

РАВНОВЕСИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УСИЛИЙ, ПРИЛОЖЕННЫХ К ГРАНИЦЕ

В. П. Плевако

(Харьков)

Методом интегрального преобразования Фурье стробится точное решение задачи о равновесии неоднородной полуплоскости $z \geq 0$ от воздействия нормальных и касательных усилий, приложенных к границе. Модуль сдвига полуплоскости — степенная функция линейного двучлена от декартовой координаты z , а коэффициент Пуассона постоянен.

В работах [1-4], посвященных подобным проблемам, исследовалось равновесие полуплоскости и полупространства $z \geq 0$ с модулем упругости $E(z) = E_0 z^k$. Физическая нереальность таких сред очевидна, так как модуль упругости у поверхности равен нулю. Это обстоятельство, в частности, влечет за собой ограничение возможных значений показателя k . Так, например, постановка задачи о действии распределенной нагрузки имеет смысл лишь при $0 \leq k < 1$, что, в свою очередь, значительно ограничивает сферу применимости принятого авторами степенного закона в качестве интерполяционной формулы моделирующей основание. Поэтому представляет интерес исследовать равновесие неоднородной полуплоскости, модуль упругости которой меняется с глубиной по степенной зависимости, причем у поверхности он отличен от нуля. В работе [5] рассматривалась аналогичная задача для полупространства, но на величину коэффициента Пуассона накладывались ограничения.

1. Определим напряженно-деформированное состояние неоднородной изотропной полуплоскости $z \geq 0$ от воздействия приложенных к границе $z = 0$ усилий. Модуль сдвига полуплоскости меняется по закону

$$(1.1) \quad G(z) = G_0 (1 + cz)^b$$

а коэффициент Пуассона ν постоянен.

Общее решение плоской задачи теории упругости для неоднородных изотропных сред, упругие характеристики которых — дифференцируемые функции декартовой координаты z , имеет вид [6]

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u_x &= -\frac{1}{2G} \left[\nu^* \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (1 - \nu^*) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial L}{\partial x} \\ u_z &= -\frac{1}{G} \frac{\partial^3 L}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{2G} \left[\nu^* \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - (1 - \nu^*) \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \right] \right\} \\ \sigma_x &= \frac{\partial^4 L}{\partial x^2 \partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^4 L}{\partial x^4}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^4 L}{\partial x^3 \partial z} \end{aligned}$$

Здесь $u_x, u_z, \sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ — компоненты вектора перемещений и тензора напряжений, $\nu^* = \nu$ для случая плоской деформации, происходящей в плоскости, параллельной xOz , и $\nu^* = \nu / (1 + \nu)$ для случая обобщенного плоского напряженного состояния, L — функция, удовлетворяющая

уравнению

$$(1.3) \quad \Delta \left(\frac{1-\nu^*}{G} \Delta L \right) - \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{1}{G} \right) = 0 \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Задача, таким образом, сводится к нахождению в области $z \geq 0$ такого решения уравнения (1.3), которое было бы ограничено на бесконечности при одновременном выполнении следующих условий на границе $z = 0$ полуплоскости:

$$(1.4) \quad \sigma_z|_{z=0} = \sigma(x), \quad \tau_{xz}|_{z=0} = \tau(x)$$

причем $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ — приложенные к полуплоскости нормальные и касательные усилия.

Относительно функций $\sigma(x)$ и $\tau(x)$ будем предполагать, что они могут быть представлены интегралами Фурье

$$(1.5) \quad \sigma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad \tau(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$$

где

$$g_1(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x) e^{i\alpha x} dx, \quad g_2(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(x) e^{i\alpha x} dx$$

Решение уравнения (1.3) ищем в виде

$$(1.6) \quad L = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} \psi(z, \alpha) \frac{d\alpha}{\alpha^4}$$

Здесь $\psi(z, \alpha)$ — ограниченная при $z \rightarrow \infty$ функция, которая подлежит определению.

Подставляя выражения (1.6) и (1.1) в уравнение (1.3) и равенства (1.4), находим, что функция $\psi(z, \alpha)$ является решением уравнения

$$(1.7) \quad \frac{d^4 \psi}{dz^4} - \frac{2cb}{1+cz} \frac{d^3 \psi}{dz^3} + \left[\frac{c^2 b(b+1)}{(1+cz)^2} - 2\alpha^2 \right] \frac{d^2 \psi}{dz^2} + \\ + \frac{2\alpha^2 cb}{1+cz} \frac{d\psi}{dz} + \alpha^2 \left[\alpha^2 + \frac{\nu^* c^2 b(b+1)}{(1-\nu^*)(1+cz)^2} \right] \psi = 0$$

при следующих граничных условиях:

$$(1.8) \quad \psi|_{z=0} = g_1(\alpha), \quad \frac{d\psi}{dz} \Big|_{z=0} = i\alpha g_2(\alpha)$$

Таким образом, плоская задача теории упругости сведена к краевой задаче для обыкновенного линейного дифференциального уравнения (1.7). Последнее подстановкой $\eta = (1+cz)\alpha/c$ приводится к типу, исследованному в работах [3, 6].

