Прикладная математика и механика. Том. 37, 1973

УДК 539.3

ОДНО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО В ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИН

В. Л. Бердичевский

(Москва)

Построение оценок погрешности приближенных теорий пластин основано на неравенствах, связывающих трехмерную упругую энергию пластины и упругую энергию по двумерной приближенной теории.

В случае растяжения изотропной однородной линейно-упругой пластины постоянной толщины h в работе [1] доказано неравенство

$$E_0(u_\alpha) \leqslant E(w, w_\alpha) \tag{1}$$

Здесь E — трехмерная упругая энергия, w_α — тангенциальные составляющие вектора перемещений, w — перемещение по нормали к пластине[1], E_0 — упругая энергия по теории плоско-напряженного состояния, u_α — осредненные по толщине тангенциальные перемещения

$$u_\alpha = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} w_\alpha \, dx$$

При помощи (1) доказана асимптотическая точность при $h \to 0$ теории плоско-напряженного состояния [1].

Было бы естественного ожидать, что для изгиба пластин имеет место аналогичное неравенство

$$E_K(u) \leqslant E(w, w_\alpha) \tag{2}$$

где E_K — упругая энергия по теории Кирхгофа, u — осредненное по толщине поперечное перемещение.

Неравенство (2), однако, неверно[2]. В этом легко убедиться, положив, например, $w_\alpha = 0$, $w = u(x^\alpha)$ (x^α — координаты в срединной плоскости пластины). Тогда в левой части неравенства стоит квадратичная форма по $\partial^2 u / \partial x^\alpha \partial x^\beta$, а в правой — по $\partial u / \partial x^\alpha$. Как известно, вторые производные функции нельзя оценить сверху через первые в норме L_2.

Оказывается, что точную оценку снизу трехмерной упругой энергии изогнутой пластины дает упругая энергия E_R модели Рейсснера

$$E_R(u, \psi_\alpha) \leqslant E(w, w_\alpha) \tag{3}$$

---

[1] При растяжении w_α — четные, а w — нечетные функции поперечной координаты x, при изгибе w_α — нечетные, w — четные функции x.

[2] По-видимому, по этой причине Д. Моргенштерну при доказательстве асимптотической точности гипотез Кирхгофа [2] пришлось применить метод доказательства, отличающийся от использованного им метода в теории плоско-напряженного состояния [1].

где

$$u = \int_{-h/2}^{h/2} \left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right) w dx \Big/ \int_{-h/2}^{h/2} \left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right) dx$$

(4) $$\psi_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} x w_\alpha dx \Big/ \int_{-h/2}^{h/2} x^2 dx$$

Данная работа посвящена доказательству неравенства (3) и некоторым вытекающим из этого неравенства оценкам.

Обозначим через Ω срединную плоскость пластины, через Γ границу Ω, через V область, занятую пластиной,

$$V = \{x,\ x^\alpha : x^\alpha \in \Omega,\ \ -h/2 \leqslant x \leqslant h/2\}$$

через U внутреннюю энергию единицы объема пластины

$$E = \int_V U dx^1 dx^2 dx$$

Для линейно-упругой изотропной однородной пластины внутреняя энергия U определена формулой

(5) $$2U = \lambda (\varepsilon_\alpha{}^\alpha)^2 + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta} + 2\lambda\varepsilon\varepsilon_\alpha{}^\alpha + (\lambda + 2\mu)\varepsilon^2 + 4\mu\varepsilon_\alpha\varepsilon^\alpha$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = w_{(\alpha,\beta)}, \qquad \varepsilon = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2\varepsilon_\alpha = w_{,\alpha} + \frac{\partial w_\alpha}{\partial x}$$

Здесь запятой перед греческими индексами отмечается дифференцирование по x^α, круглыми скобками в индексах — операция симметрирования.

