Прикладная математика и механика. Том. 37, 1973

УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НАПРЯЖЕННОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ НЕЛИНЕЙНОГО УПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

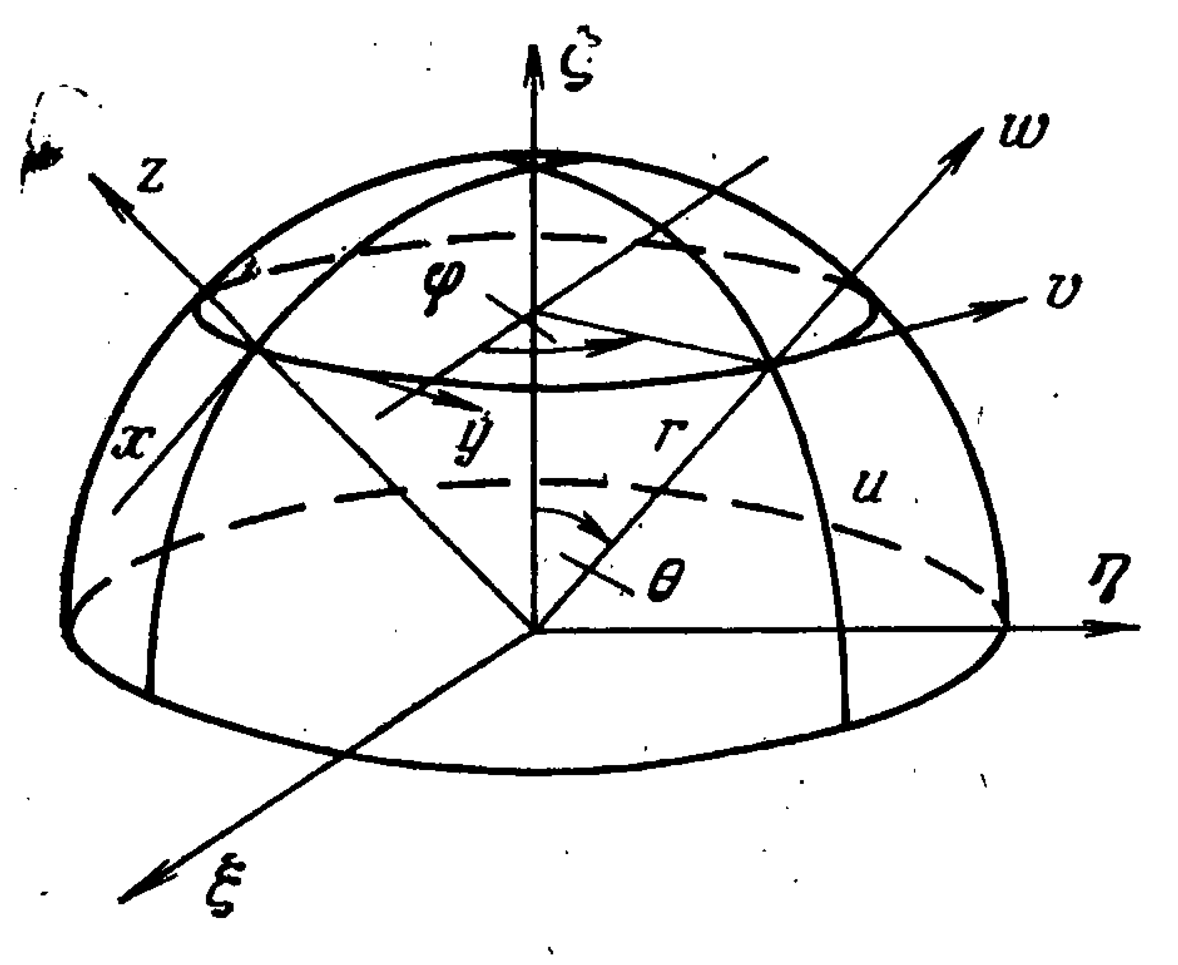
И. И. Ворович, Н. И. Минакова

(Ростов-на-Дону)

Дается последовательный вывод основных уравнений осесимметричной деформации сферической оболочки из нелинейного упругого материала в предположении малости относительных удлинений по сравнению с единицей и при произвольных углах поворота.