Решение, ограниченное при $z \rightarrow \infty$, имеет вид:

при $\nu^* \neq 1/(b+1)$ и $b \neq -1$

$$(1.9) \quad \psi(z, \alpha) = z_1^{\mu-1/2} [C_1 W_{\chi, \mu}(2\eta) + C_2 W_{-\chi, \mu}(2\eta)]$$

при $\nu^* = 1/(b+1)$ или $b = -1$

$$(1.10) \quad \psi(z, \alpha) = z_1^{\mu} \left\{ C_1 K_{\mu}(\eta) + C_2 \left[I_{\mu}(\eta) \int K_{\mu}^2(\eta) d\eta - \right. \right. \\ \left. \left. - K_{\mu}(\eta) \int I_{\mu}(\eta) K_{\mu}(\eta) d\eta \right] \right\}$$

Здесь C_1, C_2 — неизвестные функции параметра α , которые подлежат определению из граничных условий, $I_\mu(\eta), K_\mu(\eta)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента первого и второго рода порядка μ , $W_{\pm x, \mu}(2\eta)$ — функции Уиттекера

$$\mu = 1 + b/2, \quad z_1 = 1 + cz, \quad \chi = 1/2 \sqrt{(b+1)[1 - v^*b / (1 - v^*)]}$$

Положим для определенности, что $v^* \neq 1 / (b + 1)$ и $b \neq -1$. Исходя из выражений (1.9) и (1.6), функцию $\psi(z, \alpha)$ примем в виде

$$(1.11) \quad \psi(z, \alpha) = z_1^{\mu-1/2} [C_1 W_{\chi, \mu}(2\lambda z_1) + C_2 W_{-\chi, \mu}(2\lambda z_1)] \quad \left(\lambda = \frac{|\alpha|}{c}\right)$$

В дальнейшем аргументы $2\lambda z_1$ функций Уиттекера для упрощения записи опущены.

Подставляя $\psi(z, \alpha)$ в условия (1.8), получим систему алгебраических уравнений для функций C_1 и C_2 , из которой находим

$$(1.12) \quad C_1 = \frac{g_1(\alpha)}{\Delta_1} \left[\left(\lambda + \mu + \chi - \frac{1}{2} \right) W_{-\chi, \mu}(2\lambda) - W_{-\chi+1, \mu}(2\lambda) \right] - \\ - \frac{i\alpha}{c\Delta_1} g_2(\alpha) W_{-\chi, \mu}(2\lambda) \\ C_2 = - \frac{g_1(\alpha)}{\Delta_1} \left[\left(\lambda + \mu - \chi - \frac{1}{2} \right) W_{\chi, \mu}(2\lambda) - W_{\chi+1, \mu}(2\lambda) \right] + \\ + \frac{i\alpha}{c\Delta_1} g_2(\alpha) W_{\chi, \mu}(2\lambda) \\ \Delta_1 = W_{\chi, \mu}(2\lambda) [2\chi W_{-\chi, \mu}(2\lambda) - W_{-\chi+1, \mu}(2\lambda)] + \\ + W_{-\chi, \mu}(2\lambda) W_{\chi+1, \mu}(2\lambda)$$

Подставляя выражение (1.11) в (1.6), получаем функцию L , откуда по зависимостям (1.2) находим компоненты вектора перемещений и тензора напряжений

