Прикладная математика и механика. Том. 37, 1973

УДК 539.3:534.231.1

ВОЛНЫ РЭЛЕЯ В НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ, ЛЕЖАЩЕМ НА ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

А. Г. Аленицын

(Ленинград)

Изучаются колебания типа рэлеевских волн, распространяющихся вдоль поверхности неоднородного (по глубине) упругого слоя, лежащего на упругом полупространстве. Принято, что рэлеевская скорость на дневной поверхности меньше поперечной скорости в слое, но больше продольной скорости в полупространстве. В приближении высоких частот вычислена фазовая скорость волны, аналогичной обычной рэлеевской волне в задаче Рэлея для однородного полупространства. Показано, что эта фазовая скорость невещественна, вследствие чего волна затухает при ее распространении вдоль дневной поверхности.

1. Постановка задачи. Рассматривается следующая плоская задача (задача Рэлея): слой $-\infty < x < +\infty$, $0 < z < \alpha$ $(\alpha > 0)$ заполнен изотропной упругой средой с параметрами $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\rho(z)$; при $z = \alpha$ слой жестко скреплен с однородным изотропным упругим полупространством $z > \alpha$, где параметры λ°, μ°, ρ° постоянны. «Дневная» поверхность $z = 0$ свободна от напряжений. Изучаются в области $z \geqslant 0$ решения системы уравнений упругости вида

$$\mathbf{u}(x, z, t, k, \sigma) = e^{ik(x-t\sigma)}(-iV_1(z, k, \sigma), 0, V_2(z, k, \sigma)) \tag{1.1}$$

удовлетворяющие условию излучения при $z \to +\infty$.

Представляют интерес собственные числа задачи, т. е. такие значения $\sigma = \sigma(k, \alpha)$, при которых существуют нетривиальные решения $\mathbf{u}(x, z, t, k, \sigma)$. Будет изучена при больших значениях волнового числа k $(k > 0)$ область фазовых скоростей σ, близких к v_R — рэлеевской скорости на дневной поверхности. Предполагается, что

