламе имеют вид $\mu=\mu_0 z^\beta$, $\lambda=\lambda_0 z^\beta$. Сделаем замену: $k=zs$, $g=(\lambda_0+2\mu_0)/\mu_0$.

Постараемся представить систему дифференциальных уравнений в следующей форме:

$$\left[E\frac{d}{dk}-A\right]\left[E\frac{d}{dk}-B\right]\begin{bmatrix}\varphi\\ f\end{bmatrix}=0$$

Здесь A, B — матрицы коэффициентов, E — единичная матрица.

Фундаментальная система решений в этом случае представляется в форме

$$\psi_b,\ \psi_b\int_{k_0}^{k}\psi_b^{-1}\psi_a\,dk$$

где ψ_b и ψ_a — фундаментальная система решений уравнений

$$\left[E\frac{d}{dk}-B\right]\begin{bmatrix}\varphi\\ f\end{bmatrix}=0 \tag{1.2}$$

$$\left[E\frac{d}{dk}-A\right]\begin{bmatrix}\varphi\\ f\end{bmatrix}=0 \tag{1.3}$$

Перепишем исходную систему (1.1) в матричной форме

$$\left[E\frac{d^2}{dk^2}-G\frac{d}{dk}-H\right]\begin{bmatrix}\varphi\\ f\end{bmatrix}=0$$

$$G=\begin{Vmatrix}-\dfrac{\beta}{k} & g-1\\ -\dfrac{g-1}{g} & -\dfrac{\beta}{k}\end{Vmatrix},\qquad H=\begin{Vmatrix}g & \dfrac{\beta}{k}\\ -\dfrac{g-2}{g}\dfrac{\beta}{k} & \dfrac{1}{g}\end{Vmatrix},$$

Для определения неизвестных матриц A и B получаем систему матричных уравнений

$$A+B=G,\qquad \frac{d}{dk}B-AB=H$$

Решение матричной системы будем искать в виде ряда

$$A=\sum_n A_n k^{-n},\qquad B=\sum_n B_n k^{-n} \tag{1.4}$$

В результате такой замены придем к системе матричных алгебраических уравнений.

Рассмотрим случай, когда ряды (1.4) обрываются и состоят из двух членов, т. е.

$$A=A_0=A_1k^{-1},\quad B=B_0+B_1k^{-1}$$

В этом случае имеем следующую алгебраическую систему матричных уравнений:

$$\begin{gathered}A_0+B_0=G_0,\;\; A_0B_0=-H_0,\;\; A_1+B_1=G_1\\ A_0B_1+A_1B_0=-H_1,\;\; A_1B_1+B_1=0\end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь

$$G_0=\begin{Vmatrix}0 & (g-1)\\ -\dfrac{g-1}{g} & 0\end{Vmatrix},\qquad G_1=\begin{Vmatrix}-\beta & 0\\ 0 & -\beta\end{Vmatrix}$$

$$H_0=\begin{Vmatrix}g & 0\\ 0 & \dfrac{1}{g}\end{Vmatrix},\qquad H_1=\begin{Vmatrix}0 & \beta\\ -\dfrac{g-2}{g}\beta & 0\end{Vmatrix}$$

Система (1.5) имеет решение не всегда, в частности, решение ее возможно, когда собственные числа матриц A_0 и B_0 совпадают.

Система первых двух матричных уравнений (1.5) эквивалентна системе

$$A_0G_0-A_0^2+H_0=0,\quad G_0B_0-B_0^2+H_0=0$$

Решение этих уравнений приведено в [4]

$$\begin{gathered}A_0=[-H_0-m_3m_4E]\,[G_0-(m_3+m_4)E]^{-1}\\ B_0=[G_0-(m_1+m_2)\,E]^{-1}\,[-H_0-m_1m_2E]\end{gathered}$$

где собственные числа матриц A_0 и B_0 находятся из уравнения

$$\det\,[G_0m-m^2E+H_0]=0$$

Систему третьего и четвертого матричных уравнений (1.5) можно свести к уравнению

$$A_0B_1-B_1B_0=-H_1-G_1B_0$$

Если собственные числа матриц A_0 и B_0 различны, то система имеет единственное решение, если одинаковы, то система или несовместна, или имеет бесконечно много решений в виде суммы частного решения и общего решения однородного уравнения.

