Прикладная математика и механика. Том. 37, 1973

УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТОНКИХ ПЛИТ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Б. А. Шойхет

(Ленинград)

Изучается асимптотическое поведение решения объемной задачи для неоднородной анизотропной плиты кусочно-непрерывной толщины при стремлении характерной относительной толщины к нулю. Доказано, что это решение (должным образом нормированное) стремится (в интегральных нормах) к решению некоторых двумерных уравнений, которые для изотропной плиты совпадают с классическими. Если материал плиты в каждой точке имеет плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости, и плита имеет симметричное строение, то приходим к известным уравнениям анизотропных плит [1]. Если же таковой плоскости нет, то, по-видимому, полученные уравнения в литературе не приводились. Результат работы дает частичный ответ на вопрос [2]: «в каком смысле возможен предельный переход от трехмерной задачи теории упругости к двумерным для плит, поперечное сечение которых содержит угловые точки?».

Вопрос о предельной точности классической теории тонких плит постоянной толщины хорошо изучен. В [3–6] получены асимптотические разложения объемного напряженного состояния, первым членом которых является решение классической теории. В [7–9] получена оценка энергетической нормы разности решений объемной задачи и классической теории. Методом [4] в [10–12] исследовалось напряженное состояние некоторых анизотропных, в том числе многослойных, плит.

1. Сформулируем объемную задачу D_h. Пусть срединная плоскость плиты занимает область Ω переменных $x = (x_1, x_2)$, Γ — кусочно-гладкая граница Ω, плита занимает область

$$V_h = \{(x, x_3) \mid x \in \Omega, \ -ht_2(x) < x_3 < ht_1(x)\}$$
$$t_i(x) \geqslant m > 0, \qquad m = \mathrm{const}, \qquad i = 1, 2$$

Здесь $h > 0$ — отношение характерной толщины к характерному размеру срединной плоскости, $t_1(x)$, $t_2(x)$ — кусочно-гладкие функции. По определению, $t(x)$ — кусочно-гладкая, если замыкание Ω^c области Ω представимо в виде

$$\Omega^c = \bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i^c, \qquad \Omega_i \cap \Omega_j = \Lambda, \qquad i \neq j$$

Каждая область Ω_i имеет кусочно-гладкую границу, $t(x)$ бесконечно дифференцируема в Ω_i, $i = 1, \ldots, k$, на «стыках» областей Ω_i функция $t(x)$ может терпеть разрыв.

Боковая поверхность разбита на две части, S_1 и S_2 ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$), где

$$S_1 = \{(x, x_3) \mid x \in \Gamma_1, \ -ht_2(x) < x_3 < ht_1(x)\}$$
$$S_2 = \{(x, x_3) \mid x \in \Gamma_2, \ -ht_2(x) < x_3 < ht_1(x)\}$$

На S_1 плита жестко защемлена, а на S_2 задано распределение напряжений. Введем класс допустимых смещений и деформации

$$U = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3),\ u_i \in W_2^1(V_h),\ u_i = 0 \text{ на } S_1,\ i = 1, 2, 3\}$$
$$\varepsilon_{ii} = u_{i,i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Здесь и далее $f_{,i} \equiv \partial f / \partial x_i$, $f_{,z} \equiv \partial f / \partial z$.

Сделаем замену переменной $x_3 = hz$, тогда область V_h отобразится в область $V_1 = \{(x, z) \mid x \in \Omega, -t_2(x) < z < t_1(x)\}$. Пусть $A(x, z)$ — симметричная матрица 6×6, коэффициенты которой—измеримые, равномерно ограниченные в области V_1 функции, и A равномерно положительно определена в области V_1.

Запишем закон Гука в виде

$$\sigma = \varepsilon A(x, h^{-1}x_3) \tag{1.1}$$
$$\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}), \qquad \varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33})$$

Подчеркнем, что матрица A не зависит от h, т. е. фиксируется характер распределения анизотропии по толщине плиты.

Введем функционал полной энергии

$$\Phi_h(\mathbf{u}) = E_h(\mathbf{u}) - L_h(\mathbf{u}) \tag{1.2}$$
$$E_h(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int\limits_{V_h} \sigma\varepsilon^* \, dx\, dx_3 = \frac{1}{2} \int\limits_{V_h} \varepsilon A \varepsilon^* \, dx\, dx_3$$

$$L_h(\mathbf{u}) = \int\limits_{V_h} F_i^h u_i \, dx\, dx_3 + \int\limits_{\Omega} (p_i^h u_i^+ + q_i^h u_i^-)\, dx + \int\limits_{S_2} f_i^h u_i \, d\Gamma\, dx_3 \tag{1.3}$$
$$u_i^+(x) \equiv u_i(x, ht_1(x)), \qquad u_i^-(x) \equiv u_i(x, -ht_2(x))$$

Звездочка означает транспонирование, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Пусть

$$F_i^h \in L_2(V_h), \qquad p_i^h, q_i^h \in L_2(\Omega), \qquad f_i^h \in L_2(S_2) \tag{1.4}$$

Задача D_h — найти минимум функционала Φ_h на классе U.

Теорема 1 [13-17]. Задача D_h имеет единственное решение.