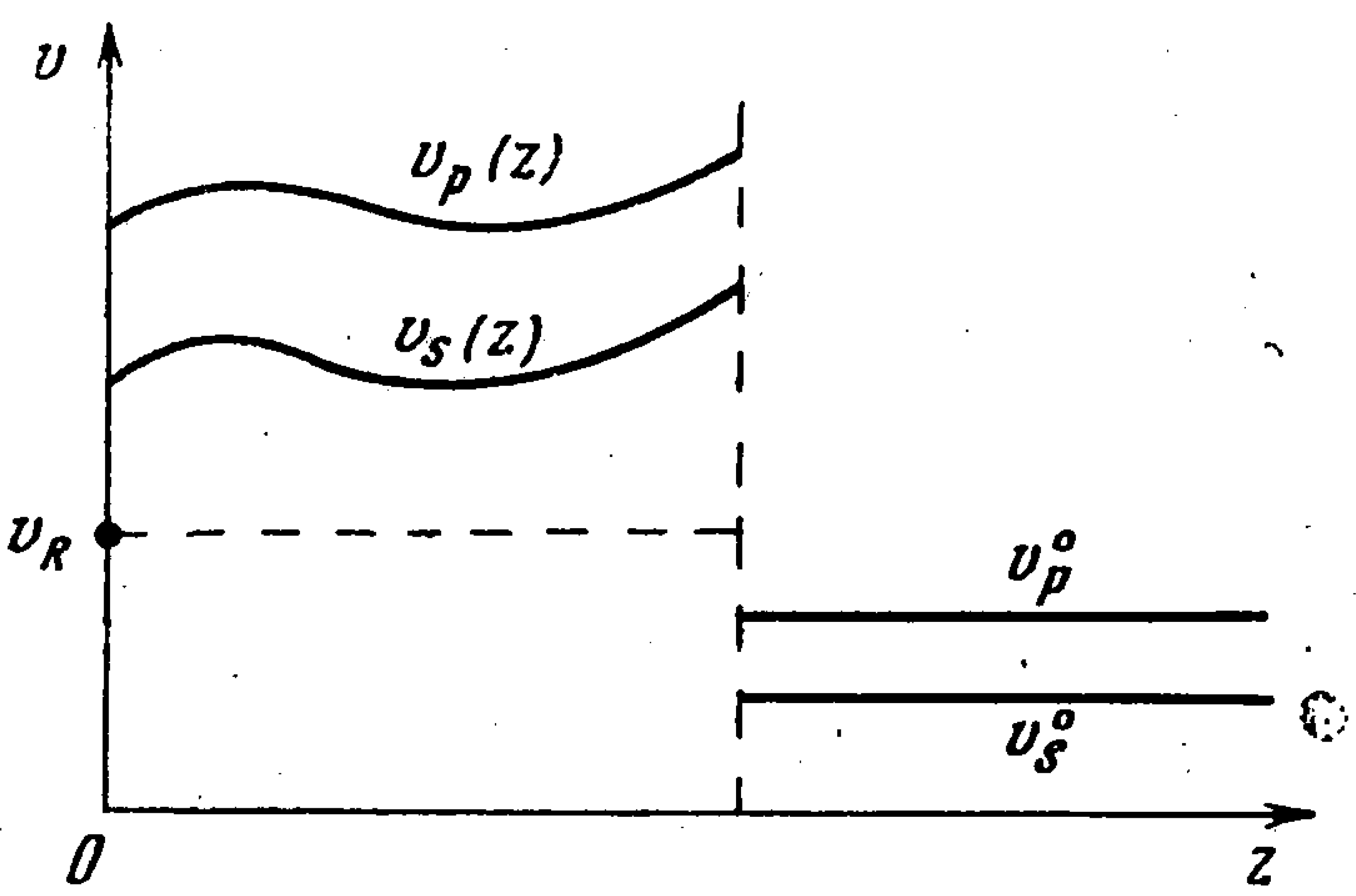
$$v_p^\circ < v_R^* < v_m \equiv \min_{0 \leqslant z \leqslant \alpha} v_s(z)$$

Здесь $v_s(z)$ — поперечная скорость в слое, v_p° — продольная скорость в полупространстве $z > \alpha$, т. е.

$$v_s(z) = \sqrt{\frac{\mu(z)}{\rho(z)}}, \qquad v_p^\circ = \sqrt{\frac{\lambda^\circ + 2\mu^\circ}{\rho^\circ}}$$

Параметры $\lambda(z)$, $\mu(z)$, $\rho(z)$ считаются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями при $z \in [0, \alpha]$. Таким образом, в рассматриваемой задаче продольная и поперечная скорости испытывают в точке $z = \alpha$ скачок (фигура). На поверхности разрыва коэффициентов $z = \alpha$ предполагается непрерывность вектора смещений $\mathbf{u}$ и нормальной компоненты τ_z тензора напряжений.

Введем, как и в [1], четырехмерный вектор $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(z, k, \sigma) = (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = (V_1, V_2, k^{-1}V_1', k^{-1}V_2')$] (штрих означает дифференцирование по переменной z), получим следующую граничную задачу:



Фиг. 1

$$\Omega_0\mathbf{Z} = 0, \quad z = 0 \tag{1.2}$$

$$\mathbf{Z}' = (kA(z, \sigma) + B(z))\mathbf{Z}, \quad 0 \leqslant z \leqslant \alpha \tag{1.3}$$

$$\Omega_1\mathbf{Z} = \Omega_1^\circ\mathbf{Z}^\circ, \quad z = \alpha \tag{1.4}$$

$$\mathbf{Z}^{\circ\prime} = kA^\circ(\sigma)\mathbf{Z}^\circ, \quad z \geqslant \alpha \tag{1.5}$$

