Прикладная математика и механика. Том. 37, 1973

УДК 539.3:534.231.1

О РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ ПЛОСКОЙ КОНЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

А. А. Буренин, Нгуен Хыу Тхань, А. Д. Чернышов

(Воронеж)

Исследуются условия распространения ударных волн в упругой среде с потенциалом Мурнагана [1]. Из решения системы уравнений в скачках на ударных волнах найдены скорости возможных ударных волн. При помощи второго закона термодинамики на поверхности разрыва получены необходимые условия существования ударных волн, аналогичные теореме Цемплена для совершенного газа.

Распространение слабых волн разрывов в упругой среде при конечных деформациях исследовалось в работе [2] и др. В работе [3] упругая среда считалась несжимаемой. Для сжимаемой упругой среды распространение ударных волн исследовалось в работах [4–6] и др. В [4] определяющие уравнения записывались в виде обобщенного закона Гука; были получены выражения для скоростей ударных волн и условие существования квазипоперечной ударной волны. В [5, 6] изучались ударные волны при частных случаях деформирования среды перед ударной волной.

1. Упругую среду определим потенциалом Мурнагана

$$W = aI_1^2 + cI_2 + lI_1I_2 + mI_3 + nI_1^3 \tag{1.1}$$
$$I_1 = e_{kk}, \qquad I_2 = e_{ki}e_{ki}, \qquad I_3 = e_{ik}e_{kj}e_{ji}$$
$$e_{ij} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j})$$

Здесь e_{ij} — тензор конечных деформаций Альманси, I_1, I_2, I_3 — инварианты этого тензора, u_i — компоненты вектора перемещений в декартовой системе координат. Коэффициенты a и c линейно выражаются через параметры Ляме, а коэффициенты l, m, n называют обычно коэффициентами Мурнагана или упругими модулями третьего порядка. Применимость формулы (1.1) для широкого класса материалов показана в работах [7, 8], где эти коэффициенты экспериментально определены.

Из условия неотрицательности функции W вытекают следующие ограничения на коэффициенты a, c, l, m, n в выражении (1.1):

$$a > 0, \ \ c > 0, \ \ \operatorname{sign} l = \operatorname{sign} n = \operatorname{sign} I_1 \tag{1.2}$$
$$\operatorname{sign} m = \operatorname{sign} I_3$$

В случае плоского деформированного состояния выполняется равенство

$$I_3 = (2\,e_{12}^2 + e_{11}^2 + e_{22}^2 - e_{11}e_{22})\,I_1$$

Выражение в скобках неотрицательно, поэтому

$$\operatorname{sign} I_1 = \operatorname{sign} I_3 = \operatorname{sign} m \tag{1.3}$$

Тензор напряжений Эйлера σ_{ij} вычисляем по формуле [5]

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}) \tag{1.4}$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3} I_1^3 + 4I_1 I_2 - \frac{8}{3} I_3\right)^{1/2}$$

Здесь относительная плотность ρ / ρ_0 выражена через инварианты тензора Альманси [1]. Подстановка (1.1) в (1.4) приводит к определяющему уравнению

$$\begin{gathered}\sigma_{ij} = 2\, a e_{kk} \delta_{ij} + 2\, c e_{ij} + (3\, n - 2\, a)\, u_{k,k}^2\, \delta_{ij} + l v_{sk} v_{ks} \delta_{ij} + \\ + 2\, (l - 2\, a - c)\, u_{k,k} v_{ij} + (3\, m - 4\, c)\, v_{ik} v_{kj} \\ v_{ij} = {}^1/_2\, (u_{i,j} + u_{j,i})\end{gathered} \tag{1.5}$$

Пусть в рассматриваемой среде движется поверхность разрыва Σ с некоторой скоростью G. Введем связанную с Σ подвижную систему координат, ось x_2 направим по нормали к линии разрыва. Пусть неподвижная система координат в данный момент времени имеет оси, параллельные осям подвижной, тогда формулы перехода примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \delta_{i2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \delta_{i1} \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta t} - G \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Здесь $\delta / \delta t$ — дельта-производная по времени [9]. Перемещения на Σ непрерывны, поэтому

$$[u_{i,j}] = [u_{i,2}]\, \delta_{j2} \tag{1.6}$$

Квадратными скобками обозначаются скачки соответствующих величин. В подвижной системе координат скорости перемещений вычисляются по формуле

$$v_i = \delta u_i / \delta t + (v_2 - G)\, u_{i,2} + v_1 u_{i,1} \tag{1.7}$$

Выполняя операцию скачка в (1.7) и учитывая (1.6), получим

$$[v_i] = u_{i,1}\, [v_1] + [(v_2 - G)\, u_{i,2}] \tag{1.8}$$

Рассмотрим частный случай, когда перед ударной волной компоненты вектора перемещений не зависят от x_1, тогда из выражения для e_{ij} в (1.1), (1.5) и (1.6) получаем для случая плоского деформированного состояния выражения для скачков тензоров деформаций и напряжений

