

## ПРИМЕНЕНИЕ ГИПОТЕЗ ПОДОБИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЫРОЖДЕНИИ ОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. И. Корнеев

(Москва)

Исследуется вопрос о возможности описания однородной, в частности изотропной, турбулентности с помощью только гипотез подобия спектральных, корреляционных или структурных функций.

Гипотезы подобия («самосохранения») корреляционных функций как в работе [1], так и во многих последующих работах, применялись в сочетании с другими предположениями. Л. И. Седов [2], приняв только эти гипотезы, проанализировал задачу о вырождении однородных и изотропных турбулентных движений вязкой несжимаемой жидкости и показал, что возможна альтернатива: либо энергия турбулентных пульсаций скорости убывает обратно пропорционально времени, линейный масштаб возрастает пропорционально квадратному корню из времени, а для нахождения безразмерных корреляционных функций нужны дополнительные гипотезы; либо без привлечения дополнительных гипотез можно найти (и было найдено Л. И. Седовым) полное решение задачи.

В данной работе показано, что это решение хорошо соответствует экспериментальным данным о вырождении турбулентных движений воздуха и воды за решеткой.

Получены также обобщения решения Л. И. Седова, во-первых, для однородной не-изотропной турбулентности с гипотезами о самосохранении спектральных тензоров и, во-вторых, для изотропной турбулентности с гипотезами о самосохранении структурных функций. В обоих случаях найдена альтернатива, аналогичная альтернативе Л. И. Седова.

1. Рассмотрим осредненное однородное турбулентное движение вязкой несжимаемой жидкости с постоянной плотностью в предположении, что пульсационное движение подчиняется системе уравнений Навье — Стокса. Основной объект исследования — двухточечный тензор корреляции скоростей

$$b_{i,j}(r_n, t) = \langle u_i(x_n, t) u_j(x_n + r_n, t) \rangle$$

Здесь  $u_i(x_n, t)$  — компоненты скорости в точке с декартовыми координатами  $x_n$ ;  $i, j, m, n$  — индексы, принимающие значения 1, 2, 3; угловые скобки означают операцию осреднения;  $\langle u_i(x_n, t) \rangle = 0$ .

Из системы уравнений Навье — Стокса можно вывести (см., например, [3]), следующее уравнение для тензора  $b_{i,j}$ :

$$(1.1) \quad \frac{\partial b_{i,j}}{\partial t} - 2\nu \frac{\partial^2 b_{i,j}}{\partial r_m \partial r_m} = S_{i,j}$$

В уравнение (1.1) входит тензор  $S_{i,j}(r_n, t)$ , который выражается через третьи моменты скоростей и моменты, содержащие давление.

Тензор  $b_{i,j}(r_n, t)$  должен удовлетворять еще следующей системе соотношений (см., например, [3]):

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial r_i} b_{i,j} = 0$$

$$b_{i,j}(r_n, t) = b_{j,i}(-r_n, t)$$

и очевидному неравенству

$$(1.3) \quad \left\langle \left| \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^l \alpha_p z_k u_k(x_n^{(p)}) \right|^2 \right\rangle = \sum_{k,j=1}^3 \sum_{p,s=1}^l \alpha_p \bar{\alpha}_s z_k \bar{z}_j b_{k,j}(r_n^{(p,s)}) \geq 0$$

$(p, s = 1, 2, \dots, l; \quad n, k = 1, 2, 3)$

В последнем неравенстве  $\alpha_p$  и  $z_k$  — произвольные комплексные числа; черта сверху означает операцию комплексного сопряжения;  $r_n^{(p,s)}$  — разности координат  $x_n^{(s)} - x_n^{(p)}$  произвольных  $l$  точек пространства;  $l$  — произвольное натуральное число.

Введем тензор трехмерного энергетического спектра и спектральный тензор, соответствующий тензору  $S_{k,j}(r_n, t)$  следующим соотношениями:

$$(1.4) \quad b_{k,j}(r_n, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} E_{k,j}(k_n, t) e^{i(k_m r_m)} dk_1 dk_2 dk_3$$

$$(1.5) \quad S_{k,j}(r_n, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} F_{k,j}(k_n, t) e^{i(k_m r_m)} dk_1 dk_2 dk_3$$

Из уравнения (1.1) тогда получим

$$(1.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} E_{i,j} + 2\nu k^2 E_{i,j} = F_{i,j} \quad (k^2 = k_m k_m)$$

а из системы соотношений (1.2), (1.3), получим

$$(1.7) \quad E_{i,j} k_i = 0$$

$$E_{i,j}(-k_n) = \overline{E_{i,j}(k_n)} = E_{j,i}(k_n)$$

и неравенство

$$(1.8) \quad E_{ij}(k_n, t) z_i \bar{z}_j \geq 0$$

справедливое при любых комплексных числах  $z_1, z_2, z_3$ .

Последнее неравенство следует из теоремы Бохнера [4] о представлении положительно определенной функции (которой в силу соотношений (1.2) и (1.3) является функция  $z_k \bar{z}_j b_{k,j}(r_n)$ ) в виде интеграла Фурье — Стильтьеса.

Из этой же теоремы следует, что тензор  $b_{i,j}(z_n, t)$  всегда можно представить в виде интеграла Фурье — Стильтьеса. Предположение, сделанное при введении спектра равенством (1.4), состоит в том, что этот интеграл Фурье — Стильтьеса может быть представлен в виде интеграла Фурье. Для введения тензора  $F_{i,j}(k_n, t)$  равенством (1.5), вывода уравнения (1.6) и системы соотношений (1.7) достаточно предположить абсолютную сходимость интегралов

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} E_{i,j} k_m dk_1 dk_2 dk_3, \quad \iiint_{-\infty}^{\infty} E_{i,j} k_m k_n dk_1 dk_2 dk_3,$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} E_{i,j} dk_1 dk_2 dk_3$$

Общий вид тензора  $E_{i,j}(k_n, t)$ , удовлетворяющего системе соотношений (1.7), (1.8) [5]

$$(1.9) \quad E_{i,j} = E_i \bar{E}_j + E' (\delta_{ij} - k_i k_j / k^2)$$

Здесь  $E'(k_n, t)$  — произвольная неотрицательная функция, а  $E_i(k_n, t)$  — произвольная векторная комплексная функция, удовлетворяющая уравнению  $E_j k_j = 0$ .