При этом вектор $\mathbf{Z}^\circ$ должен удовлетворять условию излучения в сторону $z = +\infty$. Здесь использованы обозначения

$$\Omega_j = \begin{Vmatrix} 0 & -\mu & \mu & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \nu \\ j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A(z, \sigma) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{m_p^2}{\gamma} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\gamma} - 1 \\ 0 & \gamma m_s^2 & \gamma - 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$B(z) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\mu'}{\mu} & -\dfrac{\mu'}{\mu} & 0 \\ -\dfrac{\lambda'}{\nu} & 0 & 0 & -\dfrac{\nu'}{\nu} \end{Vmatrix}, \quad A^\circ(\sigma) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{(m_p^\circ)^2}{\gamma^\circ} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\gamma^\circ} - 1 \\ 0 & \gamma^\circ (m_s^\circ)^2 & \gamma^\circ - 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$j = 0, 1, \quad \nu = \lambda + 2\mu, \quad \gamma = \mu / \nu, \quad m_l^2 = 1 - \sigma^2 n_l^2, \quad l = p, s$$
$$n_p^2 = n_p^2(z) = \rho(z) / \nu(z), \quad n_s^2 = n_s^2(z) = \rho(z) / \mu(z)$$

Здесь и далее все величины, относящиеся к полупространству $z \geqslant \alpha$, помечены нулевым верхним индексом. Поясним, что (1.4) означает жесткий контакт слоя с полупространством.

Условию излучения удовлетворяет следующая линейная комбинация столбцов фундаментальной матрицы $P^\circ \exp(ik(z - \alpha)\Lambda^\circ)$ системы (1.5):

$$\mathbf{Z}^\circ|_{z \geqslant \alpha} = P^\circ \exp(ik(z - \alpha)\Lambda^\circ)\varkappa^\circ, \quad \varkappa^\circ = (\varkappa_1^\circ, \varkappa_2^\circ, 0, 0) \tag{1.6}$$

где $\varkappa_1^\circ$, $\varkappa_2^\circ$ — произвольные постоянные; матрица $P^\circ = P^\circ(\sigma)$ приводит $A^\circ(\sigma)$ к диагональной форме $i\Lambda^\circ$, причем

$$\Lambda^\circ = \Lambda^\circ(\sigma) = \operatorname{diag}\{M_p, M_s, -M_p, -M_s\}, \quad M_l = M_l(\sigma) = \sqrt{-(m_l^\circ)^2}$$

и $M_l > 0$ при вещественных $\sigma \approx v_R$, $l = p, s$.

Пусть $Y(z, k, \sigma)$ — фундаментальная матрица системы (1.3) на промежутке [0, α]. Вектор $\mathbf{Z}^\circ$ продолжается на промежуток [0, α] в виде $\mathbf{Z} = Y(z, k, \sigma)\varkappa$, где $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4)$ — некоторый постоянный вектор-столбец. Условие контакта (1.4) дает соотношение $\Omega_1(\alpha) Y(\alpha, k, \sigma) \varkappa = \Omega_1^\circ P^\circ(\sigma) \varkappa^\circ$ или

$$\varkappa^\circ = \Phi(\alpha, k, \sigma)\varkappa \tag{1.7}$$

$$\Phi(\alpha, k, \sigma) = (P^\circ(\sigma))^{-1} (\Omega_1^\circ)^{-1} \Omega_1(\alpha) Y(\alpha, k, \sigma)$$