$$(1.13) \quad u_x = - \frac{iz_1^{-\mu-1/2}}{2G_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha \lambda^2} \left\{ C_1 [(\lambda^2 z_1^2 + f_1^-) W_{\chi, \mu} - \right. \\ \left. - 2(1 - v^*) \left(\mu - \frac{1}{2} \right) W_{\chi+1, \mu}] + \right. \\ \left. + C_2 [(\lambda^2 z_1^2 + f_1^+) W_{-\chi, \mu} - 2(1 - v^*) \left(\mu - \frac{1}{2} \right) W_{-\chi+1, \mu}] \right\} d\alpha \\ u_z = \frac{cz_1^{-\mu-1/2}}{2G_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha^2 \lambda} \left\{ C_1 [(\lambda^2 z_1^2 + f_2^-) W_{\chi, \mu} - \right. \\ \left. - (\lambda z_1 + 2(1 - v^*) \chi) W_{\chi+1, \mu}] + C_2 [(\lambda^2 z_1^2 + f_2^+) W_{-\chi, \mu} - \right. \\ \left. - (\lambda z_1 - 2(1 - v^*) \chi) W_{-\chi+1, \mu}] \right\} d\alpha \\ \sigma_x = - z_1^{\mu-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{\lambda^2} \left\{ C_1 \left[\left(\lambda^2 z_1^2 + \frac{f_1^-}{1 - v^*} \right) W_{\chi, \mu} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \left(\mu - \frac{1}{2} \right) W_{\chi+1, \mu} \right] + C_2 \left[\left(\lambda^2 z_1^2 + \frac{f_1^+}{1 - v^*} \right) W_{-\chi, \mu} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \left(\mu - \frac{1}{2} \right) W_{-\chi+1, \mu} \right] \right\} d\alpha$$

$$\sigma_z = z_1^{\mu-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} [C_1 W_{\chi, \mu} + C_2 W_{-\chi, \mu}] d\alpha$$

$$\tau_{zx} = -icz_1^{\mu-3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha} \left\{ C_1 \left[\left(\lambda z_1 + \mu - \chi - \frac{1}{2} \right) W_{\chi, \mu} - \right. \right.$$

$$\left. - W_{\chi+1, \mu} \right] + C_2 \left[\left(\lambda z_1 + \mu + \chi - \frac{1}{2} \right) W_{-\chi, \mu} - W_{-\chi+1, \mu} \right] \right\} d\alpha$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$f_1^{\pm} = 2(1 - \nu^*) (\mu \pm \chi - 1/2) (\mu - 1/2 + \lambda z_1)$$

$$f_2^{\pm} = [(1 + 2\nu^*) (\mu \pm \chi - 1/2) \mp 2\chi - 1] \lambda z_1 \mp 2(1 - \nu^*) \chi (\mu \pm \chi - 1/2)$$

причем знаки в левых и в правых частях находятся в соответствии.

2. Асимптотические разложения функций Уиттекера имеют вид [7]

$$(2.1) \quad W_{\chi, \mu}(2\lambda z_1) \sim (2\lambda z_1)^{\chi} e^{-\lambda z_1} \left\{ 1 + \frac{\mu^2 - (\chi - 1/2)^2}{1! 2\lambda z_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{[\mu^2 - (\chi - 1/2)^2] [\mu^2 - (\chi - 3/2)^2]}{2! (2\lambda z_1)^2} + \dots \right\}$$

$$W_{-\chi, \mu}(2\lambda z_1) \sim (2\lambda z_1)^{-\chi} e^{-\lambda z_1} \left\{ 1 + \frac{\mu^2 - (\chi + 1/2)^2}{1! 2\lambda z_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{[\mu^2 - (\chi + 1/2)^2] [\mu^2 - (\chi + 3/2)^2]}{2! (2\lambda z_1)^2} + \dots \right\}$$

В некоторых частных случаях неоднородности упругой среды, ряды обрываются, и формулы (2.1) становятся точными. При этом выражения для определения перемещений и напряжений (1.13) удается значительно упростить. Найдем такие случаи, для чего положим

$$(2.2) \quad \mu^2 - \left(\chi - \frac{2n-1}{2} \right)^2 = 0, \quad \mu^2 - \left(\chi + \frac{2m-1}{2} \right)^2 = 0$$

т. е. первый ряд обрывается на члене с порядковым номером n , а второй — с номером m . Отсюда, с учетом того, что $0 \leq \nu \leq 1/2$ и $\chi > 0$ (при $\chi = 0$ либо $\nu^* = 1/(b+1)$, либо $b = -1$ и функцию $\psi(z, \alpha)$ нужно принимать в виде (1.10)), находим

$$(2.3) \quad b = m + n - 3, \quad \nu^* = \frac{m + n - 2 - (n - m)^2}{4(m-1)(n-1)}$$

а для m и n получаем систему неравенств

$$(2.4) \quad n > m, \quad n \leq m + 1/2 [1 + \sqrt{8m-7}], \quad m \geq 2$$

Кроме того, существует еще одно решение уравнений (2.2) для однородной среды

$$(2.5) \quad m = 1, \quad n = 2, \quad b = 0, \quad 0 \leq \nu \leq 1/2$$

Так как постоянные G_0 и c , характеризующие упругие свойства полуплоскости, от m и n не зависят, то на их величину ограничения не накладываются.