Итак, задача сводится к решению уравнения (1.6) для тензора  $E_{i,j}(k_n, t)$ , который можно задать в виде (1.9). В уравнение (1.6) входит тензор  $F_{i,j}(k_n, t)$ , стало быть, это уравнение незамкнуто. Для замыкания необходимы дополнительные гипотезы.

2. Предположим, что существуют такие функции  $l(t)$  и  $b(t)$  с размерностями длины и квадрата скорости и такие безразмерные тензоры  $\psi_{ij}$  и  $f_{ij}$ , зависящие от безразмерных аргументов  $\eta_n = k_n l$ , что при  $\eta' < k_n l < \eta''$  и  $t > t'$  выполнены следующие равенства:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} E_{i,j}(k_n, t) &= b l^3 \psi_{ij}(\eta_n) \\ F_{i,j}(k_n, t) &= b^{3/2} l^2 f_{ij}(\eta_n) \end{aligned}$$

Если гипотезы подобия спектральных тензоров (2.1) выполнены при всех  $k_n$  ( $\eta' = -\infty$ ,  $\eta'' = +\infty$ ), то аналогичные равенства справедливы и для корреляционных тензоров. Эти равенства в изотропном случае эквивалентны гипотезам Кармана — Хауарта о самосохранении корреляционных функций.

Подставляя выражения (2.1) в уравнение (1.6) и переходя от переменных  $k_n, t$  к переменным  $\eta_n, t$ , получим единственное дифференциальное уравнение, связывающее тензоры  $\psi_{ij}(\eta_n)$ ,  $f_{ij}(\eta_n)$  и функции  $b(t)$  и  $l(t)$

$$(2.2) \quad \left( 3\psi_{ij} + \eta_m \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \eta_m} \right) b l^2 \frac{dl}{dt} + \psi_{ij} l^3 \frac{db}{dt} + 2\nu b l \eta^2 \psi_{ij} = l^2 b^{3/2} f_{ij}$$

Перейдем к анализу этого уравнения.

Разделив уравнение (2.2) на  $l^2 b^{3/2}$  и продифференцируя по  $t$ , получим

$$(2.3) \quad \begin{aligned} &\left( 3\psi_{ij} + \eta_m \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \eta_m} \right) \frac{d}{dt} \left[ b^{-1/2} \frac{dl}{dt} \right] + \psi_{ij} \frac{d}{dt} \left[ l b^{-3/2} \frac{db}{dt} \right] + \\ &+ \eta^2 \psi_{ij} \frac{d}{dt} \left[ \frac{2\nu}{l \sqrt{b}} \right] = 0 \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\psi_{ij} \eta^2$  и  $\psi_{ij}$  — линейно независимые функции (индексы  $i$  и  $j$  фиксированны). Поэтому в связи с уравнением (2.3) надо рассмотреть два возможных случая:

1) Тензоры

$$(2.4) \quad \psi_{ij}, \eta_m \partial \psi_{ij} / \partial \eta_m, \eta^2 \psi_{ij}$$

допускают одно и только одно линейное соотношение с постоянными коэффициентами

$$(2.5) \quad a_1 \left( 3\psi_{ij} + \eta_m \frac{\partial \psi_{ij}}{\partial \eta_m} \right) - a_2 \psi_{ij} + a_3 \psi_{ij} \eta^2 = 0$$

причем  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$ .

2) Соотношение (2.5) между тензорами (2.4) может быть выполнено, только если  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ .

В этом случае из уравнения (2.3) вытекает

$$\frac{d}{dt} \left[ b^{-1/2} \frac{dl}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[ lb^{-3/2} \frac{db}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{2v}{l\sqrt{b}} \right] = 0$$

откуда найдем законы вырождения  $b(t)$  и  $l(t)$

$$(2.6) \quad l = c' (t + t_0)^{1/2}, \quad b = c'' (t + t_0)^{-1}$$

Для  $\psi_{ij}$  и  $f_{ij}$  имеем тогда из (2.2) одно уравнение с постоянными коэффициентами. Для нахождения этих тензоров необходимы дополнительные гипотезы.

Вернемся к случаю 1).

Перейдем от декартовых координат  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  к сферическим  $\eta, \theta, \varphi$

$$\eta_1 = \eta \cos \theta, \quad \eta_2 = \eta \sin \theta \cos \varphi, \quad \eta_3 = \eta \sin \theta \sin \varphi$$

Имеем тогда

$$\eta_m \frac{\partial}{\partial \eta_m} \psi_{ij}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_{ij}(\eta, \theta, \varphi)$$

Если  $a_3 = 0$ , то из (2.5) найдем

$$\psi_{ij} = c_{ij}(\theta, \varphi) \eta^{-3+a_2/a_1}$$

а из уравнения (2.3) при  $a_2 + 2a_1 \neq 0$  получим такие же законы вырождения  $b(t)$  и  $l(t)$  (2.6), как и в случае 2).

Далее будем предполагать, что  $a_3 \neq 0$ .

Положим  $a_3 = 2$ . Тогда из (2.5) и (2.3) имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{2v}{l\sqrt{b}} \right] = \frac{1}{a_1} \frac{d}{dt} \left[ b^{-1/2} \frac{dl}{dt} \right] = - \frac{1}{a_2} \frac{d}{dt} \left[ lb^{-3/2} \frac{db}{dt} \right]$$

откуда получим ( $p$  и  $q$  — постоянные интегрирования)

$$(2.7) \quad b^{-1/2} \frac{dl}{dt} = a_1 \frac{v}{l\sqrt{b}} + p, \quad lb^{-3/2} \frac{db}{dt} = -a_2 \frac{v}{l\sqrt{b}} + q$$

Подставляя (2.7) в (2.2) и используя (2.4), получим

$$(2.8) \quad f_{ij} = (3p + q) \psi_{ij} + p\eta \partial \psi_{ij} / \partial \eta$$

Исключая из системы уравнений (2.7) время и интегрируя полученное уравнение, найдем при  $a_2 \neq 2a_1, q \neq -2p, a_2 p + a_1 q \neq 0$

$$(2.9) \quad v l^{-1} b^{-1/2} = C l^{q/\gamma} b^{-p/\gamma} + \frac{2p + q}{a_2 - 2a_1}$$

$$\gamma = 2(p a_2 + q a_1) / (a_2 - 2a_1)$$

Здесь  $C$  — постоянная интегрирования.

