Прикладная математика и механика. Том. 37, 1973

УДК 539.3

# КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА КАЧЕНИЯ ВЯЗКО-УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ПО ОСНОВАНИЮ ИЗ ТОГО ЖЕ МАТЕРИАЛА

И. Г. Горячева

(Москва)

Решается задача о качении вязко-упругого цилиндра по основанию из того же материала в предположении, что вся площадка контакта состоит из двух участков: участка со сцеплением и участка со скольжением соприкасающихся поверхностей. Найдены уравнения для определения длины площадки контакта и участка сцепления, а также выражения для напряжений на площадке контакта.

Еще Рейнольдс [1] отмечал, что при качении упругих тел происходит относительное скольжение соприкасающихся поверхностей вследствие их деформации. Важное значение сил трения скольжения на контакте, возникающих в связи с разницей в кривизнах контактируемых поверхностей, подтверждают результаты экспериментов [2, 3]. Во многих случаях не менее важна несовершенная упругость реальных материалов [4]. При качении цилиндра по основанию из вязко-упругого материала деформации материала впереди и позади движущегося цилиндра различны, что обусловлено наличием последействия. Вследствие этого происходит смещение зоны контакта в направлении движения и имеет место несимметричное распределение давления цилиндра на основание на площадке контакта. В результате возникает момент трения качения.

Ниже рассматривается одновременное действие указанных выше причин, влияющих на сопротивление качению.

Соотношения между компонентами деформации и напряжения в изотропном вязко-упругом теле примем в следующем виде:

$$\varepsilon_{x^\circ} + \alpha \frac{\partial \varepsilon_{x^\circ}}{\partial t} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{x^\circ} + \beta \frac{\partial \sigma_{x^\circ}}{\partial t}\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{y^\circ} + \beta \frac{\partial \sigma_{y^\circ}}{\partial t}\right)$$

$$\varepsilon_{y^\circ} + \alpha \frac{\partial \varepsilon_{y^\circ}}{\partial t} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{y^\circ} + \beta \frac{\partial \sigma_{y^\circ}}{\partial t}\right) - \frac{\nu}{E}\left(\sigma_{x^\circ} + \beta \frac{\partial \sigma_{x^\circ}}{\partial t}\right)$$

$$\gamma_{x^\circ y^\circ} + \alpha \frac{\partial \gamma_{x^\circ y^\circ}}{\partial t} = \frac{2(1+\nu)}{E}\left(\tau_{x^\circ y^\circ} + \beta \frac{\partial \tau_{x^\circ y^\circ}}{\partial t}\right)$$

Здесь $\alpha$ и $\beta$ — параметры, характеризующие вязкие свойства среды ($\alpha > \beta$).

Пусть вязко-упругий цилиндр движется по вязко-упругому основанию со скоростью $w$, которая много меньше скорости звука в вязко-упругом теле, что позволяет пренебречь инерционными членами в уравнениях равновесия. Считая, что радиус кривизны цилиндра $R$ велик по сравнению с размерами площадки контакта, заменим цилиндр верхней полуплоскостью. Будем рассматривать задачу о контакте двух полуплоскостей, причем площадка контакта перемещается по ним со скоростью $w$.

Введем подвижную систему координат

$$x = x^\circ - wt, \qquad y = y^\circ$$

При равномерном движении цилиндра движение среды можно считать установившимся по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром цилиндра. Тогда смещения и напряжения не будут зависеть явно от времени и будут функциями только координат. Обозначим

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{ij} + \alpha \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \varepsilon_{ij} - \alpha w \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} = \varepsilon_{ij}^* (x, y) \\ &\sigma_{ij} + \beta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = \sigma_{ij} - \beta w \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} = \sigma_{ij}^* (x, y) \\ &u - \alpha w \frac{\partial u}{\partial x} = u^* (x, y) \\ &v - \alpha w \frac{\partial v}{\partial x} = v^* (x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

Для введенных таким образом величин $\varepsilon_x^*$, $\varepsilon_y^*$, $\gamma_{xy}^*$, $\sigma_x^*$, $\sigma_y^*$, $\tau_{xy}^*$ будут выполняться уравнения, эквивалентные уравнениям равновесия, совместности деформаций и закону Гука для изотропного упругого тела.