Ниже для всех возможных $0 < b \leq 10$ указаны соответствующие значения обобщенного коэффициента Пуассона ν^* , подсчитанные по

формулам (2.3)

2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	10
$1/4$	0	$1/6$	$1/18$	$1/8$	$1/15$	0	$1/10$	$1/18$	$1/56$	$1/12$

Таким образом, для частных случаев неоднородности упругой среды, определяемых соотношениями (2.3) и (2.4), функции Уиттекера выражаются через экспоненциальные и степенные. При этом подынтегральные выражения в формулах (1.13) упрощаются настолько, что их удается проинтегрировать в специальных функциях для многих видов нагрузок $\sigma(x)$ и $\tau(x)$.

Рассмотрим, например, случай $b = 2$. Тогда $\nu^* = 1/4$. Воспользовавшись формулами (2.1), (1.12) и (1.13), получим компоненты вектора перемещений

$$(2.6) \quad u_x = -\frac{1}{2c(1+\zeta)G_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x} e^{-\lambda\zeta}}{2\lambda^2 + 6\lambda + 3} \left\{ \frac{i\alpha}{c} g_1(\alpha) [(2\lambda + 1)\zeta - 1] - \right. \\ \left. - g_2(\alpha) [2\lambda^2\zeta + 3\lambda(\zeta - 1) - 6] \right\} d\alpha \\ u_z = -\frac{1}{2c(1+\zeta)G_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x} e^{-\lambda\zeta}}{2\lambda^2 + 6\lambda + 3} \left\{ g_1(\alpha) [2\lambda^2\zeta + \lambda(\zeta + 3) + 2] + \right. \\ \left. + \frac{i\alpha}{c} g_2(\alpha) [(2\lambda + 3)\zeta + 1] \right\} d\alpha \quad (\zeta = cz)$$

Для определенности будем полагать, что к границе полуплоскости приложены сосредоточенные нагрузки. Дальнейшее исследование удобно вести рассматривая в отдельности воздействие нормальной и касательной силы.

3. Пусть сосредоточенная сила P приложена в начале координат нормально к полуплоскости и действует в положительном направлении оси z . Тогда

$$(3.1) \quad \sigma(x) = -P\delta(x), \quad \tau(x) = 0$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Подставляя выражения (3.1) в (1.5), получаем

$$(3.2) \quad g_1(\alpha) = -P/(2\pi), \quad g_2(\alpha) = 0$$

Теперь формулы (2.6) приводятся к виду

$$(3.3) \quad u_x = \frac{P}{2\pi(1+\zeta)G_0} \int_0^{\infty} \lambda \sin \lambda \xi e^{-\lambda\zeta} \frac{(2\lambda + 1)\zeta - 1}{2\lambda^2 + 6\lambda + 3} d\lambda \\ u_z = \frac{P}{2\pi(1+\zeta)G_0} \int_0^{\infty} \cos \lambda \xi e^{-\lambda\zeta} \frac{2\lambda^2\zeta + \lambda(\zeta + 3) + 2}{2\lambda^2 + 6\lambda + 3} d\lambda \quad (\xi = cx)$$

Разложим дробно-рациональные выражения в подынтегральных функциях на элементарные дроби. Если теперь воспользоваться формулами [8]

$$(3.4) \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda p}}{\lambda + k} d\lambda = -e^{kp} \operatorname{Ei}(-kp) \quad (|\arg k| < \pi, \operatorname{Re} p > 0)$$

$$\int_0^{\infty} \sin \lambda \xi e^{-\lambda \zeta} d\lambda = \frac{\xi}{\xi^2 + \zeta^2}, \quad \int_0^{\infty} \cos \lambda \xi e^{-\lambda \zeta} d\lambda = \frac{\zeta}{\xi^2 + \zeta^2}$$

где $\operatorname{Ei}(-kp)$ — интегральная показательная функция, то получим

$$(3.5) \quad u_z = \frac{P}{2\pi(1+\zeta)G_0} \left\{ \frac{\zeta^2}{\xi^2 + \zeta^2} + \frac{1}{12} [15\zeta - 9 + (9\zeta - 5)\sqrt{3}] \times \right.$$

$$\times E_1(\gamma_1 \xi, \gamma_1 \zeta) + \frac{1}{12} [15\zeta - 9 - (9\zeta - 5)\sqrt{3}] E_1(\gamma_2 \xi, \gamma_2 \zeta) \left. \right\}$$

$$u_x = \frac{P}{2\pi(1+\zeta)G_0} \left\{ \frac{\xi \zeta}{\xi^2 + \zeta^2} + \frac{1}{4} [5\zeta + 1 + (3\zeta + 1)\sqrt{3}] \times \right.$$

$$\times E_2(\gamma_1 \xi, \gamma_1 \zeta) + \frac{1}{4} [5\zeta + 1 - (3\zeta + 1)\sqrt{3}] E_2(\gamma_2 \xi, \gamma_2 \zeta) \left. \right\}$$