Упругая энергия модели Рейсснера задается соотношениями

$$E_R = \int_\Omega \Phi dx^1 dx^2$$

$$2\Phi = \frac{h^3}{12} 2\mu \left[\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\psi^\sigma{}_{,\sigma})^2 + \psi_{(\alpha,\beta)}\psi^{(\alpha,\beta)}\right] + \frac{5}{6}\mu h (u_{,\alpha} + \psi_\alpha)(u^{,\alpha} + \psi^\alpha)$$

Оценка упругой энергии (3) для непрерывно дифференцируемых функций w, w^α вытекает из следующих неравенств:

1°. Обозначим через a_α величины

$$a_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_\alpha \left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right) dx$$

Тогда по неравенству Коши — Буняковского

(6) $$a_\alpha a^\alpha \leqslant \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_\alpha \varepsilon^\alpha dx \int_{-h/2}^{h/2} \left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right)^2 dx \equiv \frac{h^5}{30} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_\alpha \varepsilon^\alpha dx$$

Очевидно, что

(7) $$a_\alpha = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\partial w}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial w_\alpha}{\partial x}\right)\left(x^2 - \frac{h^2}{4}\right) dx = -\frac{h^3}{12} (u_{,\alpha} + \psi_\alpha)$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$\frac{5}{6}h(u_{,\alpha}+\psi_\alpha)(u^{,\alpha}+\psi^\alpha)\leqslant 4\int\limits_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_\alpha\varepsilon^\alpha dx \tag{8}$$

2°. Из неравенства Коши — Буняковского, определения ψ^α (4) и определения $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (5) имеем

$$\frac{h^3}{12}(\psi^\alpha_{,\alpha})^2\leqslant\int\limits_{-h/2}^{h/2}(\varepsilon_\alpha{}^\alpha)^2dx,\qquad \frac{h^3}{12}\psi_{(\alpha,\beta)}\psi^{(\alpha,\beta)}\leqslant\int\limits_{-h/2}^{h/2}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}dx \tag{9}$$

3°. Очевидно неравенство

$$-\frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}(\varepsilon_\alpha{}^\alpha)^2\leqslant 2\lambda\varepsilon_\alpha{}^\alpha\varepsilon+(\lambda+2\mu)\varepsilon^2 \tag{10}$$

Заменяя во внутренней энергии U слагаемые $2\lambda\varepsilon_\alpha{}^\alpha\varepsilon+(\lambda+2\mu)\varepsilon^2$ на меньшую величину $-(\varepsilon_\alpha{}^\alpha)^2\lambda^2/(\lambda+2\mu)$, интегрируя по области V и подставляя вместо интегралов по x от $(\varepsilon_\alpha{}^\alpha)^2$, $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_\alpha\varepsilon^\alpha$ не превосходящие их величины, согласно (8) и (9), придем к неравенству (3).

Неравенство (3) точное. Знак равенства в (3) имеет место, например, для функций вида ($u(x^\alpha)$ — произвольная гармоническая функция)

$$w=u(x^\alpha),\ w_\alpha=-u_{,\alpha}x\quad\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1{}^2}+\frac{\partial^2u}{\partial x_2{}^2}=0\right)$$

При помощи неравенства (3) можно построить энергетическую оценку погрешности приближенной теории Рейсснера. Для того чтобы не загромождать изложение техническими деталями, будем считать, что объемные силы отсутствуют, и возьмем простейшие краевые условия: при $x=\pm h/2$ поверхностные силы равны нулю, а на краю пластины $S=\{x,x^\alpha: x^\alpha\in\Gamma,\ -h/2\leqslant x\leqslant h/2\}$ перемещения заданы в форме

$$w|_S=u_\Gamma+\frac{1}{2}\chi_\Gamma\left(x^2-\frac{h^2}{20}\right),\quad w^\alpha|_S=\psi_\Gamma{}^\alpha x+\frac{1}{3}\theta_\Gamma{}^\alpha x\left(x^2-\frac{3h^2}{20}\right) \tag{11}$$

где u_Γ, χ_Γ, $\psi_\Gamma{}^\alpha$, $\theta_\Gamma{}^\alpha$ — известные функции на контуре Γ.