Наиболее распространенные варианты краевых задач для исследования непологих оболочек при больших деформациях были предложены в [1–5]. Общая формулировка краевых задач для исследования непологих оболочек при больших деформациях имеется в работах [6, 7]. Во всех этих работах учитывается лишь геометрическая нелинейность. В данной работе приводятся уравнения и граничные условия осесимметричной деформации непологой сферической оболочки при конечных перемещениях с учетом физической нелинейности.

1. Рассмотрим сферическую оболочку радиуса R, толщиной h в сферических координатах $r\theta\varphi$. Пусть u, w — компоненты вектора перемещений (фиг. 1), в данном случае функции лишь r, θ. Из всех компонентов конечной деформации отличны от нуля ε_{rr}, $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{r\theta}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}$, для них имеют место следующие соотношения:



Фиг. 1

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \tag{1.1}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w\right) + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w\right)^2 + \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u\right)^2 \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}(w\sin\theta + u\cos\theta) + \frac{1}{2r^2\sin^2\theta}(w\sin\theta + u\cos\theta)^2 \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right) + \frac{\partial w}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{1}{r} \tag{1.4}$$

Угол поворота нормали к срединной поверхности $r = R$ дается следующим соотношением:

$$\omega = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{u}{r} \tag{1.5}$$

Упростим соотношения (1.1) — (1.4), предполагая, что относительные удлинения и сдвиги пренебрежимо малы по сравнению с единицей. Тогда из соотношения (1.1) получим, что величина $\partial w / \partial r \sim \varepsilon_{rr}$ и, следовательно, также пренебрежимо мала по сравнению с единицей. На основании этого можно пренебречь вторым слагаемым в (1.1). Аналогично заключаем, что второй член в формуле (1.3) также может быть отброшен. Далее, поскольку установлено, что $\partial w / \partial r \ll 1$, в формуле (1.4) третьим членом можно пренебречь по сравнению с первыми двумя.

Таким образом, в предположении, что относительные удлинения и сдвиги значительно меньше единицы, упрощенные компоненты конечной деформации имеют вид

$$(1.6) \qquad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial w}{\partial r}, \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r \sin\theta}(w \sin\theta + u\cos\theta)$$

$$(1.7) \qquad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}$$

2. Рассмотрим тонкую оболочку, тогда будут справедливы гипотезы Кирхгофа, которые формулируются в следующем виде:

$$(2.1) \qquad u = u_0 + zu_1, \qquad w = w_0, \qquad z = r - R$$

$$(2.2) \qquad \varepsilon_{r\theta} = 0, \qquad \sigma_r = 0$$

В формулах (2.1) u_0, u_1, w_0 зависят только от θ, а R — радиус срединной поверхности оболочки.

Подставив соотношения (2.1) в (1.7) и учтя (2.2), получим при $|z| \ll R$

$$(2.3) \qquad u_1 = \frac{1}{R}\left(u_0 - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)$$

С учетом (2.3) формулы для компонентов перемещений и деформации запишем в виде

$$(2.4) \qquad u = u_0 - \frac{z}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta}, \qquad w = w_0$$

$$(2.5) \qquad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial w_0}{\partial r} = 0, \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} + z\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}, \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + z\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}$$

Здесь

$$(2.6) \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} = \frac{1}{R\sin\theta}(w_0 \sin\theta + u_0\cos\theta), \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} = -\frac{\operatorname{ctg}\theta}{R^2}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + w_0\right) + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial \theta} - u_0\right)^2 + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + w_0\right)^2$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = -\frac{1}{R^2}\left[\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta} + w_0\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}\right]$$

3. Будем предполагать, что материал оболочки нелинейно упругий, а его механические свойства характеризуются функцией $\Pi(\varepsilon_{ij})$, дающей плотность потенциальной энергии, накопленной в единице объема, если компоненты тензора конечной деформации приняли заданные значения ε_{ij}. Очевидно, эта функция полностью характеризует механические свойства материала оболочки.

Используя известные соотношения Кастильяно, а также второе соотношение (2.2), получим

$$(3.1) \qquad \sigma_{rr} = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{rr}} = 0$$

Из (3.1) выразим ε_{rr} через остальные компоненты тензора конечной деформации и подставим это выражение снова в П. Тогда получим функцию П*, выраженную через остальные пять компонентов тензора конечной деформации.