2. Сопоставим задаче D_h следующую двумерную задачу K_h. Введем

$$m_i^h(x) = \int F_i^h(x, x_3)\, x_3 dx_3 + ht_1(x)\, p_i^h(x) - ht_2(x)\, q_i^h(x) \tag{2.1}$$
$$x \in \Omega, \ i = 1, 2$$
$$g_i^h(x) = h\left[\int F_i^h(x, x_3)\, dx_3 + p_i^h(x) + q_i^h(x)\right], \quad x \in \Omega, \ i = 1, 2$$
$$g_3^h(x) = \int F_3^h(x, x_3)\, dx_3 + p_3^h(x) + q_3^h(x), \quad x \in \Omega$$
$$M_i^h(x) = \int f_i^h(x, x_3)\, x_3\, dx_3, \quad x \in \Gamma_2, \ i = 1, 2$$
$$T_i^h(x) = h \int f_i^h(x, x_3)\, dx_3, \quad x \in \Gamma_2, \ i = 1, 2$$
$$T_3^h(x) = \int f_3^h(x, x_3)\, dx_3, \quad x \in \Gamma_2$$

Интегралы в (2.1) берутся в пределах $[-ht_2(x), ht_1(x)]$. Функции m_1^h, m_2^h — распределенные по Ω моменты, M_1^h, M_2^h — краевые моменты, g_3^h — нормальная нагрузка, T_3^h — перерезывающая сила, $h^{-1} g_1^h$, $h^{-1} g_2^h$ — распределенные по Ω касательные нагрузки, $h^{-1} T_1^h$, $h^{-1} T_2^h$ — краевые растягивающие усилия.

Положим

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2), \quad \sigma_1 = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}), \quad \sigma_2 = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$$
$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2), \quad \varepsilon_1 = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}), \quad \varepsilon_2 = (\varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33})$$

Представим (1.1) в виде (A_{ij} — матрицы 3×3)

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 A_{11} + \varepsilon_2 A_{21}, \quad \sigma_2 = \varepsilon_1 A_{12} + \varepsilon_2 A_{22}, \qquad A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

Пользуясь (2.2), выразим σ_1 через ε_1 и σ_2

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 B + \sigma_2 A_{22}^{-1} A_{21}, \qquad B = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} \tag{2.3}$$

Лемма 1. Матрица B — симметричная, с ограниченными в V_1 коэффициентами, равномерно положительно определенная в V_1, т. е.

$$\varepsilon_1 B \varepsilon_1^* \geqslant \nu \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1^*, \qquad \forall \varepsilon_1, (x, z) \in V_1, \qquad \nu = \text{const} \tag{2.4}$$

Доказательство следует из свойств матрицы A и тождества

$$\varepsilon_1 B \varepsilon_1^* = (\varepsilon_1, -\varepsilon_1 A_{22}^{-1} A_{21}) A (\varepsilon_1, -\varepsilon_1 A_{22}^{-1} A_{21})^*$$

Примем формально гипотезы Кирхгофа: а) напряжения σ_2 малы по сравнению с σ_1, б) смещения распределены по закону

$$u_i(x, x_3) = v_i(x) - x_3 w_{,i}(x), \; i = 1, 2, \; u_3(x, x_3) = w(x) \tag{2.5}$$

где v_1, v_2, w — функции, зависящие только от x. Тогда

$$\varepsilon_1 = \mu(w) x_3 + \eta(v_1, v_2) \tag{2.6}$$
$$\mu(w) = -(w_{,1,1}, \omega_{,2,2}, \omega_{,1,2}), \qquad \eta(v_1, v_2) = (v_{1,1}, v_{2,2}, v_{2,1} + v_{1,2})$$

Преобразуем (1.2), отбросив члены, содержащие σ_2, и, отбросив в (2.3) члены, содержащие σ_2, полученную связь $\sigma_1 = \varepsilon_1 B$ подставим в E_h. Воспользовавшись (2.6), получим функционал

$$e_h(v_1, v_2, w) = \frac{1}{2} \int\limits_{V_h} (\mu x_3 + \eta) B (\mu x_3 + \eta)^* \, dx \, dx_3 = \tag{2.7}$$
$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (h^3 \mu P \mu^* + h \eta P \eta^* + h^2 \mu Q \eta^* + h^2 \eta Q \mu^*) \, dx$$

$$P(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{-t_2(x)}^{t_1(x)} [B(x, z) + B(x, -z)] z^2 \, dz,$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int\limits_{-t_2(x)}^{t_1(x)} [B(x, z) - B(x, -z)] z \, dz$$

В (1.3) подставим (2.5). Проинтегрировав по x_3, получим функционал

(2.8) $$l_h(v_1, v_2, w) = \int_\Omega (h^{-1}g_i^h v_i + g_3^h w + m_i^h w_{,i})\,dx + \int_{\Gamma_2} (h^{-1}T_i^h v_i + T_3^h w - M_i^h w_{,i})\,d\Gamma$$

Введем функционал энергии тонкой плиты и класс троек функций

$$\psi_h(v_1, v_2, w) = e_h(v_1, v_2, w) - l_h(v_1, v_2, w)$$

$$G = \{(v_1, v_2, w) \mid v_1, v_2 \in W_2^1(\Omega), w \in W_2^2(\Omega), v_1 = v_2 = w_{,1} = w_{,2} = w = 0 \text{ на } \Gamma_1\}$$

Задача K_h — минимизировать функционал ψ_h на классе G.