Используя (2.9), можно в квадратурах проинтегрировать первое уравнение системы (2.7)

$$(2.10) \quad t + t^* \frac{2}{v(a_2 - 2a_1)} \int_{z_0}^z z^{-1+2\gamma/(2p+q)} \left[ C \frac{z}{v} + \frac{2p + q}{v(a_2 - 2a_1)} \right]^{-4p/(2p+q)} dz$$

$$(z = l^{q/\gamma} b^{-p/\gamma})$$

Формулы (2.9) и (2.10) дают решение для функций  $b(t)$  и  $l(t)$ .

Из (2.4) при  $a_3 = 2$  и (2.8) следует

$$(2.11) \quad \psi_{ij} = c_{ij}(\theta, \varphi) e^{-\eta^2/a_1 \eta^{-3+a_2/a_1}}$$

$$(2.12) \quad f_{ij} = \left( p \frac{a_2}{a_1} + q - \frac{2p}{a_1} \eta^2 \right) \psi_{ij}$$

Коэффициенты  $c_{ij}(\theta, \varphi) = c_{i,j}(\eta_n / \eta)$ , играющие роль начальных условий, должны удовлетворять системе алгебраических соотношений, аналогичных системе (1.7), (1.8) и вытекающих из этой системы. Используя общий вид спектрального тензора (1.9), разрешим систему соотношений для  $c_{ij}$

$$(2.13) \quad \psi_{ij}(\eta_n) = e^{-\eta^2/a_1 \eta^{-3+a_2/a_1}} \left[ \psi_i \bar{\psi}_j + \psi \left( \delta_{ij} - \frac{\eta_i \eta_j}{\eta^2} \right) \right]$$

Здесь  $\psi(\eta_n / \eta)$  — произвольная неотрицательная функция, а  $\psi_i(\eta_n / \eta)$  — произвольная векторная комплексная функция, удовлетворяющая уравнению  $\psi_j \eta_j = 0$ .

Аргументы  $\eta_1 / \eta$ ,  $\eta_2 / \eta$ ,  $\eta_3 / \eta$  этих функций связаны соотношением  $(\eta_m / \eta) (\eta_m / \eta) = 1$ .

Переформулируем выводы, беря за основу законы вырождения  $b(t)$  и  $l(t)$ . Итак, если при вырождении однородных турбулентных движений вязкой несжимаемой жидкости выполнены гипотезы (2.1) о самосохранении спектральных тензоров, то либо для  $b$  и  $l$  выполнены законы (2.6) и тогда для определения безразмерных спектральных тензоров  $\psi_{ij}$ ,  $f_{ij}$  нужны дополнительные гипотезы; либо, если законы (2.6) не выполнены, то  $b(t)$  и  $l(t)$  определяются формулами (2.9), (2.10), а спектральные тензоры  $\psi_{ij}$  и  $f_{ij}$  — формулами (2.13), (2.12).

Если гипотезы (2.1) при достаточно большом  $t$  выполнены во всем пространстве  $k_n$ , то можно перейти от спектральных тензоров к корреляционным. Из уравнения (2.8) можно вывести

$$lb^{-1/2} S_{ij} = -pr_n \frac{\partial}{\partial r_n} b_{i,j} + qb_{i,j}$$

Отсюда с учетом равенства  $S_{j,j}(0, t) = 0$  (см. [3]) следует, что  $q = 0$ .

Система (2.7) с  $q = 0$  совпадает с системой уравнений для  $b(t)$  и  $l(t)$ , полученной для изотропной турбулентности и решенной [2].

Как показал Л. И. Седов, в этом случае  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$  и можно принять  $a_1 = 0.5$ . Следуя Л. И. Седову, введем обозначение  $a_2 = 10\alpha$ . Решение системы (2.7) при  $\alpha \neq 0.1$  можно записать в виде

$$(2.14) \quad l = \nu b^{-1/2} \left( \frac{2p}{10\alpha - 1} + Cb^{m'} \right)^{-1}$$

$$t + t^* = \frac{\nu}{10\alpha} \int_b^{b_0} b^{-2} \left( \frac{2p}{10\alpha - 1} + Cb^{m'} \right)^{-2} db$$

$$m' = (1 - 10\alpha) / 20\alpha.$$

3. Допустим теперь, что турбулентность изотропна. В этом случае компоненты тензора  $b_{i,j}(r_n, t)$  можно выразить [1] через одну скалярную

функцию  $b_d^d(r, t)$  тензора  $\langle u_i(x_n, t) u_j(x_n, t) u_k(x_n + r_n, t) \rangle$  через одну скалярную функцию  $b_d^{nn}(r, t)$ , а компоненты тензора  $\langle P(x_n, t) u_i(x_n + r_n, t) \rangle$  равны нулю. Здесь  $r = \sqrt{r_j r_j}$ .

Функции  $b_d^d(r, t)$  и  $b_d^{nn}(r, t)$  связаны единственным уравнением (Кармана — Хауарта), соответствующим тензорному уравнению (1.1)

$$(3.1) \quad \nu \left( \frac{\partial^2 b_d^d}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial b_d^d}{\partial r} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial b_d^d}{\partial t} = \frac{\partial b_d^{nn}}{\partial t} + \frac{4}{r} b_d^{nn}$$

Примем, что при вырождении турбулентности наблюдается самосохранение структурных функций, т. е. существуют такие функции  $l$  и  $b$ , зависящие от времени  $t$  и имеющие размерности длины и квадрата скорости, и безразмерные функции  $\beta_2$  и  $\beta_3$ , зависящие от безразмерного аргумента  $r/l$ , что при  $r/l < \chi'$  выполнены соотношения

$$(3.2) \quad b_d^d(r, t) = b_1(t) - b(t) \beta_2(r/l)$$

$$b_d^{nn}(r, t) = b^{3/2}(t) \beta_3(r/l)$$

Функция  $b_1(t)$  определена равенством  $b_1(t) = b_d^d(0, t)$ . В частном случае при  $b(t)/b_1(t) = \text{const}$  гипотезы (3.2) переходят в гипотезы самосохранения корреляционных функций.

Гипотезы (3.2) впервые рассмотрены Лином [6], но им не были найдены все возможные решения.