Допустим далее, что в П подставлены выражения для компонентов тензора конечной деформации, упрощенные в соответствии с единицей и гипотезами Кирхгофа. Окончательно имеем

$$\Pi^* = \Pi^* [\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} + z\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}, \ \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + z\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}] \tag{3.2}$$

Для дальнейшего важно вычислить величину W^* — потенциальную энергию, накопленную во всем объеме оболочки при ее деформации. В сделанных предположениях имеем

$$W^* = \int_{(V)} \Pi^* r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \int_{(s)} \Pi^* \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2 \sin\theta dz d\theta \tag{3.3}$$

Введем в рассмотрение величину W, определяемую соотношением

$$W = \int_{-h/2}^{h/2} \Pi^* \left(1 + \frac{z}{R}\right)^2 dz \approx \int_{-h/2}^{h/2} \Pi^* dz \tag{3.4}$$

Очевидно, что W зависит от $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}$, $\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}$, $\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}$.

Таким образом, окончательно для внутренней энергии деформации оболочки получаем

$$W^* = 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} W \sin\theta d\theta \tag{3.5}$$

4. Имея в виду использовать принцип возможных перемещений для вывода уравнений равновесия оболочки, вычислим вариацию W^* при варьировании перемещений u_0, w_0. Имеем

$$\delta W^* = 2\pi R^2 \delta \int_0^{\theta_0} W \sin\theta d\theta = 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} [T_1 \delta\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} + T_2 \delta\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} + M_2 \delta\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} + M_1 \delta\varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}] \sin\theta d\theta \tag{4.1}$$

$$T_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{(0)}}, \quad T_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}}, \quad M_1 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)}}, \quad M_2 = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)}} \tag{4.2}$$

Если учесть соотношения (2.5), (2.6) и произвести в (4.1) интегрирование по частям, перебрасывая производные с u_0, w_0, получим, учитывая, что $M_1 = M_2$, $\varepsilon_{\theta\theta}^{(0)} = 0$ при $\theta = 0$.