Замечание 1. Если плита имеет симметричное строение, т. е. $A(x, z) = A(x, -z)$, то и $B(x, z) = B(x, -z)$, и матрица $Q(x)$ равна нулю. Тогда задача K_h распадается на задачу изгиба и растяжения-сжатия.

Введем пространство θ, состоящее из всевозможных наборов функций $\vartheta = (m_1, m_2, g_1, g_2, g_3, M_1, M_2, T_1, T_2, T_3)$, таких что $m_i, g_i \in L_2(\Omega)$, $M_i, T_i \in L_2(\Gamma_2)$, через $\|\vartheta\|$ обозначим сумму норм в L_2 всех компонент ϑ. Для краткости обозначим систему нагрузок объемной задачи через N^h, тогда формулы (2.1) можно рассматривать как отображение, ставящее в соответствие всякой системе нагрузок N^h систему сил и моментов $\vartheta^h \in \theta$

$$\vartheta^h = (m_1^h, m_2^h, g_1^h, g_2^h, g_3^h, M_1^h, M_2^h, T_1^h, T_2^h, T_3^h)$$

Очевидно, задача K_h имеет смысл для любого $\vartheta \in \theta$, а не только для $\vartheta = \vartheta^h$.

Введем обозначения: если V — область, то нормы в пространствах $L_2(V)$, $W_2^1(V)$, $W_2^2(V)$ будем обозначать через $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_{1,V}$, $\|\cdot\|_{2,V}$ соответственно.

Лемма 2. Задача $K_h(\vartheta)$ имеет единственное решение (v_1^h, v_2^h, w^h), причем

(2.9) $$v_1^h = h^{-2}v_1^1, \quad v_2^h = h^{-2}v_2^1, \quad w^h = h^{-3}w^1$$

где (v_1^1, v_2^1, w^1) — решение задачи $K_1(\vartheta)$.

Доказательство. Так как ψ_h — выпуклый функционал, то [18] существование и единственность решения следует из неравенства

(2.10) $$(\|v_1\|_{1,\Omega}^2 + \|v_2\|_{1,\Omega}^2 + \|w\|_{2,\Omega}^2) \leqslant c e_h(v_1, v_2, w)$$

справедливого для любой тройки $(v_1, v_2, w) \in G$; буквой c здесь и далее будем обозначать различные константы. Докажем (2.10). Из (2.4)

$$e_h \geqslant \frac{\nu}{2} \int_{V_h} [\mu(w)x_3 + \eta(v_1, v_2)]\,[\mu(w)x_3 + \eta(v_1, v_2)]^* \,dx dx_3 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{h^2 m^3 \nu}{3} \int_\Omega [(w_{,1,1})^2 + 4(w_{,1,2})^2 + (w_{,2,2})^2]\,dx + $$
$$+ \nu h m \int_\Omega [(v_{1,1})^2 + (v_{2,2})^2 + (v_{2,1} + v_{1,2})^2]\,dx$$

Так как w, $w_{,1}$, $w_{,2}$ обращаются в нуль на Γ_1, то первый из интегралов правой части мажорирует норму w в $W_2^2(\Omega)$.

Известно неравенство Корна [13-17]: пусть $V \in R^n$ — область с кусочно-гладкой границей и пусть на каком-либо $(n-1)$-мерном куске ω границы области V функции $v_1, v_2, \ldots, v_n$, принадлежащие $W_2^1(V)$, равны нулю, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_{1,V}^2 \leqslant c \int_V \Big[\sum_{i,j=1}^{n} (v_{i,j} + v_{j,i})^2\Big] dV \tag{2.11}$$

с константой c, зависящей от V и ω. Из (2.11) следует (2.10).

Можно проверить, что $h^3\psi_h(h^{-2}v_1, h^{-2}v_2, h^{-3}w) = \psi_1(v_1, v_2, w)$, откуда следует (2.9).

Потребуем, чтобы N^h удовлетворяла условию

$$\begin{gathered} \|p_i^h, q_i^h\|_\Omega \leqslant h^{-1}c_0, \quad i=1,2, \quad \|p_3^h, q_3^h\|_\Omega \leqslant c_0, \\ \|f_i^h\|_{S_2} \leqslant h^{-3/2}c_0, \quad i=1,2 \\ \|f_3^h\|_{S_2} \leqslant h^{-1/2}c_0, \quad \|F_i^h\|_{V_h} \leqslant h^{-3/2}c_0, \quad i=1,2, \quad \|F_3^h\|_{V_h} \leqslant h^{-1/2}c_0 \end{gathered} \tag{2.12}$$

где константа c_0 не зависит от h. Обсудим смысл условий (2.12). Каждая из нагрузок создает напряженное состояние, стремящееся к бесконечности с определенной скоростью. В качестве основной выбрана нормальная к верхней грани нагрузка, соответствующее ей напряженное состояние ведет себя так: u_1, u_2, σ_{11}, σ_{22}, $\sigma_{12} \sim h^{-2}$, $u_3 \sim h^{-3}$. Поэтому, если касательные нагрузки p_1^h, p_2^h, q_1^h, q_2^h растут с изменением h, но со скоростью, не выше h^{-1} (как и предписывается условиями (2.12)), их вклад в напряженное состояние имеет порядок роста не выше, чем вклад нормальной нагрузки. Из аналогичных соображений подобраны и остальные оценки.