Точное решение задачи дается минимизирующим элементом w^*, $w_\alpha{}^*$ функционала E на множестве функций w, w_α, удовлетворяющих краевым условиям (11), приближенное решение — минимизирующим элементом u^{**}, $\psi_\alpha{}^{**}$ функционала E_R на множестве функций u, ψ_α, удвлетворяющих краевым условиям

$$u|_\Gamma=u_\Gamma,\quad \psi^\alpha|_\Gamma=\psi_\Gamma{}^\alpha \tag{12}$$

Предполагается, что минимизирующие функции непрерывно дифференцируемы.

Погрешность теории Рейсснера найдем методом двусторонних оценок. В теории пластин этот метод применялся в работах [1–3].

Метод двусторонних оценок заключается в установлении неравенств вида

$$E_R(u^{**},\psi_\alpha{}^{**})\leqslant E_R(u^*,\psi_\alpha{}^*)\leqslant E(w^*,w_\alpha{}^*)\leqslant E_R(u^{**},\psi_\alpha{}^{**})+F \tag{13}$$

где u^* и ψ_α^* определены по функциям w^*, w_α^* формулами (4). Из (13) в силу тождества

$$E_R(u^{**}-u,\ \psi_\alpha^{**}-\psi_\alpha)=E_R(u,\ \psi_\alpha)-E_R(u^{**},\ \psi_\alpha^{**})$$

которое имеет место для любых функций u, ψ_α, принимающих на Г те же значения, что и u^{**}, ψ_α^{**}, вытекает искомая оценка

$$E_R(u^{**}-u^*,\ \psi_\alpha^{**}-\psi_\alpha^*)\leqslant F \tag{14}$$

Таким образом, остается доказать (13) и получить выражение для F.

Второе неравенство в (13) вытекает из доказанного выше неравенства (3), первое — из того, что u^* и ψ_α^* принадлежат множеству функций, на котором минимизируется функционал E_R, а $E_R(u^{**},\ \psi_\alpha^{**})$ — его минимальное значение.

Для построения оценки $E(w^*, w_\alpha^*)$ сверху рассмотрим значения функционала E на полях перемещений вида

$$\begin{aligned} w&=u+\frac{1}{2}\chi\left(x^2-\frac{h^2}{20}\right)\\ w_\alpha&=\psi_\alpha x+\frac{1}{3}\theta_\alpha x\left(x^2-\frac{3h^2}{20}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

Получим [4]

$$\begin{aligned} E&=E_R(u,\ \psi_\alpha)+F\ (u,\ \psi_\alpha,\ \chi,\ \theta_\alpha)\\ F&=\frac{h^3}{24}\int\limits_\Omega\left\{(\lambda+2\mu)\left(\chi+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\psi^\sigma_{,\sigma}\right)^2+\right.\\ &+\frac{2\mu h^2}{25}\left[\theta_\alpha+\frac{5}{h^2}\left(u_{,\alpha}+\psi_\alpha+\frac{h^2}{10}\chi_{,\alpha}\right)\right]^2+\\ &\left.+\frac{h^4}{2100}\left[\lambda(\theta^\sigma_{,\sigma})^2+2\mu\theta_{(\alpha,\beta)}\theta^{(\alpha,\beta)}\right]\right\}dx^1dx^2\end{aligned} \tag{16}$$

Функция u соответствует функции u^* работы [4].

Положим в (15), (16) $u=u^{**}$, $\psi_\alpha=\psi_\alpha^{**}$, а функции χ и θ_α пока оставим произвольными, однако, для того чтобы поле перемещений (15) удовлетворяло краевым условиям (11), подчиним χ и θ_α ограничениям

$$\chi|_\Gamma=\chi_\Gamma,\quad \theta^\alpha|_\Gamma=\theta_\Gamma^\alpha \tag{17}$$

Тогда, поскольку за счет указанного выбора u, χ, ψ_α, θ_α поле перемещений (15) принадлежит множеству функций, на котором минимизируется функционал E, и $E(w^*, w_\alpha^*)$ — его минимальное значение, будет иметь место третье неравенство (13) и оценка (14). Функционал $F(u^{**}, \psi_\alpha^{**}, \chi, \theta_\alpha)$ в (13), (14) определен по формуле (16). Левая часть (14) не зависит от χ и θ_α, поэтому в качестве χ и θ_α можно брать любые функции, удовлетворяющие краевому условию (17), в том числе функции, доставляющие минимум функционалу F.