В качестве двух независимых произвольных постоянных удобно взять $\varkappa_1, \varkappa_2$ (вместо $\varkappa_1^\circ, \varkappa_2^\circ$). Решив третье и четвертое уравнения (1.7) относительно $\varkappa_3, \varkappa_4$, получим

$$\varkappa_3 = b_1\varkappa_1 + b_2\varkappa_2, \quad \varkappa_4 = b_3\varkappa_1 + b_4\varkappa_2 \tag{1.8}$$

$$b_i = b_i(\delta, k), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$b_1 = (\Phi_{41}\Phi_{34} - \Phi_{31}\Phi_{44}) / q, \quad b_2 = (\Phi_{34}\Phi_{42} - \Phi_{32}\Phi_{44}) / q$$

$$b_3 = (\Phi_{43}\Phi_{31} - \Phi_{33}\Phi_{41}) / q, \quad b_4 = (\Phi_{43}\Phi_{32} - \Phi_{33}\Phi_{42}) / q$$

$$q = \Phi_{33}\Phi_{44} - \Phi_{34}\Phi_{43} \neq 0$$

Граничное условие (1.2) дает систему четырех уравнений

$$\Omega_0(0) Y(0, k, \sigma) \varkappa = 0 \tag{1.9}$$

из которых нетривиальны лишь первые два уравнения. Вставим (1.8) в (1.9), получим два однородных уравнения для $\varkappa_1, \varkappa_2$

$$(F_{j1} + b_1F_{j3} + b_3F_{j4}) \varkappa_1 + (F_{j2} + b_2F_{j3} + b_4F_{j4}) \varkappa_2 = 0 \tag{1.10}$$

$$j = 1, 2, \quad F = F(\sigma, k) = \Omega_0(0) Y(0, k, \sigma)$$

Собственные числа граничной задачи (1.2) — (1.5) определяются из условия вырождения системы (1.10).

Поставим вспомогательную «модельную» задачу Рэлея. Именно, продолжим функции $\lambda(z), \mu(z), \rho(z)$ при $z \geqslant \alpha$ так, чтобы при всех $z \geqslant 0$ они были дважды непрерывно дифференцируемыми, а начиная с некоторого $z = z_* > \alpha$ — постоянными, причем при всех $z \geqslant 0$ выполнялось условие $v_s(z) > v_R$. Вместо условия излучения поставим условие убывания решения $Z(z, k, \sigma)$ при $z \to \infty$.

В этой задаче решение имеет вид $Y_*(z, k, \sigma)(\varkappa_1, \varkappa_2, 0, 0)$, где $Y_*(z, k, \sigma)$ означает фундаментальную матрицу модельной задачи; очевидно, $Y_*(z, k, \sigma) = Y(z, k, \sigma)$ на отрезке $z \in [0, \alpha]$. Граничное условие (1.2) дает систему четырех уравнений $\Omega_0(0) Y(0, k, \sigma)(\varkappa_1, \varkappa_2, 0, 0) = 0$, из которых нетривиальны первые два

$$F_{j1}\varkappa_1 + F_{j2}\varkappa_2 = 0, \quad j = 1, 2 \tag{1.11}$$

Собственные числа модельной задачи определяются из условия вырождения системы (1.11)

$$R(\sigma, k) = 0 \tag{1.12}$$

$$R(\sigma, k) \equiv F_{11}(\sigma, k) F_{22}(\sigma, k) - F_{21}(\sigma, k) F_{12}(\sigma, k)$$

Система (1.10) отличается от (1.11) наличием членов, содержащих b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Далее будет показано, что при $k \gg 1$ величины b_i экспоненциально малы, откуда следует близость собственных чисел исходной и модельной задач Рэлея. Этого явления и следовало ожидать, поскольку для коротких волн «поглотитель энергии» (т. е. подстилающее полупространство $z \geqslant \alpha$) далек от дневной поверхности, вблизи которой в основном сосредоточена энергия рэлеевских волн, и влияние этого поглотителя на собственное число мало.