Можно проверить, что если N^h удовлетворяет условиям (2.12), то

$$\|\vartheta^h\| \leqslant cc_0, \text{ т. е. } \|m_i^h, g_i^h\|_\Omega \leqslant cc_0, \ \|M_i^h, T_i^h\|_{\Gamma_2} < cc_0 \tag{2.13}$$

где константа c не зависит от h.

Теорема 2. Пусть N^h удовлетворяет условию (2.12), и имеет место предельный переход при $h \to 0$

$$\vartheta^h \to \vartheta^\circ, \ \vartheta^\circ = (m_1^\circ, m_2^\circ, g_1^\circ, g_2^\circ, g_3^\circ\ M_1^\circ, M_2^\circ, T_1^\circ, T_2^\circ, T_3^\circ)$$

(Это означает, что каждая компонента ϑ^h в L_2 сходится к соответствующей компоненте ϑ°).

Обозначим через (v_1^1, v_2^1, w^1) решение задачи $K_1(\vartheta^\circ)$, тогда решение u^h, σ_{ij}^h задачи $D_h(N^h)$ представимо в виде

$$\begin{aligned} & u_i^h(x, x_3) = h^{-2}[-w_{,i}^1(x)h^{-1}x_3 + v_i^1(x) + R_i^h(x, h^{-1}x_3)], \quad i=1,2 \\ & u_3^h(x, x_3) = h^{-3}[w^1(x) + R_3^h(x, h^{-1}x_3)] \\ & \boldsymbol{\sigma}_1^h(x, x_3) = (\sigma_{11}^h, \sigma_{22}^h, \sigma_{12}^h) = \\ & = h^{-2}\{B[\boldsymbol{\mu}(w^1)h^{-1}x_3 + \boldsymbol{\eta}(v_1^1, v_2^1)] + \mathbf{R}_1^h(x, h^{-1}x_3)\} \\ & \boldsymbol{\sigma}_2^h(x, x_3) = (\sigma_{13}^h, \sigma_{23}^h, \sigma_{33}^h) = h^{-2}\mathbf{R}_2^h(x, h^{-1}x_3) \\ & (\|R_i^h\|_{1,V_1} \to 0, \ i=1,2,3, \quad \|\mathbf{R}_i^h\|_{V_1} \to 0, \quad i=1,2 \text{ при } h \to 0) \end{aligned} \tag{2.14}$$

Замечание 2. Представления (2.14) можно рассматривать как математическое доказательство гипотез Кирхгофа.

Замечание 3. Положим

$$\omega^h(c_0, N^h, \vartheta^\circ) = \sum_{i=1}^{3} \| R_i^h \|_{1, V_1} + \sum_{i=1}^{2} \| \mathbf{R}_i^h \|_{1, V_1}$$

В теореме 2 утверждается, что если $\vartheta^h \to \vartheta^\circ$, $h \to 0$, то $\omega^h(c_0, N^h, \vartheta^\circ) \to 0$, $h \to 0$, т. е. $\omega^h(c_0, N^h, \vartheta^\circ)$ — оценка близости решения задачи $D_h(N^h)$ к решению задачи $K_h(\vartheta^\circ)$. Естественно, возникает желание не требовать, чтобы $\vartheta^h \to \vartheta^\circ$, $h \to 0$, а сравнить решение задачи $D_h(N^h)$ прямо с решением задачи $K_h(\vartheta^h)$, т. е. изучить поведение величины $\omega^h \cdot (c_0, N^h, \vartheta^h)$. Оказывается, $\omega^h(c_0, N^h, \vartheta^h) \to 0$, независимо от того как ведет себя ϑ^h; точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Зафиксируем h и среди всех нагрузок, удовлетворяющих условию (2.12), выберем нагрузку N_*^h так, чтобы максимизировать величину $\omega^h(c_0, N^h, \vartheta^h)$ (можно доказать, что такая N_*^h найдется)

$$\omega_*^h(c_0) = \max_{N^h} \omega^h(c_0, N^h, \vartheta^h) \equiv \omega^h(c_0, N_*^h, \vartheta_*^h)$$

Тогда $\omega^h_*(c_0) \to 0$, $h \to 0$.

Следствие. Пусть N_1^h, N_2^h — статически эквивалентные нагрузки, т. е. им соответствует одно и то же ϑ^h, $\mathbf{u}_1^h$, $\mathbf{u}_2^h$ — решения задач $D_h(N_1^h)$, $D_h(N_2^h)$ соответственно. Тогда, поскольку каждое из решений этих задач отличается от решения задачи $K_h(\vartheta^h)$, не более чем на $\omega_*^h(c_0)$, то между собой они отличаются, не более чем на $2\omega_*^h(c_0)$. Это утверждение можно трактовать, как слабую формулировку принципа Сен-Венана для плит (слабую в том смысле, что используются интегральные нормы и нет оценки скорости сходимости).