$$\begin{gathered}[\sigma_{12}] = f_{1k}\, [u_{k,2}], \qquad [\sigma_{22}] = f_{2k}\, [u_{k,2}] \\ f_{11} = \{c - \lambda_1 (u_{2,2}^+ - [u_{2,2}])\}, \qquad f_{12} = -\lambda_1 u_{1,2}^+ \\ f_{21} = -\lambda_3 (2u_{2,2}^+ - [u_{2,2}]), \qquad f_{22} = \lambda_0 - \lambda_2 (2u_{2,2}^+ - [u_{2,2}]) \\ \lambda_0 = 2\, (a + c), \qquad \lambda_1 = 2a + 3c - l - {}^3/_2\, m \\ \lambda_2 = 7\, (a + c) - 3\, (l + m + n), \qquad \lambda_3 = {}^1/_4\, (4a + 8c - \\ - 2l - 3m)\end{gathered} \tag{1.9}$$

Разрешая (1.8) относительно $[v_i]$, получим

$$\begin{gathered}[v_1] = (v_2^- - G) \{[u_{1,2}] + u_{1,2}^+\, [u_{2,2}] / (1 - u_{2,2}^+)\} \\ [v_2] = (v_2^- - G)\, [u_{2,2}] / (1 - u_{2,2}^+)\end{gathered} \tag{1.10}$$

Добавим к соотношениям (1.9), (1.10) динамические условия совместности разрывов на ударной волне

$$(1.11)\qquad [\sigma_{12}] = \rho^-(v_2^- - G)[v_1], \quad [\sigma_{22}] = \rho^-(v_2^- - G)[v_2], \qquad [\rho(v_2 - G)] = 0$$

Уравнения (1.9) — (1.11) образуют замкнутую систему относительно скачков разрывных величин. Исключая из нее скачки компонент тензоров напряжений и деформаций, приходим к следующим равенствам:

$$(1.12)\qquad V\{[u_{1,2}] + u_{1,2}^+[u_{2,2}]/(1 - u_{2,2}^+)\} = f_{1k}[u_{k,2}], \quad V[u_{2,2}] = (1 - u_{2,2}^+)f_{2k}[u_{k,2}], \qquad V = \rho^-(v_2^- - G)^2$$

Будем считать V неизвестной величиной, характеризующей скорость распространения ударной волны. Исключая из (1.12) $[u_{1,2}]$, получим кубическое уравнение относительно V

$$(1.13)\qquad AV^3 - BV^2 - CV + D = 0$$

Выражения коэффициентов A, B, C, D через величины, входящие в (1.12), не приводятся из-за громоздкости. Если дискриминант кубического уравнения (1.13) положительный, то оно имеет три действительных корня. Так как $V > 0$, то количество положительных корней определяет количество возможных ударных волн.

2. Для исследования корней уравнения (1.13) воспользуемся методом малого параметра, считая $u_{1,2}^+$ малой величиной. Пренебрегая в (1.13) квадратом этой величины, получим

$$(2.1)\qquad A_0V^3 + B_0V^2 + C_0V + D_0 = 0$$
$$A_0 = 1 - u_{2,2}^+, \qquad B_0 = A_0^2 f_{22} + 2A_0 f_{11}$$
$$C_0 = A_0 f_{11}^2 + 2A_0^2 f_{22} f_{11}, \qquad D_0 = A_0^2 f_{22} f_{11}^2$$

Уравнение (2.1) можно привести к виду

$$(2.2.)\qquad (V - V_1^\circ)(V - V_2^\circ)(V - V_3^\circ) = 0$$
$$V_1^\circ = A_0 f_{22}, \qquad V_2^\circ = V_3^\circ = f_{11}$$

Подстановки $V = V_1^\circ$ и $V = V_2^\circ$ в (1.12) в том же приближении приводят соответственно к равенствам

$$(2.3)\qquad [u_{1,2}] = 0, \qquad [u_{1,2}] = (f_{22} + f_{11}A_0^{-1})[u_{2,2}]$$

Отсюда видно, что первое приближение в рассматриваемом случае приводит к тем же результатам, что и линейная теория: возможны две ударные волны — продольная и поперечная. Нелинейность сказывается лишь количественно в значениях для скоростей распространения этих ударных волн.

Перейдем к отысканию второго приближения для корней уравнения (1.13), которые представим в виде суммы первого приближения и малого поправочного члена

$$(2.4)\qquad V_1 = V_1^\circ + V_1^1, \qquad V_2 = V_2^\circ + V_2^1$$

Подставляя (2.4) в (1.13), получим, с точностью до членов более высокого порядка малости, следующие значения для V_1 и V_2:

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} V_1 &= V_1^\circ - \frac{\lambda_3 (V_1^\circ + \lambda_1 A_0)}{A_0 (V_1^\circ - V_2^\circ)} \{2A_0 (V_1^\circ - V_2^\circ) + V_1^\circ + \lambda_1 A_0 [u_{2,2}]\} u_{1,2}^{2} \\ V_{2,3} &= V_2^\circ \pm (V_2^\circ + A_0\lambda_1) \left\{ \frac{\lambda_3 [u_{2,2}]}{2A_0 (V_2^\circ - V_1^\circ)} \right\}^{1/2} u_{1,2}^{+} \end{aligned}$$