2. Асимптотические формулы. Для фундаментальной матрицы $Y(z, k, \sigma)$ системы (1.3) имеем асимптотическую формулу при $k \to \infty$ (см. [2]).

$$Y(z, k, \sigma) = (T(z, \sigma) + O(k^{-1}))\, D(z, \sigma) \exp\left(k \int_0^z \Lambda(\zeta, \sigma)\, d\zeta\right) \tag{2.1}$$

Здесь матрица $T(z, \sigma)$ приводит $A(z, \sigma)$ к диагональной форме

$$\Lambda(z, \sigma) = \operatorname{diag}\{-m_p, -m_s, m_p, m_s\}$$

$$T(z, \sigma) = \left\| \begin{matrix} 1 & m_s & 1 & m_s \\ m_p & 1 & -m_p & -1 \\ -m_p & -m_s^2 & m_p & -m_s^2 \\ -m_p^2 & -m_s & -m_p^2 & -m_s \end{matrix} \right\|$$

$$D(z, \sigma) = (\rho \operatorname{diag}\{m_p, m_s, m_p, m_s\})^{-1/2}$$

Радикалы $m_l(z, \sigma)$ ($l = p, s$) определены на комплексной плоскости σ, разрезанной по лучам $\arg(\sigma - v_m) = 0$, $\arg(\sigma + v_m) = \pi$, причем взяты ветви, для которых $m_l(z, 0) > 0$. Асимптотика (2.1) равномерна по $z \in [0, \alpha]$ и по $\sigma \in \Sigma$, где Σ — любой компакт на плоскости σ, не содержащий точек разрезов. В качестве Σ можно взять, например, круг $|\sigma| \leqslant v_m - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Применяя формулу (2.1) к уравнению (1.12), получим уравнение

$$R_0(\sigma) + O(k^{-1}) = 0 \tag{2.2}$$

$$R_0(\sigma) \equiv (1 + m_s^2(0, \sigma))^2 - 4\, m_p(0, \sigma)\, m_s(0, \sigma)$$

Уравнение (2.2) имеет корень $\sigma_R(k)$, близкий к положительному корню v_R уравнения[1] $R_0(\sigma) = 0$, именно

$$\sigma_R(k) = v_R + O(k^{-1})$$

В работе [2] эта формула уточнена: показано, что

$$\sigma_R(k) = v_R + v_1 k^{-1} + O(k^{-2}) \tag{2.3}$$

и вычислена величина v_1, зависящая от $\lambda(0)$, $\mu(0)$, $\rho(0)$, $\lambda'(0)$, $\mu'(0)$, $\rho'(0)$ (вследствие самосопряженности модельной задачи $\operatorname{Im} \sigma_R(k) \equiv 0$).

Перейдем к вычислению собственного числа исходной задачи. Подставляя асимптотику (2.1) в формулы (1.8), получаем следующие оценки:

$$b_1 = O(E_p^2), \quad b_2 = O(E_pE_s), \quad b_3 = O(E_pE_s), \quad b_4 = O(E_s^2)$$

$$E_l \equiv \exp\left(-k \int_0^\alpha m_l(z, \sigma)\, dz\right), \qquad l = p, s$$

В качестве области Σ возьмем теперь окрестность точки $\sigma = v_R$. Так как $0 < \operatorname{Re} m_s(z, \sigma) < \operatorname{Re} m_p(z, \sigma)$ при $\sigma \in \Sigma$, то главный вклад в поправку к формуле (2.3) дает $b_4(\sigma, k)$. Уравнение для собственных чисел

[1] В случае однородного полупространства уравнение $R_0(\sigma) = 0$ называется уравнением Рэлея, $R(\sigma, k) \equiv R_0(\sigma)$, $0 < v_R < v_s(0)$.