3. Доказательство теоремы 2 разобьем на ряд лемм. Сформулируем иначе результаты теоремы 2. Пусть

$$\mathbf{u} \in U, \quad U_i(x, z) = h^2 u_i(x, hz), \quad i = 1, 2, \quad U_3(x, z) = h^3 u_3(x, hz)$$
$$\mathbf{U}_i^h(x, z) = h^2 u_i^h(x, hz), \quad i = 1, 2, \quad U_3^h(x, z) = h^3 u_3^h(x, hz)$$
$$\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3), \qquad \mathbf{U}^h = (U_1^h, U_2^h, U_3^h)$$

Очевидно, $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^h$ — векторы с компонентами из $W_2^1(V_1)$ и $U_i = U_i^h = 0$, $i = 1, 2, 3$, на $S_1^1 = \{(x, z) \mid x \in \Gamma_1, \ -t_2(x) < z < t_1(x)\}$. Введем величины

$$\delta_{ii} = U_{i,i}, \quad i = 1, 2, \qquad \delta_{12} = U_{2,1} + U_{1,2} \tag{3.1}$$
$$\delta_{i3} = \delta_{3i} = h^{-1}(U_{3,i} + U_{i,z}), \quad i = 1, 2, \qquad \delta_{33} = h^{-2} U_{3,z}$$
$$\delta = (\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{12}, \delta_{13}, \delta_{23}, \delta_{33}), \quad \delta_1 = (\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{12}), \quad \delta_2 = (\delta_{13}, \delta_{23}, \delta_{33})$$

Можно проверить, что

$$\delta_{ij}(x, z) = h^2 \varepsilon_{ij}(x, hz) \tag{3.2}$$

Положим

$$\delta_{ij}^h \equiv \delta_{ij}(U^h) \equiv h^2 \varepsilon_{ij}^h(x, hz), \qquad \alpha_{ij}^h \equiv h^2 \sigma_{ij}^h(x, z) \tag{3.3}$$
$$\alpha^h = (\alpha_{11}^h, \alpha_{22}^h, \alpha_{12}^h, \alpha_{13}^h, \alpha_{23}^h, \alpha_{33}^h), \qquad \alpha_1^h = (\alpha_{11}^h, \alpha_{22}^h, \alpha_{12}^h),$$
$$\alpha_2^h = (\alpha_{13}^h, \alpha_{23}^h, \alpha_{33}^h)$$

Соотношения (2.14) эквивалентны представлению

$$U_i^h(x,z) = [v_i^1(x) - w_{,i}^1(x)z + R_i^h(x,z)], \quad i=1,2 \tag{3.4}$$
$$U_3^h(x,z) = [w^1(x) + R_3^h(x,z)]$$
$$\alpha_1^h(x,z) = B[\mu(w^1)z + \eta(v_1,v_2)] + R_1^h(x,z)$$
$$\alpha_2^h(x,z) = R_2^h(x,z)$$
$$(\|R_i^h\|_{1,V_1}\to 0,\ i=1,2,3,\ \|\mathrm{R}_i^h\|_{V_1}\to 0,\ i=1,2,\ \text{при } h\to 0)$$

Лемма 3. Имеют место оценки, равномерные по h (c_0 — константа из условий (2.12))

$$\|U_i^h\|_{1,V_1}\leqslant cc_0, \qquad i=1,2,3 \tag{3.5}$$

$$\|\delta_{ij}^h\|_{V_1}\leqslant cc_0, \qquad i,j=1,2,3 \tag{3.6}$$

Доказательство. Чтобы $\mathbf{u}^h$ было решением задачи $D_h^\wedge$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $u\in U$ выполнялось тождество

$$\int\limits_{V_h}\sigma^h\varepsilon^*(\mathbf{u})\,dx\,dx_3 = L_h(\mathbf{u}) \tag{3.7}$$

Очевидно

$$\alpha^h = \delta^h A(x,z) \tag{3.8}$$

Умножив обе части (3.7) на h^3 и используя (3.1) — (3.3), получим тождество

$$\int\limits_{V_1}\alpha^h\delta^*(\mathrm{U})\,dx\,dz = S(\mathrm{U}) \tag{3.9}$$

$$S(\mathrm{U}) = \int\limits_{V_1}\Big(h^2\sum_{i=1}^2 F_i^hU_i + hF_3^hU_3\Big)dx\,dz + \int\limits_{S_2^1}h^2\sum_{i=1}^2 f_i^hU_i\,d\Gamma\,dz +$$
$$+\int\limits_{S_2^1}hf_3^hU_3\,d\Gamma\,dz + \int\limits_{\Omega}\Big[h\sum_{i=1}^2(p_i^hU_i^+ + q_i^hU_i^-) + p_3^hU_3^+ + q_3^hU_3^-\Big]dx$$

или, в другой форме, тождество

$$\int\limits_{V_1}\delta^hA\delta^*(\mathrm{U})\,dx\,dz = S(\mathrm{U}) \tag{3.10}$$

Оценки (2.12) подобраны так, что, используя неравенство Коши и теоремы вложения [19], получаем

$$|S(\mathrm{U})|\leqslant cc_0\|U\|_{1,V_1}$$

Подставим в (3.10) $\mathrm{U}=\mathrm{U}^h$, тогда получим оценку

$$\int\limits_{V_1}\sum_{i\leqslant j}(\delta_{ij}^h)^2\,dx\,dz = \int\limits_{V_1}\Big[\sum_{i=1}^2(U_{i,i}^h)^2 + (U_{2,1}+U_{1,2})^2 + \tag{3.11}$$
$$+\sum_{i=1}^2 h^{-2}(U_{3,i}^h + U_{i,z}^h)^2 + h^{-4}(U_{3,z}^h)^2\Big]dx\,dz\leqslant cc_0\|\mathrm{U}^h\|_{1,V_1}$$

Пусть $h<1$, усилим неравенство (3.11), заменив в левой его части h на единицу, тогда, используя неравенство Корна (2.11) и неравенство Коши с ε, получаем (3.5), а из (3.5), (3.11) следует (3.6).