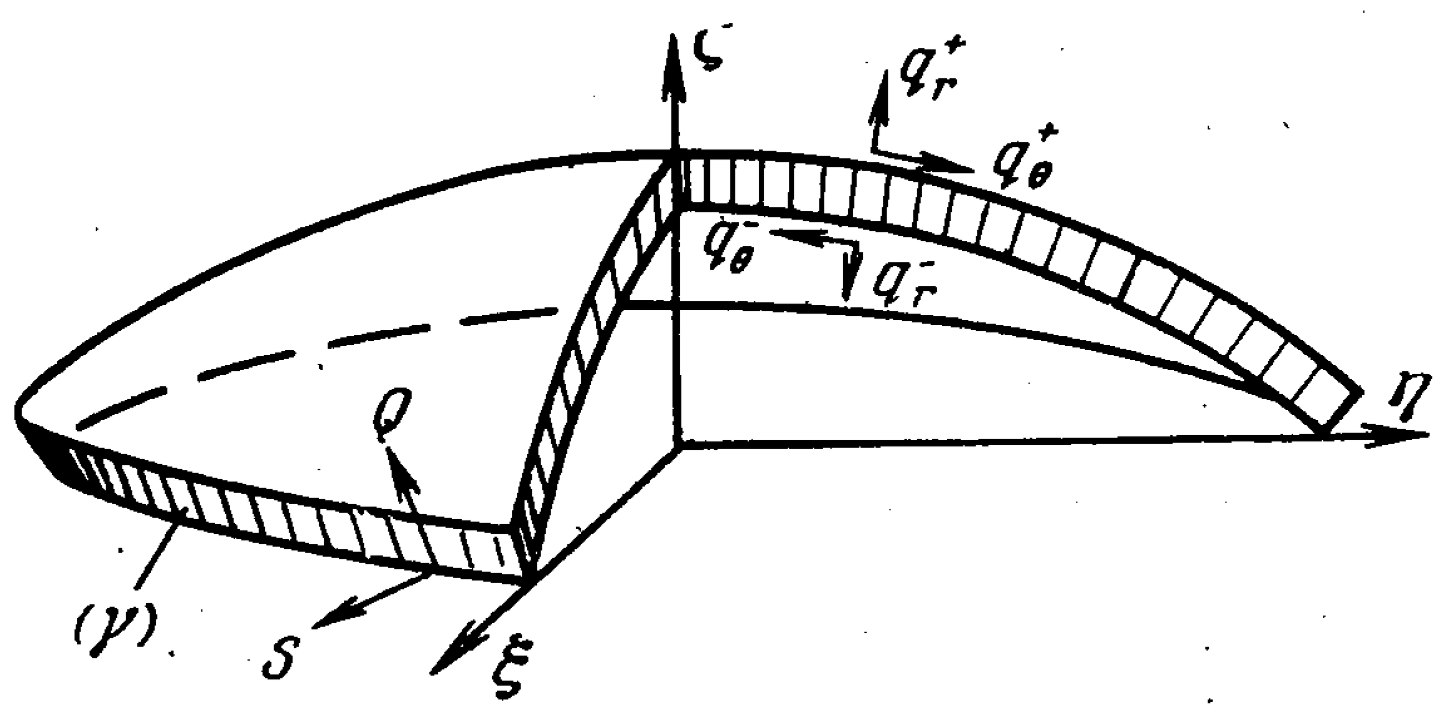
$$\delta W^* = 2\pi R^2 \left\{ \int_0^{\theta_0} (T\delta u_0 + N\delta w_0) d\theta + \left[T_1 \frac{\sin\theta}{R} + T_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right) \frac{\sin\theta}{R^2} - M_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2} \frac{\sin\theta}{R^3} \right]_{\theta=\theta_0} \delta u_0 + \left[T_1 \left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta} - u_0\right) \frac{\sin\theta}{R^2} + \frac{\partial}{\partial\theta}(M_1 \sin\theta) \frac{1}{R^2} - M_2 \frac{\cos\theta}{R^2} + \frac{1}{R^3} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(M_1 \sin\theta \left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right)\right) \right]_{\theta=\theta_0} \delta w_0 - \left[M_1 \frac{\sin\theta}{R^2} + M_1 \frac{\sin\theta}{R^3} \left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right) \right]_{\theta=\theta_0} \delta \frac{\partial w_0}{\partial\theta} \tag{4.3}$$

Здесь T и N даются следующими соотношениями:

$$T = T_2 \frac{\cos\theta}{R} - \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}(T_1 \sin\theta) - T_1\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta} - u_0\right)\frac{\sin\theta}{R^2} - \tag{4.4}$$
$$- \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[T_1 \sin\theta\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right) + \frac{1}{R^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(M_1 \sin\theta \frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}\right)\right]$$

$$N = T_2 \frac{\sin\theta}{R} + T_1 \frac{\sin\theta}{R} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[T_1 \sin\theta\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta} - u_0\right)\right] + \tag{4.5}$$
$$+ \frac{\sin\theta}{R^2} T_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}(M_2 \cos\theta) - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(M_1 \sin\theta) -$$
$$- \frac{1}{R^3} M_1 \frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}\sin\theta - \frac{1}{R^3}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[M_1 \sin\theta\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right)\right]$$

5. Обратимся к вычислению элементарной работы внешних сил, приложенных к оболочке на возможных перемещениях. Допустим, что к граничной сфере оболочки $z = h/2$ приложена система напряжений q_r^+, q_θ^+, а к граничной сфере $z = -h/2$ — система q_r^-, q_θ^-. Указанные нагрузки могут зависеть не только от координаты θ, но и от перемещений u, w. В рассматриваемом случае элементарная работа δA_1 этих усилий на возможных перемещениях выражается соотношением



Фиг. 2

$$\delta A_1 = 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} \left\{\left[q_\theta^+ \delta u\left(+\frac{h}{2}\right) + q_r^+ \delta w\left(+\frac{h}{2}\right)\right]\left(1 + \frac{h}{2R}\right) + \right. \tag{5.1}$$
$$\left. + \left[q_\theta^- \delta u\left(-\frac{h}{2}\right) + q_r^- \delta w\left(-\frac{h}{2}\right)\right]\left(1 - \frac{h}{2R}\right)\right\}\sin\theta d\theta$$