Здесь

$$(3.6) \quad E_1(\xi, \zeta) = \frac{1}{2} [e^u \operatorname{Ei}(-u) + e^{\bar{u}} \operatorname{Ei}(-\bar{u})]$$

$$E_2(\xi, \zeta) = \frac{i}{2} [e^u \operatorname{Ei}(-u) - e^{\bar{u}} \operatorname{Ei}(-\bar{u})]$$

$$u = \zeta + i\xi, \quad \bar{u} = \zeta - i\xi, \quad \gamma_1 = 1/2 (3 + \sqrt{3}), \quad \gamma_2 = 1/2 (3 - \sqrt{3})$$

Отметим, что и для других частных случаев неоднородности упругой среды, определяемых соотношениями (2.3), компоненты вектора перемещений и тензора напряжений выражаются через функции $E_1(\xi, \zeta)$ и $E_2(\xi, \zeta)$.

Введем полярную систему координат

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \xi / \zeta$$

Если теперь воспользоваться представлением интегральной показательной функции в виде ряда, то из выражений (3.6) получим ($\gamma = 1.781072418$ — постоянная Эйлера)

$$(3.7) \quad E_1(\xi, \zeta) = e^{\zeta} \left[\ln \gamma \rho \cos \xi - \varphi \sin \xi + \sum_{k=1}^{\infty} (-\rho)^k \frac{\cos(k\varphi + \xi)}{k! k} \right]$$

$$E_2(\xi, \zeta) = -e^{\zeta} \left[\ln \gamma \rho \sin \xi + \varphi \cos \xi + \sum_{k=1}^{\infty} (-\rho)^k \frac{\sin(k\varphi + \xi)}{k! k} \right]$$

Из асимптотического разложения интегральной показательной функции получаем асимптотические разложения для $E_1(\xi, \zeta)$ и $E_2(\xi, \zeta)$ при больших ρ

$$(3.8) \quad E_1(\xi, \zeta) \sim -\frac{\cos \varphi}{\rho} + \frac{1! \cos 2\varphi}{\rho^2} - \frac{2! \cos 3\varphi}{\rho^3} + \dots$$

$$E_2(\xi, \zeta) \sim -\frac{\sin \varphi}{\rho} + \frac{1! \sin 2\varphi}{\rho^2} - \frac{2! \sin 3\varphi}{\rho^3} + \dots$$

Если воспользоваться формулой [8]

$$\operatorname{Ei}(\pm i\xi) = \operatorname{ci}(\xi) \pm i \operatorname{si}(\xi)$$

где $si(\xi)$, $ci(\xi)$ — интегральный синус и косинус, то при $\zeta = 0$ или $\xi = 0$ функции $E_1(\xi, \zeta)$ и $E_2(\xi, \zeta)$ удается выразить через табулированные

$$(3.9) \quad \begin{aligned} E_1'(\xi, 0) &= \cos|\xi| ci|\xi| + \sin|\xi| si|\xi| \\ E_2(\xi, 0) &= \begin{cases} \cos\xi si\xi - \sin\xi ci\xi, & \xi > 0 \\ -\cos|\xi| si|\xi| + \sin|\xi| ci|\xi|, & \xi < 0 \end{cases} \\ E_1(0, \zeta) &= e^\zeta Ei(-\zeta), \quad E_2(0, \zeta) = 0 \end{aligned}$$

Из формул (3.5) и (3.7) следует, что при $\rho \ll 1$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} u_x &\approx \frac{P}{4\pi G_0} (\sin 2\varphi - \varphi), \quad u_z \approx \frac{P}{2\pi G_0} \left(\cos^2 \varphi - \frac{3}{2} \ln r - C \right) \\ r &= \sqrt{x^2 + z^2}, \quad C = \frac{9 + 5\sqrt{3}}{12} \ln(c\gamma_1) + \frac{9 - 5\sqrt{3}}{12} \ln(c\gamma_2) \end{aligned}$$

Таким образом, вблизи точки приложения силы перемещения неоднородной полуплоскости с точностью до постоянной совпадают с перемещениями одинаково нагруженной с ней однородной полуплоскости, имеющей тот же коэффициент Пуассона и модуль сдвига, равный G_0 .