Подставим выражения (3.2) в уравнение (3.1). Переходя от переменных  $r, t$  к переменным  $\chi = r/l, t$ , получим

$$(3.3) \quad \frac{db_1}{dt} + \left[ -\frac{db}{dt} \right] \beta_2 + \frac{2\nu b}{l^2} \left( \beta_2'' + \frac{4}{\chi} \beta_2' \right) + \frac{b}{l} \frac{dl}{dt} \chi \beta_2' = \\ = -\frac{2b^{3/2}}{l} \left( \beta_3' + \frac{4}{\chi} \beta_3 \right)$$

Разделим все члены уравнения (3.3) на  $l^{-1} b^{3/2}$  и продифференцируем по времени  $t$ . Получим уравнение, которое можно рассматривать как равенство нулю скалярного произведения четырехмерных векторов

$$(3.4) \quad (\omega_1(t) \cdot \omega_2(\chi)) = 0 \\ \omega_1(t) = \left\{ \left[ l b^{-3/2} \frac{db_1}{dt} \right]_t, \left[ -l b^{-3/2} \frac{db}{dt} \right]_t, \left[ \frac{2\nu}{l \sqrt{b}} \right]_t, \left[ b^{-1/2} \frac{dl}{dt} \right]_t \right\} \\ \omega_2(\chi) = \{ 1, \beta_2, \beta_2'' + 4\beta_2' / \chi, \chi \beta_2' \}$$

Очевидно, что эти векторы, изменяясь при изменении своих аргументов, должны оставаться в фиксированных ортогональных плоскостях (подпространствах) четырехмерного пространства.

При этом возможны следующие случаи.

1)  $\omega_2(\chi)$  — произвольный вектор. Тогда  $\omega_1(t) = 0$ , откуда имеем

$$(3.5) \quad b^{-1/2} \frac{dl}{dt} = c_1, \quad \frac{2\nu}{l \sqrt{b}} = c_2, \quad l b^{-3/2} \frac{db}{dt} = -c_3, \quad l b^{-3/2} \frac{db_1}{dt} = -c_4$$

Интегрируя эту систему уравнений, получим

$$(3.6) \quad l^2 = 4\nu \frac{c_1}{c_2} (t + t_0), \quad b = \frac{\nu}{c_1 c_2} (t + t_0)^{-1}, \quad b_1 = \frac{c_4}{c_3} b + b_1^*$$

Из уравнения (3.3) с учетом соотношений (3.5) получим одно уравнение с постоянными коэффициентами для функций  $\beta_2(\chi)$ ,  $\beta_3(\chi)$ . Для нахождения этих функций нужны дополнительные предположения.

Именно этот случай был рассмотрен Лием. Заметим, что  $b_1 \rightarrow b_1^*$  при  $t \rightarrow \infty$ . Значит, если  $b_1^* \neq 0$ , законы вырождения турбулентности (3.6) не могут выполняться при больших значениях  $t$ , а если  $b_1^* = 0$ , то  $b(t) / b_1(t) = \text{const}$ , и, значит, гипотезы (3.2) переходят в гипотезы Кармана — Хауарта о самосохранении корреляционных функций.

2)  $\omega_2(\chi)$  — вектор, принадлежащий произвольной фиксированной трехмерной плоскости. Тогда  $\omega_1(t)$  принадлежит одномерной прямой, перпендикулярной этой плоскости. Это значит

$$(3.7) \quad -a_3 + a_2\beta_2 + a_1\chi\beta_2' + a_0(\beta_2'' + 4\beta_2'/\chi) = 0$$

и все функции от времени в уравнении (3.4) пропорциональны

$$(3.8) \quad -\frac{1}{a_3} \left[ lb^{-3/2} \frac{db_1}{dt} \right]' = -\frac{1}{a_2} \left[ lb^{-3/2} \frac{db}{dt} \right]' = \frac{1}{a_1} \left[ b^{-1/2} \frac{dl}{dt} \right]' = \frac{1}{a_0} \left[ \frac{2\nu}{l\sqrt{b}} \right]'$$

Можно показать, что  $a_0 \neq 0$ .

Действительно, допустим, что  $a_0 = 0$ . Так как

$$\beta_2(\chi)|_{\chi=0} = \chi\beta_2'(\chi)|_{\chi=0} = 0$$

из (3.7) следует, что  $a_3 = 0$ . Сравнивая (3.4) и (3.8), получим

$$\left[ lb^{-3/2} \frac{db_1}{dt} \right]' = \left[ \frac{2\nu}{l\sqrt{b}} \right]' = 0$$

и следовательно

$$-lb^{-3/2} \frac{db}{dt} = 2b^{-1/2} \frac{dl}{dt}$$

Тогда из (3.4) получим  $2\beta_2 + \chi\beta_2' = 0$ , стало быть,  $\beta_2 \sim \chi^{-2}$ . Но это решение не удовлетворяет условию  $\beta_2(\chi)|_{\chi=0} = 0$ . Следовательно,  $a_0 \neq 0$ .

Положим  $a_0 = 2$ . Тогда из (3.8) следует

$$(3.9) \quad b^{-1/2} \frac{dl}{dt} = a_1 \frac{\nu}{l\sqrt{b}} + p, \quad lb^{-3/2} \frac{db}{dt} = -a_2 \frac{\nu}{l\sqrt{b}} + q$$

$$lb^{-3/2} \frac{db_1}{dt} = -a_3 \frac{\nu}{l\sqrt{b}} + s$$

Подставляя в уравнение (3.3) равенства (3.9) и учитывая (3.7), получим

$$(3.10) \quad \beta_3' + \frac{4}{\chi} \beta_3 + \frac{s}{2} - \frac{q}{2} \beta_2 + \frac{p}{2} \chi\beta_2' = 0$$

Так как  $\beta_3 \sim \chi^3$  при малых  $\chi$  (см. [2]), из уравнения (3.10) следует, что  $s = 0$ .

Итак, во втором случае уравнения (3.7), (3.10) для функций  $\beta_2(\chi)$  и  $\beta_3(\chi)$  и система уравнений (3.9) для  $b_1(t)$ ,  $b(t)$ ,  $l(t)$  с коэффициентами  $a_0 = 2$ ,  $s = 0$  полностью определяют законы вырождения турбулентности.

3) Векторы  $\omega_1(t)$  и  $\omega_2(\chi)$  принадлежат двум фиксированным взаимно перпендикулярным двумерным плоскостям. Это значит, что функция  $\beta_2(\chi)$  должна удовлетворять двум линейно независимым уравнениям вида (3.7). Можно показать, что решение этих уравнений не имеет физического смысла.

Тем более невозможны случаи, когда вектор  $\omega_2(\chi)$  принадлежит фиксированной прямой или тождественно равен нулю.

Вернемся ко второму случаю.

Уравнение (3.7) для функции  $a_3/a_2 - \beta_2(\chi)$  принимает такой же вид, как и уравнение для корреляционной функции  $f(\chi)$ , найденное [2].