Ударную волну, соответствующую корню V_1, назовем квазипродольной, а ударные волны, определяемые корнями $V_{2,3}$,— квазипоперечными. Существование квазипоперечных волн возможно, если дискриминант кубического уравнения (1.13) положительный, что приводит к неравенству

$$(2.6)\qquad \lambda_3 [u_{2,2}] \leqslant 0$$

Для известных упругих материалов коэффициенты l, m, n малы по сравнению с коэффициентами a и c, т. е. $\lambda_3 > 0$, поэтому из (2.6) получаем неравенство

$$(2.7)\qquad [u_{2,2}] \leqslant 0$$

Заметим, что при $I_1 < 0$, согласно (1.2) и (1.3), неравенство (2.6) справедливо при любых l, m, n. Неравенство (2.7) впервые было получено в [4] для квазигуковой модели упругой среды.

3. На ударной волне должно выполняться термодинамическое условие совместности разрывов, которое является следствием второго закона термодинамики. Запишем это условие в форме [10]

$$(3.1)\qquad \begin{gathered} \frac{1}{2} A [v_i v_i] + A_i [v_i] - \frac{A}{\rho_0} [W] \geqslant 0 \\ A = \rho^- (v_2^- - G), \qquad A_i = \sigma^+ - A v_i^+ \end{gathered}$$

В данном случае неравенство (3.1) принимает следующий вид:

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} &-\frac{1}{2} \rho^- (v_2^- - G) [v_1]^2 - \frac{1}{2} \rho^- (v_2 - G) [v_2]^2 + \\ &+ \sigma_{12}^+ [v_1] + \sigma_{22}^+ [v_2] - \frac{\rho}{\rho_0} (v_2^- - G) [W] \geqslant 0 \end{aligned}$$

Используя (1.1), скачок упругого потенциала можно в представить форме

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} [W] &= a[(e_{11} + e_{22})^2] + (l + {}^3/_2\, m) [(e_{11} + e_{22}) e_{ik} e_{ki}] + \\ &+ c [e_{ik} e_{ki}] + (n - {}^1/_2\, m) [(e_{11} + e_{22})^3] \end{aligned}$$

Для компонент тензора напряжений σ_{12}^+ и σ_{22}^+ из (1.8) найдем значения

$$(3.4)\qquad \sigma_{12}^+ = c u_{1,2}^+ - \lambda_1 u_{1,2}^+ u_{2,2}^+, \qquad \sigma_{22}^+ = \lambda_0 u_{2,2}^+ - \lambda_2 u_{2,2}^{+2} - \lambda_3 u_{1,2}^{+2}$$

Рассмотрим неравенство (3.2) в случае квазипродольной ударной волны. Подставляя (3.3), (3.4), (1.14) и первое равенство из (2.4) в (3.2) и ограничиваясь кубами компонент тензора градиента перемещений, получим неравенство

$$(3.5)\qquad (a + c + l + m + n) [u_{2,2}] \geqslant 0$$

Для случая, когда коэффициенты l, m и n малы по сравнению с коэффициентами a и c, неравенство (3.5) принимает простую форму

$$[u_{2,2}] \geqslant 0 \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что в упругих средах невозможны квазипродольные ударные волны разряжения. В случае же квазипоперечной ударной волны левая часть неравенства (3.2) с точностью до кубов величин u_{ij} тождественно равна нулю.

Таким образом, если диссипация энергия на квазипродольной ударной волне имеет третий порядок малости по компонентам тензора $u_{i,j}$, то диссипация энергии на квазипоперечной ударной волне в рассматриваемом случае имеет порядок выше третьего.

Поступила 5 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, М., «Наука», 1970, т. 1.
2. *Truesdell G.* General and exact theory of waves in finite elastic strain. Arch. Ration Mech. and Analysis, 1964, vol. 8, № 6.
3. *Boa-Teh Chy.* Trahsverse chock waves in incompressible elastic solids. J. Mech. Phys. Solids, 1967, vol. 15, No. 1.
4. *Черньшов А. Д.* О распространении ударных волн в упругом пространстве при конечных деформациях. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
5. *Bland D. R.* Non-linear dynamic elasticity. Waltham, Massachusetts — Toronto — London. (рус. перев.: Нелинейная динамическая теория упругости. М., «Мир», 1972.)
6. *Филатов Г. Ф.* О распространении ударных волн в нелинейной теории упругости. Сб. научн. тр. фак. прикл. матем. и механ. Воронежск. ун-та, 1971, вып. 2.
7. *Hughes D. S., Kelly I. L.* Second-order elastic deformation of solids. Phys. Rev, 1953, vol. 92, No. 5.
8. *Савин Г. Н., Лукашов А. А., Лыско Е. М., Веремеенко С. В., Вожевская С. М.* Распространение упругих волн в твердом теле в случае нелинейно-упругой модели сплошной среды. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 2.
9. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
10. *Черньшов А. Д.* Об условиях распространения ударных волн в средах с упругими и пластическими свойствами. В сб.: Проблемные вопросы механики горных пород. Алма-Ата, «Наука», 1972.