Будем считать, что вся площадка контакта состоит из двух участков: на одном из них, $(-a, c)$, имеет место скольжение соприкасающихся поверхностей, на другом, $(c, b)$, — сцепление. Вследствие малости деформаций граничные условия на поверхности будем относить к недеформированному состоянию среды $(y = 0)$. Между нормальными перемещениями на площадке контакта имеет место такое соотношение [5]:

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)_{y=0} = -f'(x) \tag{2}$$

Здесь $v_1$ и $v_2$ — нормальные перемещения цилиндра и полуплоскости соответственно, а $f(x)$ — уравнение контура цилиндра до деформации. Вследствие малости деформаций примем $f(x) = x^2 / 2R$.

Кроме того, на участке проскальзывания $(-a, c)$ имеет место линейное соотношение между нормальным давлением $\sigma_y$ и тангенциальными усилиями $\tau_{xy}$, действующими в нижней полуплоскости

$$\tau_{xy} + \rho\sigma_y = 0$$

где $\rho$ — коэффициент трения скольжения.

На участке сцепления $(c, b)$ равны скорости горизонтальных перемещений точек цилиндра $w - \omega R + du_1 / dt$ ($\omega$ — угловая скорость вращения цилиндра) и точек полуплоскости $du_2 / dt$. В системе координат, связанной с цилиндром, условие равенства скоростей запишется следующим образом:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)_{y=0} = \delta, \qquad \delta = \frac{\omega R - w}{w}$$

На движущийся цилиндр действуют нормальное давление $P$, уравновешивающее вес единицы длины цилиндра, и вращающий момент $M$. Поверхность вязко-упругого тела вне площадки контакта свободна от усилий.

Введем в нижней полуплоскости две функции комплексной переменной $w_1(z)$ и $w_2(z)$, являющиеся интегралами типа Коши, плотности которых равны соответственно величинам нормального давления и тангенциальных усилий, действующих на границе полуплоскости

$$w_1(z) = U_1 - iV_1 = \int_{-a}^{b} (\sigma_y{}^*)_{y=0} \frac{dt}{t-z}$$

$$w_2(z) = U_2 - iV_2 = \int_{-a}^{b} (\tau_{xy}^*)_{y=0} \frac{dt}{t-z}$$

причем на бесконечности

$$w_1(z) \sim -\frac{P}{z} + o\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad w_2(z) \sim -\frac{Q}{z} + o\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

$$P = \int_{-a}^{b} (\sigma_y)_{y=0}\, dx, \qquad Q = \int_{-a}^{b} (\tau_{xy})_{y=0}\, dx$$

Здесь учтено, что напряжения на границе площадки контакта в точках $-a$ и $b$ должны быть равны нулю вследствие гладкости контура катка.

Выразив изображения давления $(\sigma_y{}^*)_{y=0}$, тангенциальных усилий $(\tau^*{}_{xy})_{y=0}$, производных от перемещений $(\partial u_1{}^* / dx)_{y=0}$, $(\partial u_2{}^* / \partial x)_{y=0}$, $(\partial v_1{}^* / \partial x)_{y=0}$, $(\partial v_2{}^*/\partial x)_{y=0}$ через действительные и мнимые части функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$ [5] и подставив их в граничные условия, несколько видоизмененные с учетом (1), получим задачу сопряжения для отыскания двух аналитических в нижней полуплоскости функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$

$$\begin{aligned}
&V_1 = 0, \quad V_2 = 0, \quad -\infty < x < -a,\ b < x < +\infty \\
&U_1 = -(x - \alpha w)/KR, \quad V_2 = -\rho V_1, \quad -a < x < c \\
&U_1 = -(x - \alpha w)/KR, \quad U_2 = \delta / K, \quad c < x < b \\
&(K = 4(1 - \nu^2) / \pi E)
\end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $E$ — модуль Юнга, $\nu$ — коэффициент Пуассона материалов цилиндра и основания.