При  $a_1 \neq 0$  единственное решение этого уравнения, принимающее при  $\chi = 0$  значение  $a_3/a_2$  есть вырожденная гипергеометрическая функция [7]; стало быть

$$(3.11) \quad \beta_2 = \frac{a_3}{a_2} \left\{ 1 - {}_1F_1 \left[ \frac{a_2}{2a_1}; \frac{5}{2}; -\frac{a_1\chi^2}{4} \right] \right\}$$

Легко вывести (см., например, [3]), что

$$(-1)^{n+1} \frac{\partial^{2n}}{\partial r^{2n}} \beta_n(r, t) |_{r=0} = \frac{1}{b_1} \left\langle \left( \frac{\partial^n u_1}{\partial x_1^n} \right)^2 \right\rangle > 0$$

Отсюда и из разложения в соотношении (3.11)  ${}_1F_1$  в ряд Тейлора [7] следует  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0$ ,  $a_3 > 0$ .

Подберем масштабы для  $b(t)$  и  $l(t)$  так, чтобы было  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = a_3$ . Введем обозначение  $a_2 = 10\alpha$ .

Интегрируя уравнение (3.10), получим

$$(3.12) \quad \beta_3 = \frac{q}{10} \chi \beta_2 - \frac{5p+q}{10} \chi^{-4} \int_0^\chi \beta_2' \chi^5 d\chi$$

Решение системы уравнений (3.9) для  $b_1(t)$  и функций  $z(t)$  и  $u(t)$ , связанных с  $b(t)$  и  $l(t)$  соотношениями

$$(3.13) \quad u = l^{-1} b^{-1/2}, \quad z = l^{q/\gamma} b^{-p/\gamma}$$

при  $\alpha \neq 0.1$ ,  $q \neq -2p$ ,  $q \neq -20\alpha p$  имеет вид (с учетом того, что  $a_1 = 0.5$ ,  $a_2 = a_3 = 10\alpha$ ,  $s = 0$ )

$$(3.14) \quad u = C \frac{z}{v} + \frac{2p+q}{v(10\alpha-1)}$$

$$t + t^* = \frac{2}{v(10\alpha-1)} \int z^{-1+\gamma'} u^{-4p/(2p+q)} dz$$

$$b_1 + b_1^* = \frac{20\alpha}{1-10\alpha} \int z^{-1-\gamma'} u^{-2q/(2p+q)} dz$$

$$\gamma = \frac{20\alpha p + q}{10\alpha - 1}, \quad \gamma' = \frac{2\gamma}{2p + q}$$

Это решение имеет смысл не при любых значениях параметров  $\alpha$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $C$ . Во-первых, так как  $u$  и  $z$  положительны,  $C$  и  $(2p+q)/(10\alpha-1)$  не могут быть отрицательны одновременно. Во-вторых, при некоторых значениях параметров решения определены только для ограниченных значений времени  $t + t^* < 0$ .

Асимптотические законы вырождения  $b$ ,  $b_1$ ,  $l$  при  $t \rightarrow \infty$  для всех остальных случаев таковы:

1) если  $C > 0$  и  $\alpha > 0.1$ , то

$$l \sim t^{1/2}, \quad b \sim b_1 + b_1^* \sim t^{-10\alpha}$$

2) если  $p > |q/2|$  и  $C(10\alpha - 1) < 0$ , то

$$l \sim t^{2p/(2p-q)}, \quad b \sim t^{2q/(2p-q)}, \quad b_1 + b_1^* \sim t^{-1}$$

3) если  $q < -20\alpha p$ ,  $q < -2p$  и  $\alpha < 0.1$ , то

$$l \sim t^{1/2}, \quad b \sim b_1 + b_1^* \sim t^{-1}$$

Переформулируем выводы, беря за основу законы вырождения  $b(t)$ ,  $b_1(t)$ ,  $l(t)$ : если при вырождении однородных и изотропных турбулентных движений вязкой несжимаемой жидкости выполнены гипотезы (3.2) о самосохранении] при  $r/l < \chi'$  структурных функций  $\beta_2$  и  $\beta_3$ , то либо  $b$ ,  $b_1$ ,  $l$  изменяются согласно формулам (3.6), функции  $\beta_2(\chi)$  и  $\beta_3(\chi)$  связаны одним уравнением, и для их нахождения нужны дополнительные гипотезы; либо законы вырождения  $b(t)$ ,  $b_1(t)$ ,  $l(t)$  определяются системой соотношений (3.13), (3.14), а вид структурных функций  $\beta_2(\chi)$  и  $\beta_3(\chi)$  — равенствами (3.11), (3.12).

4. Гипотезы (3.2) в предположении, что  $b(t) = b_1(t)$  переходят в гипотезы [1] о самосохранении корреляционных функций  $f$  и  $h$ , т. е. о том, что существует такая функция  $l(t)$ , что

$$(4.1) \quad \begin{aligned} f(r, t) &= f(\chi), \quad h(r, t) = h(\chi) \\ (\chi &= r/l, \quad b(t) = b_d^d(0, t)) \\ (b_d^d(r, t) &= bf(r, t), \quad b_d^{nn}(r, t) = b^{3/2}h(r, t)) \end{aligned}$$

Л. И. Седов [2], приняв эти гипотезы, проанализировал и полностью решил задачу о вырождении изотропной турбулентности.

Результаты, полученные в п. 3, в предположении, что  $b(t) = b_1(t)$  стало быть, в первом случае  $c_1 = c_3 = c_4, b_1^* = 0$ , а во втором  $-a_2 = a_3, q = s = 0, b_1^* = 0$ , как и результаты, полученные в п. 2, в предположении, что турбулентность изотропна, и гипотезы (2.1) выполнены во всем пространстве  $k_n$  (стало быть, во втором случае  $q = 0$  и в формуле (2.13)  $\psi_i = 0, \psi = \text{const}$ ) переходят в результаты исследования Л. И. Седова.