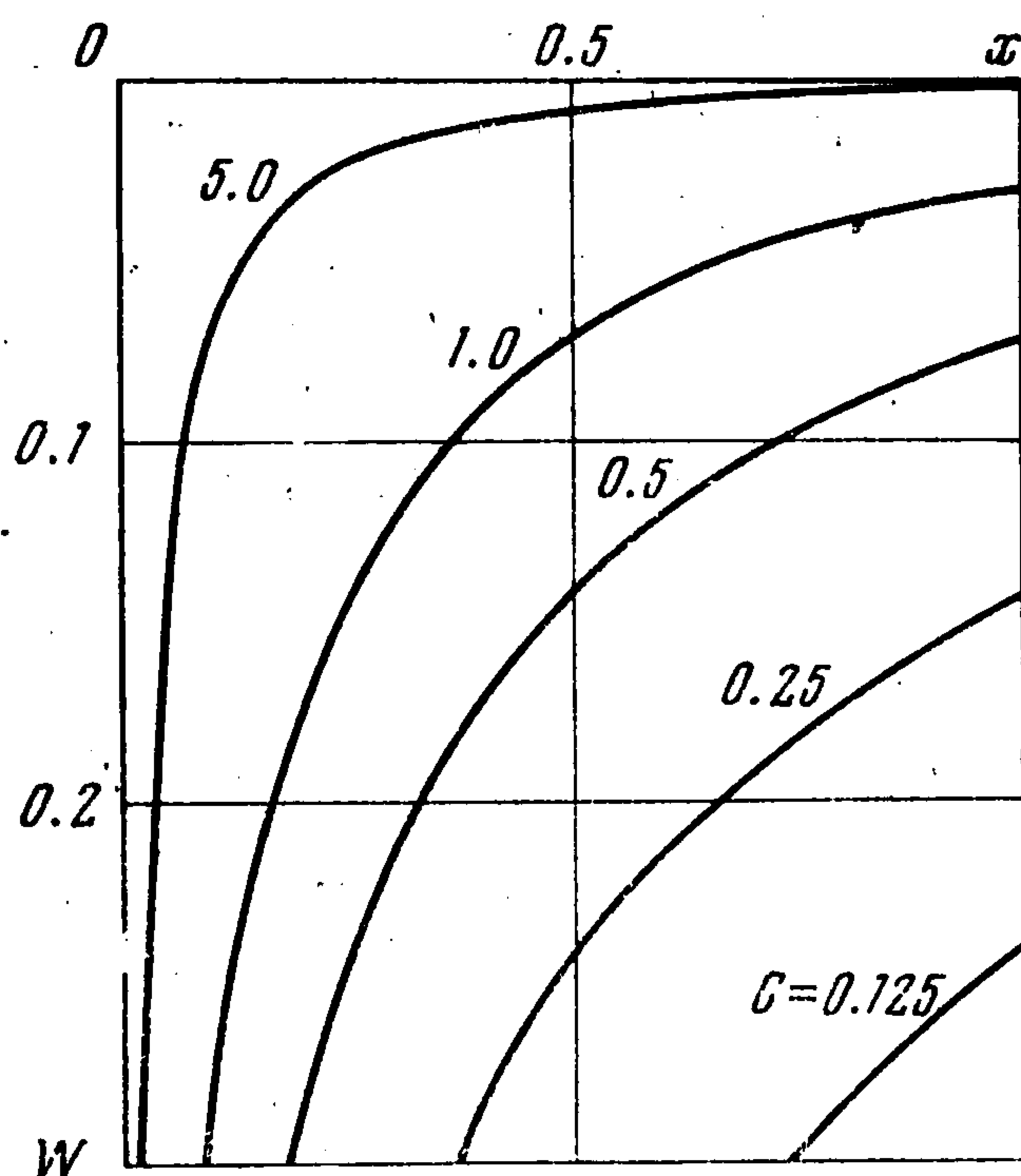
По мере удаления от точки приложения силы перемещения быстро затухают. Характер затухания легко выяснить, если воспользоваться асимптотическими разложениями функций $E_1(\xi, \zeta)$ и $E_2(\xi, \zeta)$. Так, например, осадки u_z границы [полуплоскости при больших ξ убывают со скоростью пропорциональной ξ^2 .