Подставим в (5.1) соотношения для δu и δw из (2.4) и, отбрасывая несущественные члены порядка h / R, имеем

$$\delta A_1 = 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} \left(q_\theta \delta u_0 + q_r \delta w_0 + q_r^* \delta \frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right)\sin\theta d\theta \tag{5.2}$$

$$q_\theta = q_\theta^+ + q_\theta^-, \quad q_r = q_r^+ + q_r^-, \quad q_r^* = \frac{h}{2R}(q_\theta^+ - q_\theta^-)$$

Окончательно для δA_1 из (5.2) получаем следующее выражение:

$$\delta A_1 = 2\pi R^2 \int_0^{\theta_0} \left\{q_\theta \delta u_0 + \left[q_r \frac{\partial q_r^*}{\partial\theta} - q_r^* \operatorname{ctg}\theta\right]\delta w_0\right\}\sin\theta d\theta + \tag{5.3}$$
$$+ 2\pi R^2 q_r^* \sin\theta_0 \delta w_0$$

Имеем

$$\delta A_2 = \int_{(\gamma)} [Q(r)\delta w + S(r)\delta u]\, r dr\, d\varphi \tag{5.4}$$

где γ — поверхность торцевого среза (фиг. 2). Подставив в (5.4) соотношение (2.4) и пренебрегая, где возможно, величинами порядка h / R

получим

$$
\delta A_2 = 2\pi R \int\limits_{-h/2}^{h/2} \left[Q(r)\,\delta w_0\, S(r)\,\delta u_0 - S(r)\,\frac{z}{R}\,\delta\,\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right] dz =
\tag{5.5}
$$

$$
= 2\pi R \left[Q^*\delta w_0 + S^*\delta u_0 - S^{**}\delta\,\frac{\partial w_0}{\partial\theta}\right]_{\theta=\theta_0}
$$

$$
Q^* = \int\limits_{-h/2}^{h/2} Q(r)\,dz, \qquad S^* = \int\limits_{-h/2}^{h/2} S(r)\,dz, \qquad S^{**} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} S(r)\,\frac{z\,dz}{R}
$$

6. Запишем в сделанных предположениях принцип возможных перемещений Лагранжа

$$
\delta W^* - \delta A_1 - \delta A_2 = 0 \tag{6.1}
$$

В соответствии с (4.5), (5.3) и (5.5) считая вариации δu_0 и δw_0 независимыми, получим из (6.1) следующие уравнения и граничные условия:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial T_1}{\partial\theta} + (T_1 - T_2)\operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial T_1}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right) + T_1\omega + \\
+ \frac{1}{R}T_1\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + \frac{\partial w_0}{\partial\theta} + w_0\operatorname{ctg}\theta\right) - \frac{1}{R^2}\frac{\partial M_1}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2} - \\
- \frac{1}{R^2}M_1\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial\theta^3} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}\right) + q_\theta R = 0 \\
\frac{\partial^2 M_1}{\partial\theta^2} + \left(\frac{\partial M_1}{\partial\theta} - \frac{\partial M_2}{\partial\theta}\right)\operatorname{ctg}\theta + \frac{\partial M_1}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta - (M_1 - M_2) + \\
+ \frac{1}{R}\frac{\partial^2 M_1}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right) + \frac{2}{R}\frac{\partial M_1}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + \frac{\partial w_0}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\, w_0\right) + \\
+ \frac{1}{R}M_1\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial\theta^3} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2} - \frac{\partial u_0}{\partial\theta} + 2\,\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial w_0}{\partial\theta} - w_0\right) - \\
- R(T_1 + T_2) + \frac{\partial T_1}{\partial\theta}\left(\frac{\partial w_0}{\partial\theta} - u_0\right) - T_1\left(2\,\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + u_0\operatorname{ctg}\theta - \frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2} - \right. \\
\left. - \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial w_0}{\partial\theta} + w_0\right) + \left(q_r - \frac{\partial q_r^*}{\partial\theta}\right)R^2 - q_r^*\operatorname{ctg}\theta R^2 = 0 \\
\left\{\left[T_1 + T_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right)\frac{1}{R} - M_1\,\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}\,\frac{1}{R^2}\right]\sin\theta - S^*\right\}_{\theta=\theta_0} = 0 \\
\left\{T_1 R\omega\sin\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}(M_1\sin\theta) - M_2\cos\theta + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[M_1\sin\theta\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right)\right] - \right. \\
\left. - RQ^* + q_r^* R^2\sin\theta\right\}_{\theta=\theta_0} = 0 \\
\left[M_1\sin\theta + M_1\sin\theta\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right) + RS^{**}\right]_{\theta=\theta_0} = 0
\end{gathered}
\tag{6.2}
$$