Сформулируем эти результаты, беря за основу законы изменения  $b(t)$  (и  $l(t)$ ): если при вырождении однородных и изотропных турбулентных движений вязкой несжимаемой жидкости выполнены гипотезы (4.1) о самосохранении корреляционных функций  $f$  и  $h$ , то либо (случай 1)  $b(t)$  и  $l(t)$  изменяются согласно формулам

$$(4.2) \quad l^2 = 4\nu \frac{c_1}{c_2} (t + t_0), \quad b = \frac{\nu}{c_1 c_2} (t + t_0)^{-1}$$

а функции  $f(\chi)$  и  $h(\chi)$  связаны одним уравнением и для их нахождения нужны дополнительные гипотезы; либо (случай 2) решение для  $f(\chi)$  и  $h(\chi)$  дается формулами

$$(4.3) \quad f = {}_1F_1 \left[ 10\alpha; \frac{5}{2}; -\frac{\chi^2}{8} \right] \quad (\alpha > 0)$$

$$(4.4) \quad h = \frac{p}{2} \chi^{-4} \int_0^\chi \chi^5 f'(\chi) d\chi = \frac{2\alpha p \chi}{4\alpha - 1} \left\{ f - {}_1F_1 \left[ 10\alpha + 1; \frac{7}{2}; -\frac{\chi^2}{8} \right] \right\}$$

а решение для  $b(t)$  и  $l(t)$  — системой соотношений (2.14).

Используя предположение, что  $b \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и вводя вместо масштаба  $l(t)$  тейлоровский микромасштаб  $\lambda(t)$

$$(4.5) \quad \lambda^{-2} = - \frac{\partial^2 f(r, t)}{\partial r^2} \Big|_{r=0}, \quad \lambda = l \sqrt{\alpha}, \quad \frac{r}{\lambda} = \frac{\chi}{\sqrt{\alpha}}$$

это решение можно записать в следующем безразмерном виде:

первое семейство  $\alpha = \alpha_+$ ,  $0 < w < \infty$

при  $p(10\alpha - 1) > 0$ ,  $C > 0$

$$(4.6) \quad \frac{\lambda^*}{\lambda} = \frac{2 \sqrt{\alpha w}}{|10\alpha - 1|} (1 + w^{m'})$$

$$\frac{v(t + t^*)}{\lambda^{*2}} = \frac{(10\alpha - 1)^2}{40\alpha} \int_w^\infty w^{-2} (1 + w^{m'})^{-2} dw$$

второе семейство  $\alpha = \alpha_-$ ,  $0 < w < 1$

при  $C(10\alpha - 1) > 0$ ,  $p < 0$

$$(4.7) \quad \frac{\lambda^*}{\lambda} = \frac{2 \sqrt{\alpha w}}{1 - 10\alpha} (1 - w^{m'})$$

$$\frac{v(t + t^*)}{\lambda^{*2}} = \frac{(10\alpha - 1)^2}{40\alpha} \int_w^{w_0} w^{-2} (1 - w^{m'})^{-2} dw$$

при  $\alpha = 0.1$ ,  $p < 0$

$$(4.8) \quad \frac{\lambda^*}{\lambda} = - \sqrt{\frac{w}{10}} \ln w$$

$$\frac{v(t + t^*)}{\lambda^{*2}} = \int_w^{w_0} w^{-2} \ln^{-2} w dw$$

В формулах (4.6), (4.7), (4.8) приняты обозначения

$$(4.9) \quad w = \frac{b}{b^*}, \quad \lambda^* = v \sqrt{\frac{p^2}{b^*}}, \quad m' = \frac{1 - 10\alpha}{20\alpha}$$

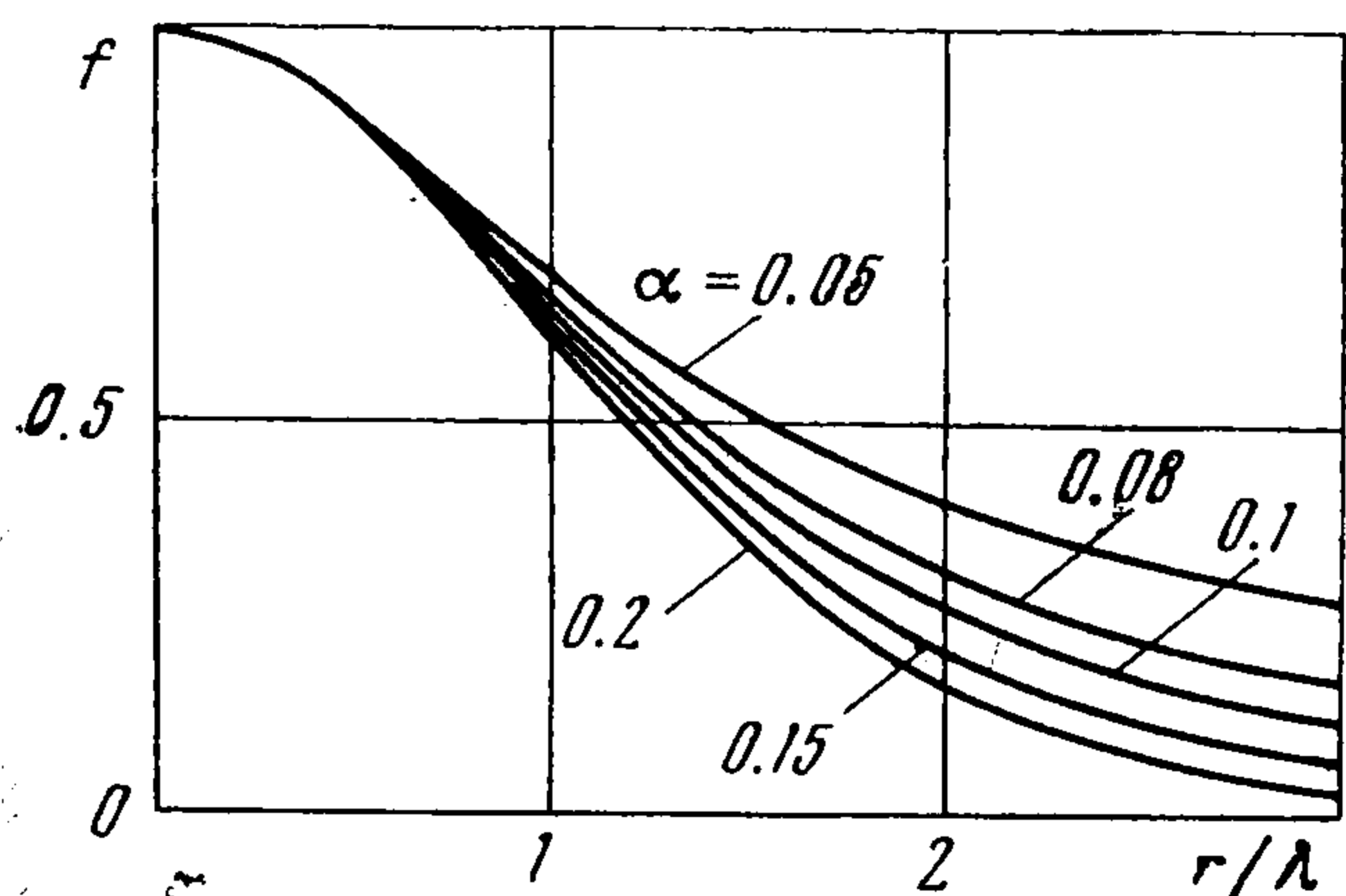
где  $t^*$  и  $b^*$  — постоянные интегрирования, имеющие размерности времени и квадрата скорости соответственно. В интегралах (4.7) и (4.8) верхние пределы интегрирования  $w_0$  выбраны для определенности так, чтобы при  $v(t + t^*) / \lambda^{*2} = 1$  было  $d\lambda / dw = d\lambda / dt = 0$ . Для удобства обозначений принято  $\alpha = \alpha_+$  для первого семейства и  $\alpha = \alpha_-$  для второго семейства.