Функции, решающие задачу линейного сопряжения с перечисленными условиями (3), имеют вид

$$\begin{aligned}
w_1(z) = &-\frac{1}{\sqrt{(z+a)(z-b)}} \int_{-a}^{b} \frac{x - \alpha w}{\pi KR} \sqrt{(a+x)(b-x)}\, \frac{dx}{x-z} - \\
&- \frac{C_1}{\sqrt{(z+a)(z-b)}} = U_1 - iV_1 \\
w_2(z) = &-\sqrt{\frac{z-c}{z-b}} \left[ \int_{-a}^{c} \frac{\rho}{\pi} (V_1)_{y=0} \sqrt{\frac{b-x}{c-x}}\, \frac{dx}{x-z} - \right. \\
&\left. - \frac{\delta}{\pi K} \int_{c}^{b} \sqrt{\frac{b-x}{x-c}}\, \frac{dx}{x-z} \right] - \frac{C_2}{\sqrt{(z-c)(z-b)}} = U_2 - iV_2
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $C_1$ и $C_2$ — некоторые постоянные, с которыми входят решения однородной задачи сопряжения. Из условий на бесконечности сразу следует, что $C_1 = P$. Найденные функции на действительной оси обладают интегрируемыми особенностями, но это обстоятельство не повлечет за собой нерегулярности компонент напряжений.

Изображения напряжений на площадке контакта выражаются через мнимые части функций $w_1(z)$ и $w_2(z)$ по формулам

$$(\sigma_y^*)_{y=0} = \frac{1}{\pi}(V_1)_{y=0}, \qquad (\tau_{xy}^*)_{y=0} = \frac{1}{\pi}(V_2)_{y=0}$$

Отделяя в (4) мнимые части при $z = x - i0$, получим, при $-a < x < b$

$$(V_1)_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{(a+x)(b-x)}} \int\limits_{-a}^{b} \frac{t-\alpha w}{\pi KR} \sqrt{(a+t)(b-t)} \frac{dt}{t-x} + \frac{P}{\sqrt{(a+x)(b-x)}} \tag{5}$$

на участке проскальзывания $-a < x < c$

$$(V_2)_{y=0} = -\rho(V_1)_{y=0} \tag{6}$$

на участке сцепления $c < x < b$

$$(V_2)_{y=0} = \sqrt{\frac{x-c}{b-x}}\left[\int\limits_{-a}^{c} \frac{\rho}{\pi} V_1(t)|_{y=0} \sqrt{\frac{b-t}{c-t}} \frac{dt}{t-x} - \frac{\delta}{\pi K}\int\limits_{c}^{b} \sqrt{\frac{b-t}{t-c}} \frac{dt}{t-x}\right] + \frac{C_2}{\sqrt{(x-c)(b-x)}}$$

Вычислив интеграл

$$\int\limits_{-a}^{b} \frac{t-\alpha w}{\pi KR} \sqrt{(a+t)(b-t)} \frac{dt}{t-x} = \frac{(a+b)^2}{8KR} + \frac{(x-\alpha w)(b-a-2x)}{2KR} - \begin{cases} \dfrac{x-\alpha w}{KR}(b-x)\left|\dfrac{a+x}{b-x}\right|^{1/2} & -\infty < x < -a,\ b < x < +\infty \\ 0, \quad -a < x < b \end{cases} \tag{7}$$

для функции $(V_1)_{y=0}$ (5) при $-a < x < b$ получим следующее выражение:

$$(V_1)_{y=0} = \frac{1}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}\left[\frac{(a+b)^2}{8KR} + \frac{(x-\alpha w)(b-a-2x)}{2KR} + P\right] = \pi(\sigma_y^*)_{y=0} \tag{8}$$