Следствие. Из (3.5) следует что семейство U^h слабо компактно в $W_2^1 \cdot (V_1)$, а из (3.6), (3.8), следует, что семейства $\delta_{i_j}{}^h$, $\alpha_{i_j}{}^h$ слабо компактны в $L_2(V_1)$.

Обозначим через $\mathrm{U}^\circ = (U_1{}^\circ, U_2{}^\circ, U_3{}^\circ)$, $\delta_{i_j}{}^\circ$, $\alpha_{i_j}{}^\circ$ некоторые слабые предельные точки этих семейств. Позднее будет доказана единственность предела, поэтому, не умаляя общности, будем считать, что $U_i{}^h$ слабо сходятся к $U_i{}^\circ$ в $W_2^1(V_1)$, $\delta_{ij}{}^h$ слабо сходятся к $\delta_{ij}{}^\circ$ в $L_2(V_1)$, $\alpha_{ij}{}^h$ слабо сходятся к $\alpha_{ij}{}^\circ$ в $L_2(V_1)$.

Лемма 4. Функции $U_1{}^\circ$, $U_2{}^\circ$, $U_3{}^\circ$ представимы в виде

(3.12) $\quad U_3{}^\circ(x, z) \equiv U_3{}^\circ(x), \qquad U_3{}^\circ \in W_2^2(\Omega)$

(3.13) $\quad U_i{}^\circ(x, z) = V_i{}^\circ(x) - U_{3,i}{}^\circ(x)z, \qquad V_i{}^\circ(x) \in W_2^1(\Omega), \quad i = 1, 2$

(3.14) $\quad V_1{}^\circ = V_2{}^\circ = U_{3,1}{}^\circ = U_{3,2}{}^\circ = U_3{}^\circ = 0$ на Γ_1, т. е. $(V_1{}^\circ, V_2{}^\circ, U_3{}^\circ) \in G$

Доказательство. Из (3.6), $\| U^h_{3,z} \|_{V_1} \leqslant cc_0 h^2$, поэтому $U^\circ_{3,z} \equiv 0$ в V_1, т. е. (3.12) справедливо. Из (3.6), $\| U^h_{3,i} + U^h_{i,z} \|_{V_1} \leqslant cc_0 h$, $i = 1, 2$, откуда $U^\circ_{i,z} = -U^\circ_{3,i}$, поэтому если обозначить через $V_i{}^\circ(x)$ след функции $U_i{}^\circ$ на плоскости $\{x \in \Omega, z = 0\}$ то получим (3.13), где $V_i{}^\circ(x) \in L_2(\Omega)$. В левой части (3.13) стоит функция, принадлежащая $W_2^1(V_1)$ и равная нулю на $S_1{}^1$, поэтому необходимо $V_i{}^\circ$, $U^\circ_{3,i} \in W_2^1(\Omega)$ и выполнено (3.14).

Следствие

(3.15) $\quad \delta_1{}^\circ = \mu(U_3{}^\circ)z + \eta(V_1{}^\circ, V_1{}^\circ)$

Лемма 5. Имеют место равенства

(3.16) $\quad \alpha_{13}{}^\circ = 0, \alpha_{23}{}^\circ = 0, \alpha_{33}{}^\circ = 0, \quad$ т. е. $\boldsymbol{\alpha}_2{}^\circ = 0$

Доказательство. Покажем, прежде всего, что $\alpha_{13}{}^\circ$, $\alpha_{23}{}^\circ$, $\alpha_{33}{}^\circ$ постоянны по координате z. Пусть φ — гладкая финитная в области V_1 функция. Положим в тождестве (3.9) $\mathrm{U} = (0, 0, \varphi)$, тогда

(3.17) $$\int\limits_{V_1} (\alpha_{13}{}^h h^{-1}\varphi_{,1} + \alpha_{23}{}^h h^{-1}\varphi_{,2} + \alpha_{33}{}^h h^{-2}\varphi_{,z})\, dx\, dz = S(\mathrm{U})$$

Умножим (3.17) на h^2 и перейдем к пределу при фиксированном φ и $h \to 0$, получим тождество

$$\int\limits_{V_1} \alpha_{33}{}^\circ \varphi_{,z}\, dx\, dz = 0$$

Докажем, что если $f \in L_2(V_1)$ и для любой гладкой финитной в V_1 функции φ справедливо тождество

(3.18) $$\int\limits_{V_1} f\varphi_{,z}\, dx\, dz = 0$$

то $f(x, z) \equiv f(x)$. Действительно, пусть положительное ρ меньше, чем расстояние от границы V_1 до носителя функции ψ, (носителем функции называется множество точек, где функция] отлична от нуля), тогда, заменив в (3.19) φ на φ_ρ (φ_ρ — усреднение по С. Л. Соболеву функции φ), получим

$$\int\limits_{V_1} f(\varphi_\rho)_{,z} dx\, dz = -\int\limits_{V} (f_\rho)_{,z}\, \varphi\, dx\, dz = 0$$

Отсюда следует, что во всякой внутренней подобласти области V_1 $(f_\rho)'_z = 0$, т. е. $f_\rho(x, z) \equiv f_\rho(x)$. Но $\| f_\rho - f \|_{V_1} \to 0$ при $\rho \to 0$, откуда во всякой внутренней подобласти (а следовательно, и во всей области V_1) $f \equiv f(x)$. Из доказанного вытекает $\alpha_{33}{}^\circ \equiv \alpha_{33}{}^\circ(x)$; аналогично, $\alpha_{13}{}^\circ \equiv \alpha_{13}{}^\circ(x)$, $\alpha_{23}{}^\circ \equiv \alpha_{23}{}^\circ(x)$.