Решение второго случая — полное решение задачи о вырождении изотропной турбулентности, найденное Л. И. Седовым с помощью только гипотез о самосохранении корреляционных функций, будем называть решением Л. И. Седова.

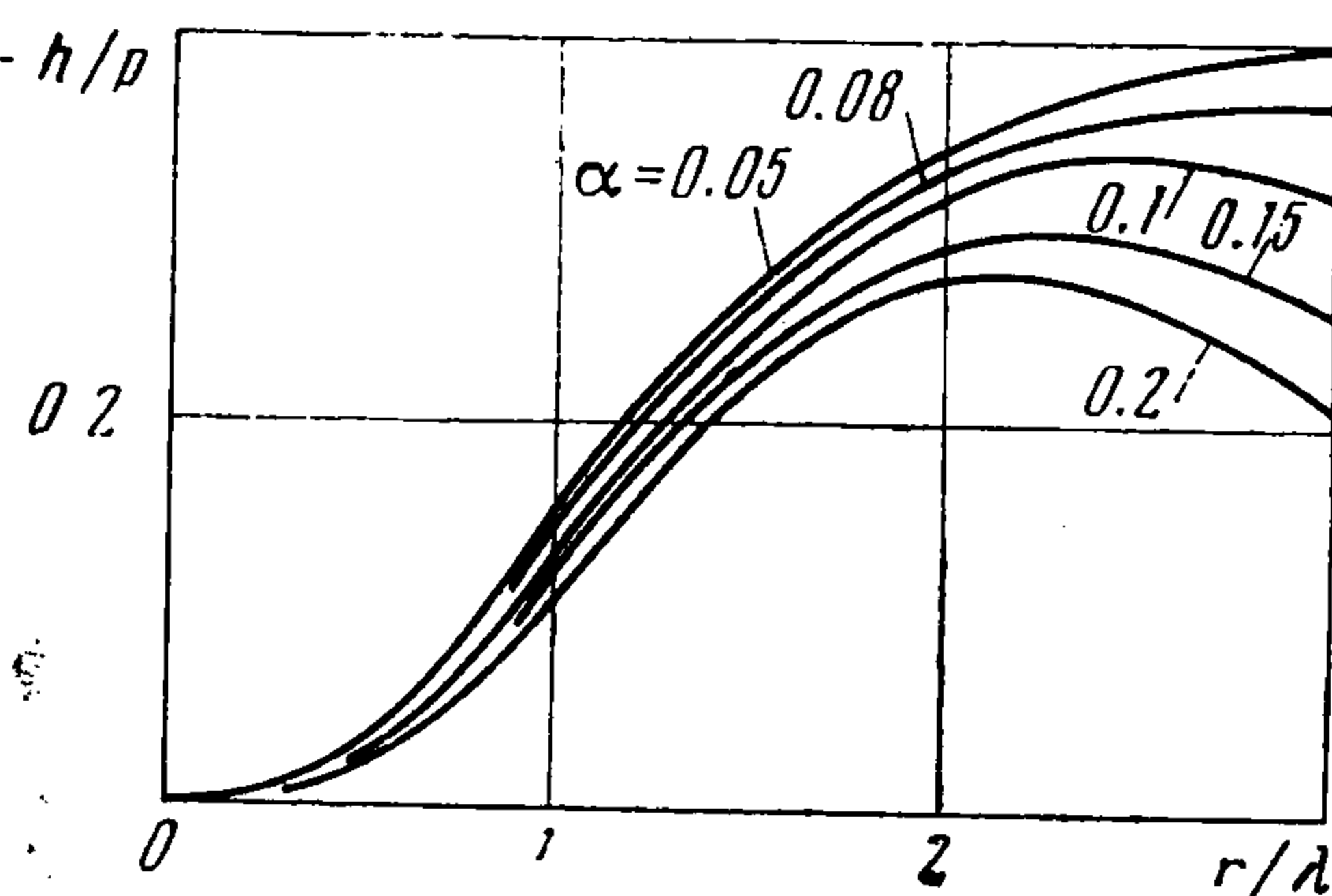
В это решение входят четыре независимых параметра  $\alpha$ ,  $p$ ,  $C$ ,  $t^*$  (в соотношениях (4.3), (4.4), (2.14)), или  $\alpha$  ( $\alpha_+$  или  $\alpha_-$ )  $b^*$ ,  $\lambda^*$ ,  $t^*$  (в соотношениях (4.3) — (4.9)), но поскольку семейства функций

$$f\left(\frac{r}{\lambda}\right), \quad \frac{h}{p} \left(\frac{r}{\lambda}\right), \quad \frac{b}{b^*} \left[\frac{v(t + t^*)}{\lambda^{*2}}\right], \quad \frac{\lambda}{\lambda^*} \left[\frac{v(t + t^*)}{\lambda^{*2}}\right]$$

определяющих решение Л. И. Седова, зависят от одного параметра  $\alpha$  ( $\alpha_+$  или  $\alpha_-$ ), то  $\alpha$  является единственным существенным параметром.