Введем обозначение

$$F(x) = \frac{(a+b)^2}{8KR} + \frac{(x-\alpha w)(b-a-2x)}{2KR} + P \tag{9}$$

и вычислим значения интегралов

$$\int\limits_{-a}^{c} V_1(t)|_{y=0} \sqrt{\frac{b-t}{c-t}} \frac{dt}{t-x} = \frac{\pi}{2KR}(b-c-2x+2\alpha w) + \begin{cases} \dfrac{\pi F(x)}{c-x}\left|\dfrac{c-x}{a+x}\right|^{1/2}, & -\infty < x < -a, \quad c < x < +\infty \\ 0, \quad -a < x < c \end{cases} \tag{10}$$

$$\int\limits_{c}^{b} \sqrt{\frac{b-t}{t-c}} \frac{dt}{t-x} = \begin{cases} -\pi\left[1 - \left|\dfrac{b-x}{c-x}\right|^{1/2}\right], & -\infty < x < c,\ b < x < +\infty \\ -\pi \quad c < x < b \end{cases}$$

Тогда на участке сцепления

$$(V_2)_{y=0} = -\rho(V_1)_{y=0} + \left[\frac{\rho}{2KR}(b-c-2x+2\alpha w) + \frac{\delta}{K}\right]\times \tag{11}$$

$$\times\sqrt{\frac{x-c}{b-x}} + \frac{C_2}{\sqrt{(x-c)(b-x)}} = \pi(\tau_{xy}^*)_{y=0}$$

Зная выражения для изображений напряжений (8) и (11), воспользуемся (1) и найдем истинные напряжения в любой точке на площадке контакта, при $-a < x < b$

$$(\sigma_y)_{y=0} = -\frac{1}{\pi\beta w}\exp\left(\frac{x}{\beta w}\right)\int\limits_{-a}^{x}\left[\frac{(a+b)^2}{8KR} + \frac{(t-\alpha w)(b-a-2t)}{2KR} + P\right]\times \tag{12}$$

$$\times\frac{\exp\left(-\dfrac{t}{\beta w}\right)dt}{\sqrt{(a+t)(b-t)}}$$

на участке проскальзывания $-a < x < c$:

$$(\tau_{xy})_{y=0} = -\rho(\sigma_y)_{y=0}$$

на участке сцепления $c < x < b$

$$(\tau_{xy})_{y=0} = -\rho(\sigma_y)_{y=0} - \frac{1}{\pi\beta w}\exp\left(\frac{x}{\beta w}\right)\int\limits_{c}^{x}\left[\frac{\rho}{2KR}(b-c-2t+2\alpha w) + \right. \tag{13}$$

$$\left. + \frac{\delta}{K}\right]\sqrt{\frac{t-c}{b-t}}\exp\left(-\frac{t}{\beta w}\right)dt - \frac{C_2}{\pi\beta w}\exp\left(\frac{x}{\beta w}\right)\int\limits_{c}^{x}\frac{\exp\left(-\dfrac{t}{\beta w}\right)dt}{\sqrt{(t-c)(b-t)}}$$

В эти выражения входят четыре неизвестные постоянные — $a$, $b$, $c$, $C_2$. Их можно определить, удовлетворяя граничным условиям для истинных напряжений и перемещений в вязко-упругом теле.

Определяя $\partial v_1 / \partial x = v_{1x}'$ и $\partial v_2 / \partial x = v_{2x}'$ из уравнений

$$-\frac{\partial v_{ix}'}{\partial x} + \frac{1}{\alpha w}v_{ix}' = \frac{1}{\alpha w}(v_{ix}')^* \qquad (i = 1, 2)$$

будем иметь

$$(v_{1x}' + v_{2x}')_{y=0} = -\frac{1}{\alpha w}\exp\left(\frac{x}{\alpha w}\right)\int\limits_{-\infty}^{x}(v_{1x}' + v_{2x}')_{y=0}^*\exp\left(-\frac{t}{\alpha w}\right)dt = \tag{14}$$

$$= -\frac{1}{\alpha w}\exp\left(\frac{x}{\alpha w}\right)\int\limits_{-\infty}^{x}K(U_1)_{y=0}\exp\left(-\frac{t}{\alpha w}\right)dt$$

Деформации на бесконечном удалении от площадки контакта исчезают, поэтому должно выполняться следующее условие:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(U_1)_{y=0}\exp\left(-\frac{t}{\alpha w}\right)dt = 0 \tag{15}$$