Решение системы третьего и пятого уравнений (1.5), если G_1 кратна единичной матрице ($G_1 = -\beta E$), имеет вид

$$A_1 = -\beta E - B_1, \qquad B_1 - T^{-1}\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-\beta \end{Vmatrix} T \quad \text{(решение 1)}$$

$$A_1 = -E, \quad B_1 = (1-\beta)E \quad \text{(решение 2)}$$

Здесь T — любая неособенная матрица.

В результате получаем следующие решения уравнений (1.5):

Решение 1

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & g \\ g^{-1} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B_0 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$A_1 = \frac{1}{1-g}\begin{Vmatrix} (\beta+g) & -\sqrt{l_1 l_2 g} \\ \sqrt{l_1 l_2 g^{-1}} & \beta g - 2\beta - 1 \end{Vmatrix}$$

$$B_1 = \frac{1}{1-g}\begin{Vmatrix} -l_1 & \sqrt{l_1 l_2 g} \\ \sqrt{l_1 l_2 g^{-1}} & l_2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{matrix} l_1 = \beta(2-g) + g \\ l_2 = 1 + \beta \end{matrix}$$

Решение 2

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & g \\ g^{-1} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad B_0 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A_1 = -E, \qquad B_1 = -\frac{2}{g-1}E$$

$$\beta = g + 1/g - 1$$

2. Рассмотрим оба полученных решения.

Решение 1. Системы уравнений первой степени (1.2), (1.3) можно свести к уравнению Уиттекера с решениями в виде функций Уиттекера (2.1) и (2.2) соответственно $l = {}^1/_2\sqrt{l_1 l_2 g^{-1}}$.

(2.1) $\qquad W_{-l,\,\beta/2}(2k), \qquad W_{l,\,\beta/2}(2k)$

(2.2) $\qquad W_{l,\,\beta/2}(-2k), \qquad W_{-l,\,\beta/2}(2k)$

В определенных частных случаях эти решения можно выразить в виде многочленов [5].

При $\beta = g\,/\,(g-2)$ решения выражаются в функциях Бесселя и фундаментальная система решения находится из выражений

$$\psi_b = k^{g-4/2\,(g-2)}\begin{Vmatrix} K_{\beta/2-1}(k) & -I_{\beta/2-1}(k) \\ K_{\beta/2}(k) & I_{\beta/2}(k) \end{Vmatrix}$$

$$\psi_a = k^{-\beta/2}\begin{Vmatrix} -gK_{-\beta/2}(k) & gI_{-\beta/2}(k) \\ K_{1-\beta/2}(k) & I_{1-\beta/2}(k) \end{Vmatrix}$$

При $\beta = -1$ фундаментальная система определяется из выражений

(2.3) $$\psi_b = \begin{Vmatrix} ke^{-k} & ke^{k} \\ (1+k)e^{-k} & (1-k)e^{k} \end{Vmatrix}$$

$$\psi_a = \frac{1}{k}\begin{Vmatrix} -ge^{k}(1-k) & -ge^{-k}(1+k) \\ ke^{k} & ke^{-k} \end{Vmatrix}$$

Решение 2. В этом случае на β наложено условие $\beta = (g+1)\,/\,(g-1)$. Фундаментальная система определяется из выражений

(2.4) $$\psi_b = k^{-2/g-1}\begin{Vmatrix} e^{k} & e^{-k} \\ -e^{k} & e^{-k} \end{Vmatrix}, \qquad \psi_a = \frac{1}{k}\begin{Vmatrix} e^{k} & e^{-k} \\ \dfrac{e^{k}}{g} & -\dfrac{e^{-k}}{g} \end{Vmatrix}$$