Второе из уравнений (6.2) можно упростить, если из первого определить выражение $T_1\operatorname{ctg}\theta + \partial T_1 / \partial\theta$ и подставить во второе. Тогда получим

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 M_1}{\partial\theta^2} + \frac{\partial(M_1 - M_2)}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta + \frac{\partial M_1}{\partial\theta}\operatorname{ctg}\theta - (M_1 - M_2) + \\
+ \frac{1}{R}\frac{\partial^2 M_1}{\partial\theta^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right) + \frac{2}{R}\frac{\partial M_1}{\partial\theta}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + \frac{\partial w_0}{\partial\theta} + w_0\operatorname{ctg}\theta\right) + \\
+ \frac{1}{R}M_1\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial\theta^3} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2} - \frac{\partial u_0}{\partial\theta} + 2\,\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\,\frac{\partial w_0}{\partial\theta} - w_0\right) - \\
- R(T_1 + T_2) + \omega\left[RT_2\operatorname{ctg}\theta - \frac{\partial T_1}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\theta} + w_0\right) - RT_1\omega - \right.
\end{gathered}
$$

$$-T_1\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial\theta^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial u_0}{\partial\theta}+\frac{\partial w_0}{\partial\theta}+w_0\operatorname{ctg}\theta\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial M_1}{\partial\theta}\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}+$$
$$+M_1\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial\theta^3}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}\right)-q_\theta R\Big]-T_1\left(2\frac{\partial u_0}{\partial\theta}-\frac{\partial^2 w_0}{\partial\theta^2}+w_0\right)+$$
$$+\left(q_r-\frac{\partial q_r^*}{\partial\theta}\right)R^2-q_r^*\operatorname{ctg}\theta R^2=0$$

К уравнениям (6.2) следует присоединить соотношения (4.2). Тогда получим систему уравнений и граничных условий для определения u_0, w_0, T_1, T_2, M_1, M_2. Эту систему часто удобно интегрировать непосредственно в приведенном здесь виде. В некоторых случаях целесообразно исключить статические факторы посредством соотношений (4.2). В результате получим систему двух уравнений относительно u_0, w_0. Ее целесообразно использовать, если заданы чисто геометрические условия. На основании полученных краевых задач можно, в частности, исследовать влияние непологости и физической нелинейности на критическое состояние оболочки.

Поступила 9 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Reissner E.* On the theory of thin elastic shells. H. Reissner Anniversary Volume, Contributions to Appl. Mech., Michigan, J. W. Edwards, Ann., Arbor., 1949.
2. *Reissner E.* On axisymmetrical deformations of thin shells of revolution. Proc. Appl. Math., 1950, vol. 3, pp. 27—52.
3. *Reissner E.* On the equations for finite symmetrical Deflections of thin shells of revolution. Progr. Appl. Mech., N. Y., Macmillan Co., London, Collier Macmillan, Ltd, 1963.
4. *Reissner E.* On finite symmetrical defections of thin shells of revolution Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, No. 2.
5. *Rreissner E., Wan F. Y. M.* Rotationally symmetric stress and strain in shells of evolution. Stud. Appl. Math., 1969, vol. 48, № 1.
6. *Sanders J. L.* Nonlinear theories for thin shells. Quart. Appl. Math., 1963, vol. 21, No. 1.
7. *Koiter W. T.* On the nonlinear theory of thin elastic shells. Proc. Koninkl. nederl. acad. wet. C, 1966, Bd 69, Nr 1.