Из (14) с учетом (2) и (15) для точки $x = b$ получим уравнение

$$-\frac{\alpha w b}{KR}\exp\left(-\frac{b}{\alpha w}\right) = \int\limits_{b}^{+\infty}(U_1)_{y=0}\exp\left(-\frac{t}{\alpha w}\right)dt \tag{16}$$

Отделив в функции $w_1(z)$ (4) в интервале $(b, +\infty)$ действительную часть и воспользовавшись (7), (9), найдем вид функции $(U_1)_{y=0}$ при $b < x < +\infty$

$$(U_1)_{y=0} = -\frac{F(x)}{\sqrt{(x+a)(x-b)}} - \frac{x-\alpha w}{KR}$$

После проведения всех необходимых вычислений и преобразований уравнение (16) примет вид

$$\left[P - \frac{(a+b)^2}{8KR}\right] K_0\left(\frac{a+b}{2\alpha w}\right) - \frac{b^2-a^2}{4KR} K_1\left(\frac{a+b}{2\alpha w}\right) = 0 \tag{17}$$

где $K_0(x)$ и $K_1(x)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента.

Второе уравнение для определения границ площадки контакта (точек $-a$ и $b$) получим из условия равенства нулю нормального давления в точке $b$

$$\int_{-a}^{b} (V_1)_{y=0} \exp\left(-\frac{x}{\beta w}\right) dx = 0$$

Подставляя сюда значение функции $(V_1)_{y=0}$ (8) и произведя интегрирование, получим уравнение, в которое входят бесселевы функции от мнимого аргумента $I_0(x)$ и $I_1(x)$

$$\left[P - \frac{(a+b)^2}{8KR}\right] I_0\left(\frac{a+b}{2\beta w}\right) + \left(\frac{b-a}{2} - \alpha w + \beta w\right)\frac{a+b}{2KR} I_1\left(\frac{a+b}{2\beta w}\right) = 0 \tag{18}$$

Обозначим: $l = a + b$ — длина площадки контакта, $d = (b - a)/2$— координата середины площадки контакта. Из (17) и (18) получим уравнение для определения длины площадки контакта $l$

$$\left[P - \frac{l^2}{8KR}\right]\left[I_0\left(\frac{l}{2\beta w}\right) K_1\left(\frac{l}{2\alpha w}\right) + K_0\left(\frac{l}{2\alpha w}\right) I_1\left(\frac{l}{2\beta w}\right)\right] + \tag{19}$$
$$+ w(\beta - \alpha)\frac{l}{2KR} I_1\left(\frac{l}{2\beta w}\right) K_1\left(\frac{l}{2\alpha w}\right) = 0$$

Координата середины площадки $d$ определяется следующим образом:

$$d = \left[P - \frac{l^2}{8KR}\right]\frac{2KR}{l} K_0\left(\frac{l}{2\alpha w}\right) \Big/ K_1\left(\frac{l}{2\alpha w}\right) \tag{20}$$

Найдем значения постоянных $c$ и $C_2$. Из условия равенства скоростей на участке сцепления получим уравнение

$$\int_{b}^{+\infty} (U_2)_{y=0} \exp\left(-\frac{x}{\alpha w}\right) dx = \frac{\delta\alpha w}{K} \exp\left(-\frac{b}{\alpha w}\right) \tag{21}$$

которое выводится аналогично (16). Из (4) и (10) определим вид функции $(U_2)_{y=0}$ при $b < x < +\infty$

$$(U_2)_{y=0} = -\left[\frac{\rho}{2KR}(b - c - 2x + 2\alpha w) + \frac{\delta}{K}\right]\sqrt{\frac{x-c}{x-b}} + \frac{\delta}{K} +$$
$$+ \frac{\rho F(x)}{\sqrt{(x+a)((x-b)}} - \frac{C_2}{\sqrt{(x-c)(x-b)}}$$

Из уравнения (16) следует, что

$$\int_{b}^{+\infty} F(x) \exp\left(-\frac{x}{\alpha w}\right) \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x-b)}} = 0$$