Пример 1. В геофизике представляет интерес решение задачи Буссинеска при $g = 2.8$, что соответствует

$$\lambda_0 = 2.4 \cdot 10^{11} \ г / см \cdot сек^2, \quad \mu_0 = 3 \cdot 10^{11} \ г / см \cdot сек^2$$

Рассмотрим для простоты случай $g = 3$, $\beta = 2$, что соответствует решению 2. Граничные условия имеют вид

$$\tau_{rz}\Big|_{z=z_0} = 0, \quad \sigma_z\Big|_{z=z_0} = -\delta(r), \quad \lim u(r, z)\Big|_{z\to\infty} = 0, \qquad \lim w(r, z)\Big|_{z\to\infty} = 0$$

Фундаментальная система решений

$$\left\|\begin{matrix} u(sz) \\ w(sz) \end{matrix}\right\| = \frac{1}{zs}\left\|\begin{matrix} P(s)e^{sz} + Q(s)e^{-sz} + R(s)e^{zs}(zs+1) + U(s)e^{-zs}(zs-1) \\ -P(s)e^{sz} + Q(s)P^{-sz} + R(s)e^{zs}(zs-1) + U(s)e^{-zs}(zs+1) \end{matrix}\right\|$$

Из условий бесконечности получаем $P(s) \equiv R(s) \equiv 0$. Подставляя решения в граничные условия, получим значения $Q(s)$, $U(s)$.

Окончательно решения имеют вид

$$u(r, z) = \frac{1}{2\pi\mu_0 z_0^2}\int_0^\infty \frac{(z_0 s)^2 [2sz_0(z - z_0) + s(z - 2z_0)]\, e^{-(z-z_0)s}}{zs[4(z_0 s)^2 + 12z_0 s + 6]} J_1(rs)\, ds$$

$$w(r, z) = \frac{1}{2\pi\mu_0 z_0^2}\int_0^\infty \frac{(z_0 s)^2 [2sz_0(z - z_0) + s(z + 2z_0) + 2]\, e^{-(z-z_0)s}}{zs[4(z_0 s)^2 + 12z_0 s + 6]} J_0(rs)\, ds$$

Пример 2. Толстая пластина под действием сосредоточенной силы. Коэффициенты Ламе возьмем в форме $\lambda = \lambda_0 / z$, $\mu = \mu_0 / z$, что соответствует решению 1. При $z = 0$ пластина абсолютно жесткая. Граничные условия

$$\tau_{rz}\Big|_{z=z_0} = 0, \quad \sigma_z\Big|_{z=z_0} = \delta(r), \quad u(r, z)\Big|_{z=0} = 0, \quad w(r, z)\Big|_{z=0} = 0$$

Используя фундаментальную систему решений (2.3), получим решение на границе $z = z_0$ в форме

$$u(r) = \frac{1}{2\pi\mu_0 z_0}\int_0^\infty \frac{g[z_0 s(1 + \operatorname{ch}(2z_0 s)) - \operatorname{sh}(2z_0 s)]}{2z_0 s[z_0 s(g - 1)\chi + 2g \operatorname{sh}(2z_0 s) + 2z_0 s]} J_1(rs)\, ds$$

$$\chi = \int_0^{2z_0 s} \frac{\operatorname{ch}(k) - 1}{k}\, dk$$

Аналогичный вид имеет формула для $w(r)$.

Поступила 9 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ростовцев Н. А.* К теории упругости неоднородной среды. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
2. *Ростовцев Н. А., Храневская И. Е.* Решение задачи Буссинеска для полупространства при степенной зависимости модуля упругости от глубины. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
3. *Александров А. Я.* Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи зависимости между осесимметричным и плоским состояниями. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М. —Л., Гостехиздат, 1953.
5. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1966.