Пусть теперь $\varphi(x)$ — гладкая финитная в области Ω функция. Положим в (3.9) $\mathbf{U} = (0, 0, \varphi(x)z)$, получим тождество

$$\int_{V_1} (\alpha_{13}{}^h h^{-1} z\varphi_{,1} + \alpha_{23}{}^h h^{-1} z\varphi_{,2} + \alpha_{33}{}^h h^{-2}\varphi)\, dx\, dz = S(\mathbf{U}) \tag{3.19}$$

Умножив (3.19) на h^2 и переходя к пределу при $h \to 0$, получим

$$\int_{V_1} \alpha_{33}{}^\circ \varphi\, dx\, dz = 0 \tag{3.20}$$

Но $\alpha^\circ{}_{33}$ зависит только от x, поэтому из (3.20) следует, что $\alpha_{33}{}^\circ \equiv 0$. Аналогично получаем $\alpha_{13}{}^\circ = \alpha_{23}{}^\circ = 0$.

Лемма 6. Имеют место равенства

$$V_1{}^\circ = v_1{}^1, \quad v_2{}^\circ = v_2{}^1, \quad U_3{}^\circ = w^1 \tag{3.21}$$

Доказательство. Докажем, что тройка $(V_1{}^\circ, V_2{}^\circ, U_3{}^\circ)$ удовлетворяет тождеству (3.24), которое является необходимым и достаточным условием того, чтобы эта тройка функций была решением задачи $K_1(\vartheta^\circ)$, и в силу единственности решения задачи $K_1(\vartheta^\circ)$ получим (3.21).

Положим в (3.9) $\mathbf{U} = (v_1 - w_{,1}z_1,\ v_2 - w_{,2}z,\ w)$, где $(v_1, v_2, w) \in G$. Тогда $\delta_1(\mathbf{U}) = \mu(w)z + \eta(v_1, v_2)$, $\delta_2(\mathbf{U}) = 0$, и (3.9) принимает вид

$$\int_{V_1} \alpha_1{}^h \delta_1{}^*(\mathbf{U})\, dx\, dz = S(\mathbf{U}) \tag{3.22}$$

Но из (3.8), (3.3), (2.3) следует, что

$$\alpha_1{}^h = \delta_1{}^h B + \alpha_2{}^h A_{22}^{-1} A_{21} \tag{3.23}$$

Подставляя (3.23) в (3.22), переходя к пределу при $h \to 0$, используя (3.16), (3.15), и выполняя интегрирование по z, получим тождество

$$\int_\Omega (\mu_0 P\mu^* + \eta_0 P\eta^* + \mu_0 Q\eta^* + \eta_0 Q\mu^*)\, dx = l_1(v_1, v_2, w) \tag{3.24}$$

$$(\mu \equiv \mu(w), \quad \eta \equiv \eta(v_1, v_2), \quad \mu_0 \equiv \mu(U_3{}^\circ), \quad \eta_0 \equiv \eta(V_1{}^\circ, V_2{}^\circ))$$

что доказывает лемму.

Итак, доказаны представления (3.4) с той оговоркой, что $R_i{}^h$, $\mathbf{R}_i{}^h$ слабо сходятся к нулю в $W_2{}^1(V_1)$, $L_2(V_1)$ соответственно.

Лемма 7. [20]. Пусть H — гильбертово пространство. Если последовательность $\{f_h\} \in H$ и f_h слабо в H сходится к f_0, и, кроме того, $\| f \|_H \to \| f_0 \|_H$, $h \to 0$, то f_h сильно в H сходится к f_0.

Лемма 8 (завершающая доказательство теоремы). Справедливы предельные переходы при $h \to 0$.

$$\| U_i{}^h - U_i{}^\circ \|_{1, V_1} \to 0, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{3.25}$$

$$\| \alpha_2{}^h \|_{V_1} \to 0 \tag{3.26}$$

Доказательство. Подставив в (3.10) $\mathrm{U} = \mathrm{U}^h$, после преобразований получим

$$(3.27)\qquad \int\limits_{V_1} [\delta_1{}^h B (\delta_1{}^h)^* + \alpha_2{}^h A_{22}^{-1} (\alpha_2{}^h)^*]\, dx\, dz = S (\mathrm{U}^h)$$

В силу теорем вложения [19] семейство U^h сильно компактно в $L_2 (V_1)$, а семейство следов функций U^h на поверхности $S_2{}^1$ сильно компактно в $L_2 (S_2{}^1)$. Поэтому, используя (1.4), (2.1), (2.12), можно показать, что при $h \to 0$

$$(3.28)\qquad S (\mathrm{U}^h) \to l_1 (V_1{}^\circ, V_2{}^\circ, U_3{}^\circ) = \int\limits_{V_1} \delta_1{}^\circ B (\delta_1{}^\circ)^*\, dx\, dz$$