Положив в формулах (3.5) $c \rightarrow 0$, найдем, что перемещения u_z неограниченно возрастают. Однако, если закрепить одну из точек [полуплоскости, как это [и принято делать при решении соответствующей задачи для однородной среды, то придем к известным формулам Фламана,

Перемещения границы $z = 0$ полуплоскости, согласно (3.9) и (3.5), выражаются через табулированные функции и имеют вид

$$(3.11) \quad \begin{aligned} u_x|_{z=0} &= \frac{P}{8\pi G_0} [(1 + \sqrt{3}) E_2(\gamma_1 \xi, 0) + (1 - \sqrt{3}) E_2(\gamma_2 \xi, 0)] \\ u_z|_{z=0} &= -\frac{P}{24\pi G_0} [(9 + 5\sqrt{3}) E_1(\gamma_1 \xi, 0) + (9 - 5\sqrt{3}) E_1(\gamma_2 \xi, 0)] \end{aligned}$$

На фиг. 1 показаны вертикальные перемещения границы полуплоскости при разных значениях коэффициента c . По оси ординат отложена величина $W = u_z G_0 / P$.



Фиг. 1

4. Положим теперь, что сосредоточенная сила P , приложенная в начале координат к полуплоскости $z \geq 0$, действует в положительном направлении оси x касательно к границе. Тогда

$$(4.1) \quad \sigma(x) = 0, \quad \tau(x) = -P\delta(x)$$

Подставляя выражения (4.1) в (1.5), получаем

$$(4.2) \quad g_1(\alpha) = 0, \quad g_2(\alpha) = -P/(2\pi).$$

Теперь формулы (2.6) удастся преобразовать к виду

$$(4.3) \quad u_x = -\frac{P}{2\pi(1+\zeta)G_0} \int_0^\infty \cos \lambda \xi e^{-\lambda \zeta} \frac{2\lambda^2 \zeta + 3\lambda(\zeta - 1) - 6}{2\lambda^2 + 6\lambda + 3} d\lambda$$

$$u_z = \frac{P}{2\pi(1+\zeta)G_0} \int_0^\infty \sin \lambda \xi e^{-\lambda \zeta} \lambda \frac{(2\lambda + 3)\zeta + 1}{2\lambda^2 + 6\lambda + 3} d\lambda$$

Разложим дробно-рациональные выражения в подынтегральных функциях на элементарные дроби и воспользуемся формулами (3.4). В результате получим

$$(4.4) \quad u_x = -\frac{P}{2\pi(1+\zeta)G_0} \left\{ \frac{\zeta^2}{\xi^2 + \zeta^2} + \frac{1}{4} [3(\zeta + 1) + (\zeta - 1)\sqrt{3}] \times \right.$$

$$\times E_1(\gamma_1 \xi, \gamma_1 \zeta) + \frac{1}{4} [3(\zeta + 1) - (\zeta - 1)\sqrt{3}] E_1(\gamma_2 \xi, \gamma_2 \zeta) \left. \right\}$$