Поэтому после вычисления интеграла в левой части (21) получим уравнение

$$(22)\qquad \left[C_2-\frac{\rho(b-c)(b+c-2\alpha w)}{4KR}+\frac{\delta(b-c)}{2K}\right]K_0\left(\frac{b-c}{2\alpha w}\right)-$$
$$-\left[\frac{\rho(b^2-c^2)}{4KR}-\frac{\delta(b-c)}{2K}\right]K_1\left(\frac{b-c}{2\alpha w}\right)=0$$

Наконец, требование равенства нулю тангенциальных усилий на границе площадки контакта, в точке $x = b$, приводит к условию

$$\int_{-a}^{b} V_2(x)\big|_{y=0}\exp\left(-\frac{x}{\beta w}\right)dx=0$$

Подставив сюда выражение для $(V_2)_{y=0}$ (6), (11) и произведя необходимые вычисления, получим уравнение

$$(23)\qquad \left[C_2-\frac{\rho(b-c)(b+c-2\alpha w)}{4KR}+\frac{\delta(b-c)}{2K}\right]I_0\left(\frac{b-c}{2\beta w}\right)+$$
$$+\left[\frac{\rho(b-c)(b+c-2\alpha w+2\beta w)}{4KR}-\frac{\delta(b-c)}{2K}\right]I_1\left(\frac{b-c}{2\beta w}\right)=0$$

Обозначим длину участка сцепления $m = b - c$. Тогда с учетом введенных ранее обозначений $b + c = 2d + l - m$. Из (22) и (23) получим уравнение для определения длины участка сцепления $m$

$$(24)\qquad \frac{m}{2K}\left\{\left[\frac{\rho}{2R}(2d+l-m-2\alpha w+2\beta w)-\delta\right]I_1\left(\frac{m}{2\beta w}\right)K_0\left(\frac{m}{2\alpha w}\right)+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\rho}{2R}(2d+l-m)-\delta\right]I_0\left(\frac{m}{2\beta w}\right)K_1\left(\frac{m}{2\alpha w}\right)\right\}=0$$

Постоянная $C_2$ определяется следующим образом:

$$(25)\qquad C_2=\frac{m}{2K}\left\{\frac{\rho}{2R}(2d+l-m-2\alpha w)-\delta-\left[\frac{\rho}{2R}(2d+l-m-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\alpha w+2\beta w)-\delta\right]I_1\left(\frac{m}{2\beta w}\right)\Big/ I_0\left(\frac{m}{2\beta w}\right)\right\}$$

Таким образом, определены все неизвестные постоянные задачи.

Из решения уравнения (19) можно найти длину площадки контакта $l$. В большинстве случаев это уравнение решается численно [6]. В работе было проведено решение уравнения (19) для значений параметров $\alpha$ и $\beta$ порядка от $10^{-1}$ *сек*, до $10^6$ *сек*; для скорости $w$ брались значения 10 *см / сек*, 100 *см / /сек*, 1000 *см / сек*. Во всех этих случаях длина площадки контакта была близка к величине $\sqrt{8KRP\beta / \alpha}$, которая равна длине площадки контакта при качении по упругому материалу с модулем упругости $H = \alpha E / \beta$. Модуль $H$ есть мгновенный модуль упругости для рассматриваемого материала. Зная длину площадки контакта, можно определить координату середины площадки $d$ по формуле (20). Отсюда видно, что $d > 0$, т. е. площадка смещена в направлении движения цилиндра. Из решения уравнения (24) находится длина участка сцепления $m$ и по формуле (25) — постоянная $C_2$.

Если $\alpha = \beta$, то эти уравнения дают решение задачи о качении упругого цилиндра по основанию из того же материала (с модулем упругости $E$).