Так как $\delta_1{}^h$ слабо в $L_2 (V_1)$ сходится к $\delta_1{}^\circ$, то имеет место неравенство

$$(3.29)\qquad \int\limits_{V_1} \delta_1{}^\circ B (\delta_1{}^\circ)^*\, dx\, dz \leqslant \lim_{h\to 0} \int\limits_{V_1} \delta_1{}^h B (\delta_1{}^h)^*\, dx\, dz$$

Из (3.27) — (3.29) и равномерной положительной определенности матрицы $A_{22}{}^{-1}$ следует

$$(3.30)\qquad \int\limits_{V_1} \delta_1{}^h B (\delta_1{}^h)^*\, dx\, dz \to \int\limits_{V_1} \delta_1{}^\circ B (\delta_1{}^\circ)^*\, dx\, dz, \qquad h \to 0$$

$$(3.31)\qquad \int\limits_{V_1} \alpha_2{}^h A_{22}^{-1} (\alpha_2{}^h)^*\, dx\, dz \to 0, \qquad h \to 0$$

Из (3.31) получаем (3.26), а из (3.30) и леммы 7 получаем

$$(3.32)\qquad \| \delta_1{}^h - \delta_1{}^\circ \|_{V_1} \to 0, \qquad h \to 0$$

Лемма 4, (3.6) и (3.32) дают соотношения (в (3.33) сходимость в $L_2(V_1)$ при $h \to 0$)

$$(3.33)\qquad \begin{gathered} (U^h_{3,i} + U^h_{i,z}) \to 0 \equiv \overset{\circ}{U}_{3,i} + \overset{\circ}{U}_{i,z}, \quad i = 1, 2; \quad U^h_{3,z} \to 0 \equiv \overset{\circ}{U}_{3,z} \\ U^h_{i,i} \to \overset{\circ}{U}_{i,i}, \quad i = 1, 2; \quad (U^h_{1,2} + U^h_{2,1}) \to (\overset{\circ}{U}_{1,2} + \overset{\circ}{U}_{2,1}) \end{gathered}$$

Из (3.33) и неравенства Корна (2.11) следует (3.25).

Докажем теорему 3. Пусть утверждение теоремы несправедливо. Обозначим через $\vartheta_*{}^h$ совокупность интегральных характеристик, соответствующих нагрузке $N_*{}^h$. Ввиду (2.13) найдется последовательность $h_i \to 0$, $i \to \infty$, и $\vartheta^\circ \in \Theta$, такие что каждая из компонент ϑ^{h_i} слабо в L_2 сходится к соответствующей компоненте ϑ°. Проследив доказательство теоремы 2, можно убедиться, что для справедливости ее достаточно иметь хотя бы слабую сходимость ϑ^h к ϑ°, поэтому $\omega^{h_i} (c_0, N_*^{h_i}, \vartheta^\circ) \to 0$, $i \to \infty$. Следуя доказательству леммы 8, можно доказать, что

$$| \omega^{h_i} (c_0, N_*^{h_i}, \vartheta^\circ) - \omega^{h_i} (c_0, N_*^{h_i}, \vartheta_*^{h_i}) | \to 0, \quad i \to \infty,$$

то тогда получаем, что $\omega^{h_i}{}_* (c_0) \to 0$, $i \to \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Поступила 5 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.— Л., Гостехиздат, 1957.
2. *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек. Тр. II Всес. съезда по теор. и прикл. механ., 1964. Обз. докл., вып. 3. М., «Наука», 1966.
3. *Friedrichs K. O., Dressler R. F.* A boundary-layer theory for elastic plates. Communs Pure and Appl. Math., 1961, vol. 14, No. 1.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
5. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
6. *Ворович И. И., Малкина О. С.* Напряженное состояние толстой плиты. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
7. *Morgenstern D.* Mathematische Begründung der Scheibentheorie. Arch. Ration Mech. and Analysis, 1959, vol. 3, No. 1.
8. *Morgenstern D.* Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheoric. Arch. Ration Mech. and Analysis, 1959, vol. 2, No. 2.
9. *Morgenstern D.* Bernoullische Hypothesen bei Balken und Platten theorie. Z. angew. Math. und Mech., 1959, Bd 39, Nr 9—11.
10. *Гуссейн-Заде М. И.* К построению теории изгиба слоистых пластинок. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
11. *Гуссейн-Заде М. И.* Напряженное состояние погранслоя для слоистых пластинок. В кн.: Тр. VII Всес. конф. по теории пластин и оболочек. М., «Наука», 1970.
12. *Агаловян Л. А.* Об уравнениях изгиба анизотропных пластин. Тр. VII Всес. конф. по теории пластин и оболочек. М., «Наука», 1970.
13. *Friedrichs K. O.* On the boundary-value problems of theory of elastisity and Korn's inequality. Ann. Math., 1947, vol. 48. No. 2.
14. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
15. *Duvaut G., Lions J. L.* Les inéquations en mécanique et en physique. Paris, Dunod, 1972.
16. *Gobert J.* Un inequation fondamentale en théory de elastisity. Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1962, t. 31, № 3—4.
17. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Доказательство неравенства Корна. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 1.
18. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., «Наука», 1972.
19. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
20. *Ахиезер Н. П., Глазман П. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1966.