В частном случае, когда в краевых условиях (11) χ_Γ и θ_Γ^α выбраны так, что справедливы равенства

$$\begin{aligned}\chi_\Gamma&=-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\psi^{**\sigma}_{,\sigma}|_\Gamma\\ \theta_{\alpha\Gamma}&=-\frac{5}{h^2}\left(u^{**}_{,\alpha}+\psi_\alpha^{**}-\frac{h^2}{10}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\psi^{**\sigma}_{,\sigma\alpha}\right)\Big|_\Gamma\end{aligned} \tag{18}$$

в качестве χ и θ_α можно взять функции

$$\chi = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\psi^{**\sigma}_{,\sigma}$$

$$\theta_\alpha = -\frac{5}{h^2}\left(u^{**}_{,\alpha} + \psi_\alpha{}^{**} - \frac{h^2}{10}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\psi^{**;\sigma}_{,\sigma\alpha}\right)$$

При этом функционал F примет вид

$$F = \frac{h^7}{50\,400}\int\limits_\Omega (\lambda(\theta^\sigma_{,\sigma})^2 + 2\mu\theta_{(\alpha,\beta)}\theta^{(\alpha,\beta)})\,dx^1\,dx^2$$

Можно показать, что при u_Γ, не зависящем от параметра h и $|\psi_\Gamma{}^\alpha\tau_\alpha + du_\Gamma/ds| \leqslant ch^2$ (τ_α — вектор, касательный к Γ), функционал F имеет порядок h^6. Однако в общем случае, когда для χ_Γ и $\theta_\Gamma{}^\alpha$ формулы (18) не верны, за счет краевого эффекта F имеет порядок h^4.

Из полученных оценок следует, что модель Рейсснера является асимптотически точной в энергетической норме. Поскольку при $h \to 0$ модель Рейсснера переходит в модель Кирхгофа, из этих оценок следует также асимптотическая точность теории Кирхгофа.

В заключение отметим, что дословным повторением неравенство (3) и соответствующие оценки погрешности теории Рейсснера распространяются на однородные анизотропные пластинки постоянной толщины, имеющие в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости.

Для таких пластин упругая энергия единицы объема имеет вид

$$2U = A^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta} + 2A^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon + A\varepsilon^2 + 4G^{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta$$

Вместо неравенств (8) — (10) надо использовать неравенства

$$\frac{5}{6}hG^{\alpha\beta}(u_{,\alpha}+\psi_\alpha)(u_{,\beta}+\psi_\beta) \leqslant 4\int\limits_{-h/2}^{h/2} G^{\alpha\beta}\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta\,dx \tag{19}$$

$$\frac{h^3}{12}E^{\alpha\beta\gamma\delta}\psi_{(\alpha,\beta)}\psi_{(\gamma,\delta)} \leqslant \int\limits_{-h/2}^{h/2} E^{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\delta}\,dx,$$

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\alpha\beta\gamma\delta} - A^{-1}A^{\alpha\beta}A^{\gamma\delta}$$

$$-A^{-1}(A^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta})^2 \leqslant A^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon + A\varepsilon^2$$

Из неравенств (19) следует, что точная оценка снизу упругой энергии изогнутой анизотропной пластины дается упругой энергией E_R, определенной по формуле

$$E_R = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega\left[\frac{h^3}{12}E^{\alpha\beta\gamma\delta}\psi_{(\alpha,\beta)}\psi_{(\gamma,\delta)} + \frac{5}{6}hG^{\alpha\beta}(u_{,\alpha}+\psi_\alpha)(u_{,\beta}+\psi_\beta)\right]dx^1dx^2$$

Поступила 20 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Morgenstern D.* Mathematische Begründung des Scheibentheorie. Arch. Ration Mech, and Analysis, 1959, Bd. 3, Nr 1.
2. *Morgenstern D.* Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie, Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, Bd. 4, S. 145—152.
3. *Мосолов П. П.* Асимптотическая теория тонких прямолинейных панелей. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 2.
4. *Бердичевский В. Л.* Об уравнениях, описывающих поперечные колебания тонких упругих пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6.