исходной задачи приобретает, таким образом, вид

(2.4) $\quad R(\sigma, k) + b_4(\sigma, k) S(\sigma, k)[1 + \varepsilon(\sigma, k)] = 0$

Здесь

$$S(\sigma, k) \equiv F_{11}(\sigma, k) F_{24}(\sigma, k) - F_{21}(\sigma, k) F_{14}(\sigma, k) =$$
$$= S_0(\sigma) + O(k^{-1})$$
$$S_0(\sigma) \equiv (1 + m_s^2(0, \sigma))^2 + 4 m_p(0, \sigma) m_s(0, \sigma)$$
$$\varepsilon(\sigma, k) = O(E_p / E_s)$$

В силу теоремы Руше в окрестности точки v_R существует корень уравнения (2.4), причем

(2.5) $\quad \sigma_R(k, \alpha) = \sigma_R(k) + (b_4 S_0 / R_0')\,|_{\sigma=\sigma_R(k)}\,(1 + o(1))$

Для мнимой части $\sigma_R(k, \alpha)$ имеем, в частности, формулу

(2.6) $\quad \operatorname{Im}\sigma_R(k, \alpha) = -(\beta + O(k^{-1}))\exp\left(-2k\int\limits_0^\alpha \sqrt{1 - n_s^2(z)\, v_R^2}\,dz\right)$

Коэффициент β вычислим, для простоты, в частном случае непрерывных параметров λ и μ, т. е. при $\lambda(\alpha - 0) = \lambda^\circ$, $\mu(\alpha - 0) = \mu^\circ$; при этом скачок скоростей в точке $z = \alpha$ происходит лишь за счет скачка параметра ρ: $\rho(\alpha - 0) < \rho^\circ$

Результат вычисления

$$\beta = \varphi\psi\eta > 0,\ \eta = S_0(v_R) / R_0'(v_R) = v_R(2 - r)^4 / \{2r[4(1 +$$
$$+ \gamma - 2\gamma r) - (2 - r)^3]\} > 0$$
$$\varphi = \exp\left[2v_1 v_R \int\limits_0^\alpha n_s^2(z)\,(1 - n_s^2(z)\, v_R^2)^{-1/2}\, dz\right] > 0$$
$$\psi = \operatorname{Im} b_4(v_R, \infty) = \psi_1 / \psi_2 > 0,\ r = v_R^2 / v_s^2(0)$$
$$\psi_1 = 2\varepsilon_p\varepsilon_s(\xi + \delta_p^2 + \delta_s^2),\quad \varepsilon_l = (v_l^0 / v_l(\alpha))^2 < 1$$
$$\delta_l = m_l(\alpha, v_R) / M_l(\alpha, v_R),\quad l = p, s$$
$$\xi = (1 - \varepsilon_p)(1 - \varepsilon_s) / [M_p(\alpha, v_R) M_s(\alpha, v_R)] > 0$$
$$\psi_2 = (\xi + \varepsilon_p\varepsilon_s - \delta_p\delta_s)^2 + (\varepsilon_p\delta_s + \delta_p\varepsilon_s)^2$$

Итак, получен следующий результат: задача Рэлея для системы «слой на полупространстве» имеет решение вида (1.1), соответствующее фазовой скорости $\sigma_R(k, \alpha)$; вследствие того, что $\operatorname{Im}\sigma_R(k, \alpha) < 0$, волна Рэлея, бегущая вдоль поверхности $z = 0$, экспоненциально затухает с течением времени.

Следует отметить, что впервые затухающие волны Рэлея в полупространстве с монотонно убывающими скоростями $v_p(z)$, $v_s(z)$ были изучены В. Ю. Завадским [3]. Скалярная задача со скачком показателя преломления $n(z)$ (в том числе с комплексным $n(z)$) изучена в [4].

Поступила 9 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аленицын А. Г.* Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве волноводного типа. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
2. *Аленицын А. Г.* Волны Рэлея в неоднородном упругом полупространстве. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
3. *Завадский В. Ю.* Затухающие поверхностные волны. Акуст. ж., 1965, т. 11, вып. 2.
4. *Аленицын А. Г.* Затухание или усиление волн в ограниченном волноводе с комплексным показателем преломления. В сб.: Проблемы математической физики, вып. 6. Изд-во ЛГУ, 1972.