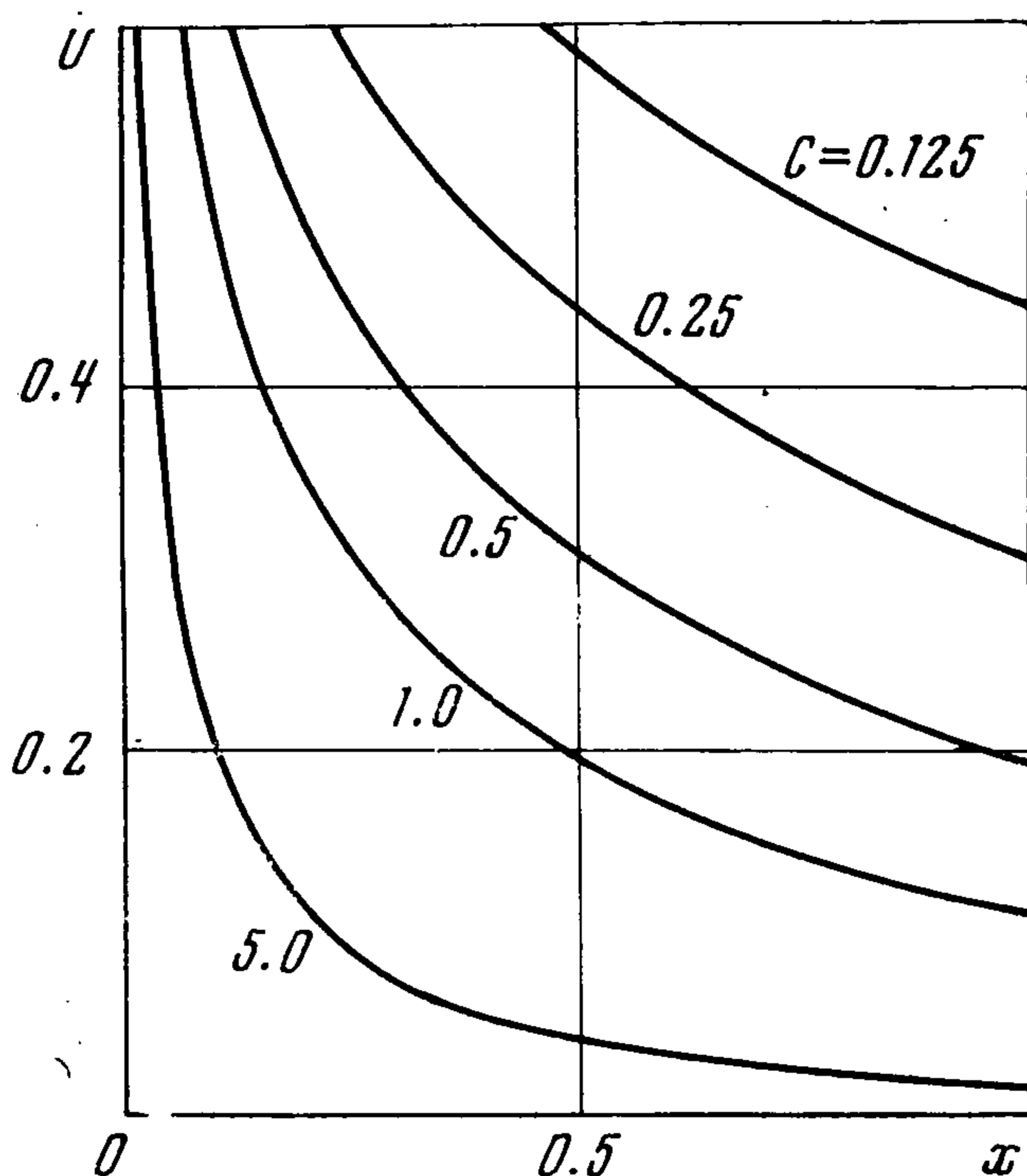
$$u_z = \frac{P}{2\pi(1+\zeta)G_0} \left\{ \frac{\xi \zeta}{\xi^2 + \zeta^2} + \frac{1}{4} [3\zeta - 1 + (\zeta - 1)\sqrt{3}] \times \right.$$

$$\times E_2(\gamma_1 \xi, \gamma_1 \zeta) + \frac{1}{4} [3\zeta - 1 - (\zeta - 1)\sqrt{3}] E_2(\gamma_2 \xi, \gamma_2 \zeta) \left. \right\}$$

Перемещения границы полуплоскости $z = 0$ выражаются через табулированные функции и имеют вид

$$(4.5) \quad u_x|_{z=0} = -\frac{P}{4\pi G_0} [\gamma_2 E_1(\gamma_1 \xi, 0) + \gamma_1 E_1(\gamma_2 \xi, 0)]$$

$$u_z|_{z=0} = -\frac{P}{8\pi G_0} [(1 + \sqrt{3}) E_2(\gamma_1 \xi, 0) + (1 - \sqrt{3}) E_2(\gamma_2 \xi, 0)]$$



Фиг. 2

Из выражений (4.4) и (3.7) следует, что вблизи точки приложения силы ($\rho \ll 1$) перемещения неоднородной полуплоскости с точностью до постоянной совпадают с перемещениями одинаково нагруженной однородной полуплоскости, имеющей тот же коэффициент Пуассона и модуль сдвига, равный G_0 . Однако по мере удаления от точки приложения силы, перемещения начинают быстро затухать. Характер затухания легко выявить, если воспользоваться асимптотическими разложениями (3.8). Так, например, из выражений (4.4) и (3.8) следует, что при $\rho \gg 1$

$$(4.6) \quad u_x|_{z=0} \approx \frac{3P}{2\pi G_0 (cx)^2}$$

На фиг. 2 показаны перемещения u_x точек поверхности полуплоскости при разных значениях коэффициента c . По оси ординат отложена величина $U = u_x G_0 / P$.

Поступила 26 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Радиальное распределение напряжений в клине и полуплоскости с переменным модулем упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости для тел с переменным модулем упругости. Тезисы докл. Всесоюз. совещ. по применению методов теории функций комплексного переменного к задачам матем. физики. Тбилиси, 1961.
3. Ростовцев Н. А. К теории упругости неоднородной среды. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
4. Ростовцев Н. А., Храневская И. Е. Решение задачи Буссинеска для полупространства при степенной зависимости модуля упругости от глубины. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
5. Плевако В. П. О возможности использования гармонических функций при решении задач теории упругости неоднородных сред. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
6. Плевако В. П. К теории упругости неоднородных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
7. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики, вып. 3. М., «Мир», 1970.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.