Воспользуемся соотношением

$$I_0(x)K_1(x) + I_1(x)K_0(x) = x^{-1}$$

Тогда из (19) и (20) следует, что длина площадки контакта $l = \sqrt{8KRP}$ и она располагается симметрично относительно центра цилиндра ($d = 0$). Из уравнения (24) получаем, что в случае существования участка со сцеплением ($m \neq 0$) участок с проскальзыванием имеет длину $l - m = 2\delta R / \rho$. Подставив найденные значения неизвестных постоянных в (12) и (13), получим выражения для давления и тангенциальных усилий на площадке контакта упругого цилиндра с упругим основанием

$$(\sigma_y)_{y=0} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi KR}, \quad -a < x < a$$

$$(\tau_{xy})_{y=0} = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{\pi KR}\sqrt{a^2 - x^2}, & -a < x < c \\ -\dfrac{\rho}{\pi KR}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{\rho}{\pi KR}\sqrt{(a-x)(x-c)}, & c < x < a \end{cases}$$

$$(a = \sqrt{2KRP}, \quad c = -\sqrt{2KRP} + 2\delta R / \rho)$$

Определим силу сопротивления движению цилиндра. Суммарное касательное напряжение на площадке контакта $Q$ вычисляется следующим образом:

$$Q = \int_{-a}^{b} [(\tau_{xy})_{y=0} dx = \int_{-a}^{b} (\tau_{xy}^*)_{y=0} dx = \int_{-a}^{b} \frac{1}{\pi} (V_2)_{y=0} dx \tag{26}$$

так как в силу непрерывности напряжений на границе площадки контакта

$$\int_{-a}^{b} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right)_{y=0} dx = 0$$

Последний интеграл в (26) легко вычисляется. С учетом (25) и введенных ранее обозначений для $Q$ получим выражение

$$Q = -\rho P + \frac{\rho m^2}{8KR} - \frac{m}{2K}\left[\frac{\rho}{2R}(2d + l - m - 2\alpha w + 2\beta w) - \delta\right] \times \\ \times I_1\left(\frac{m}{2\beta w}\right) \Big/ I_0\left(\frac{m}{2\beta w}\right) \tag{27}$$

На ось цилиндра действует сила сопротивления движению цилиндра $Q^*$, равная по величине и противоположно направленная силе $Q$.

Кроме того, при качении цилиндра по вязко-упругому основанию вертикальная составляющая реакции вязко-упругой среды не проходит через центр тяжести цилиндра. Поэтому движению цилиндра еще будет препятствовать пара с моментом

$$M_1 = \int_{-a}^{b} x (\sigma_y)_{y=0} dx = \int_{-a}^{b} \frac{1}{\pi} x (V_1)_{y=0} dx - \beta w P \tag{28}$$

Здесь принято во внимание, что

$$\int_{-a}^{b} x \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\right)_{y=0} dx = -P$$

в силу непрерывности напряжений на границе площадки контакта. Подставив в (28) значение $(V_1)_{y=0}$ (8), получим следующее выражение для момента $M_1$:

$$M_1 = P(d - \beta w) + \frac{l^2}{8KR}(\alpha w - d)$$

Момент $M_1$ вместе с моментом силы $Q$ (27) относительно центра цилиндра $M_2 = QR$ создают момент трения качения $M^* = M_1 + M_2$. Для того, чтобы имело место равномерное движение цилиндра, приложенный к нему момент $M$ должен быть равен по абсолютной величине моменту трения качения $M^*$.

Автор благодарит Л. А. Галина за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила 1 III 1975

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Reynolds O.* On rolling friction. Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1876, vol. 166, pt 1.
2. *Пинегин С. В., Орлов А. В.* Сопротивление движению при некоторых видах свободного качения. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1961, № 3.
3. *Конвисаров Д. В., Покровская А. А.* Влияние радиусов кривизны цилиндрических тел на их сопротивление перекатыванию при различных нагрузках. Тр. Сиб. физ.-техн. ин-та, Томск, 1955, т. 34.
4. *Tabor R.* The mechanism of rolling friction. Philos. mag. Ser. 7, 1952, vol. 43, No. 345.
5. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
6. *Хантер.* Контактная задача качения жесткого цилиндра по вязко-упругому полупространству. Прикл. механ. Тр. Америк. об-ва инж.-механ. Сер. Е. 1961, т. 28, № 4.