Фиг. 1



Фиг. 2

Графики функций этих семейств при  $0.05 \leq \alpha \leq 0.2$  представлены на фиг. 1—4. Пунктирные прямые на фиг. 3 и 4 соответствуют асимптотическим степенным законам при  $t \rightarrow \infty$

$$\alpha > 0.1, \quad \lg \frac{b}{b^*} = 10\alpha \lg \frac{(10\alpha - 1)^2}{4} - 10\alpha \lg \frac{v(t + t^*)}{\lambda^{*2}}$$

$$\lg \frac{\lambda}{\lambda^*} = \frac{1}{2} \lg \frac{v(t + t^*)}{\alpha \lambda^{*2}}$$

$$\alpha < 0.1, \quad \lg \frac{b}{b^*} = \lg \frac{(10\alpha - 1)^2}{40\alpha} - \lg \frac{v(t + t^*)}{\lambda^{*2}}$$

$$\lg \frac{\lambda}{\lambda^*} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lg \frac{v(t + t^*)}{\lambda^{*2}}$$

Значения функций  $f(r/\lambda)$  и  $h(r/\lambda)$ , соответствующие выражениям (4.3) — (4.5) были рассчитаны на ЭВМ по рекуррентным формулам и табличным значениям  ${}_1F_1[a; 0.5; x]$  [7] при  $\alpha = 0.05, 0.06, \dots, 0.25$ .

По формулам (4.5) — (4.9) были рассчитаны семейства

$$\frac{b}{b^*} \left[ \frac{v(t + t^*)}{\lambda^{*2}} \right], \quad \frac{\lambda}{\lambda^*} \left[ \frac{v(t + t^*)}{\lambda^{*2}} \right]$$

Интеграл (4.8) сводится к интегральному логарифму, а интегралы (4.6) и (4.7) при рациональных  $\alpha$  выражаются через элементарные функции.

Для сравнения с экспериментом может понадобиться также корреляционная функция  $g(r, t)$  и одномерный спектр  $E_1(k_1, t)$ , определенные следующими равенствами:

$$g = f + \frac{r}{2} \frac{\partial f}{\partial r}$$

$$b_d^d(r, t) = \int_0^\infty E_1(k_1, t) \cos k_1 r dk_1$$

Из определения  $g$  и  $E_1$  вытекает, что самосохранение  $f(r, t) = f(\chi)$  эквивалентно самосохранению  $g(r, t) = g(\chi)$  или  $E_1(k_1, t) / bl = \varphi(k_1 l)$ .

Относительно изменения выводов при изменении гипотез (4.1) о самосохранении корреляционных функций  $f$  и  $h$  сделаем следующие замечания.

1°. Если гипотезы (4.1) выполнены при  $0 < r/l < \chi'$  ( $\chi'$  — любое положительное число), то результат Л. И. Седова остается без изменения.

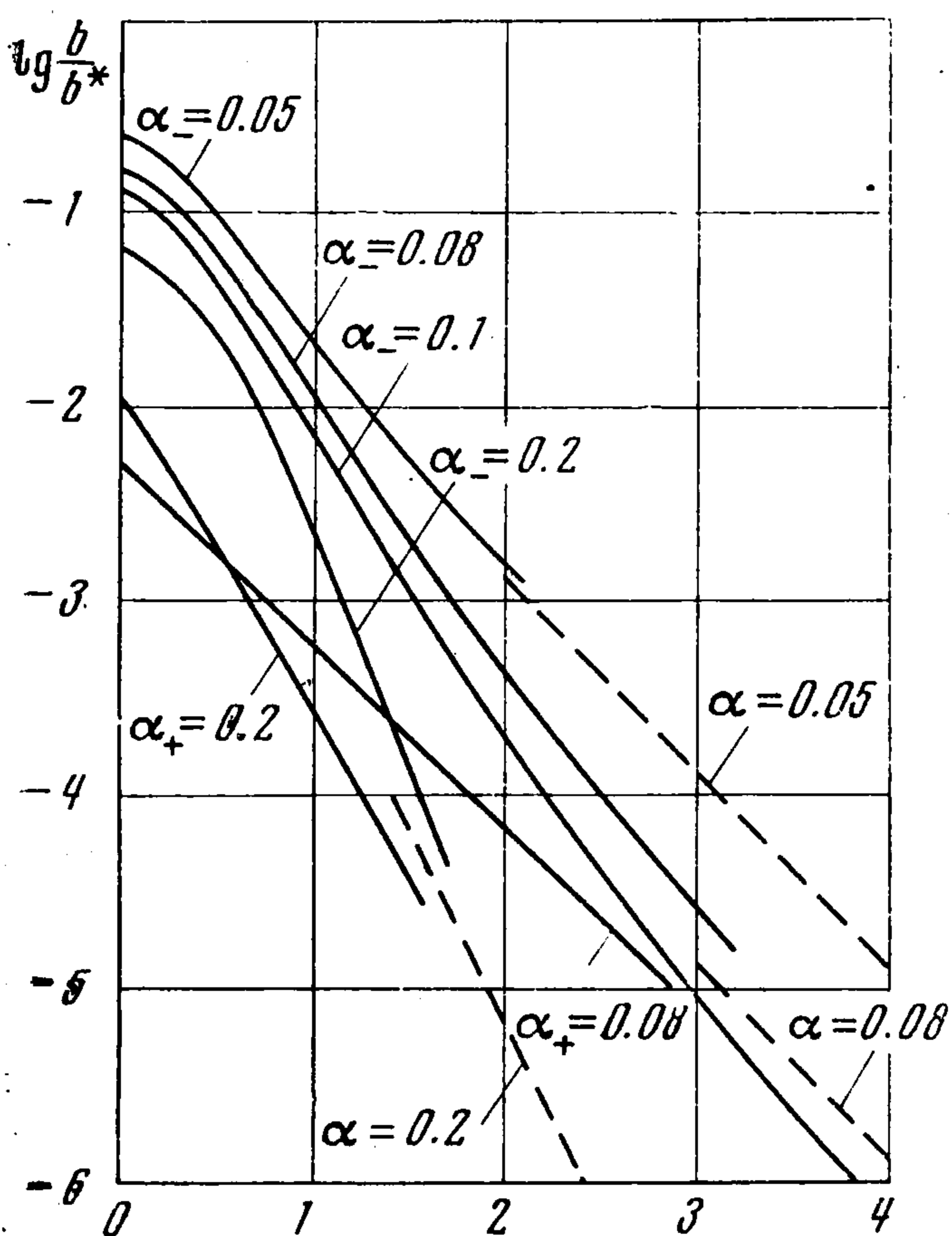
2°. Если гипотезы (4.1) выполнены при  $\chi' < r/l < \chi''$  ( $\chi' < \chi''$  — любые положительные числа), то во втором случае изменение сведется к увеличению произвола при интегрировании полученной Л. И. Седовым [2] системы уравнений для функций  $f(\chi)$ ,  $h(\chi)$ ,  $b(t)$ ,  $l(t)$ .

3°. Если вместо гипотез (4.1) выполнены более слабые гипотезы о постоянстве во времени величин

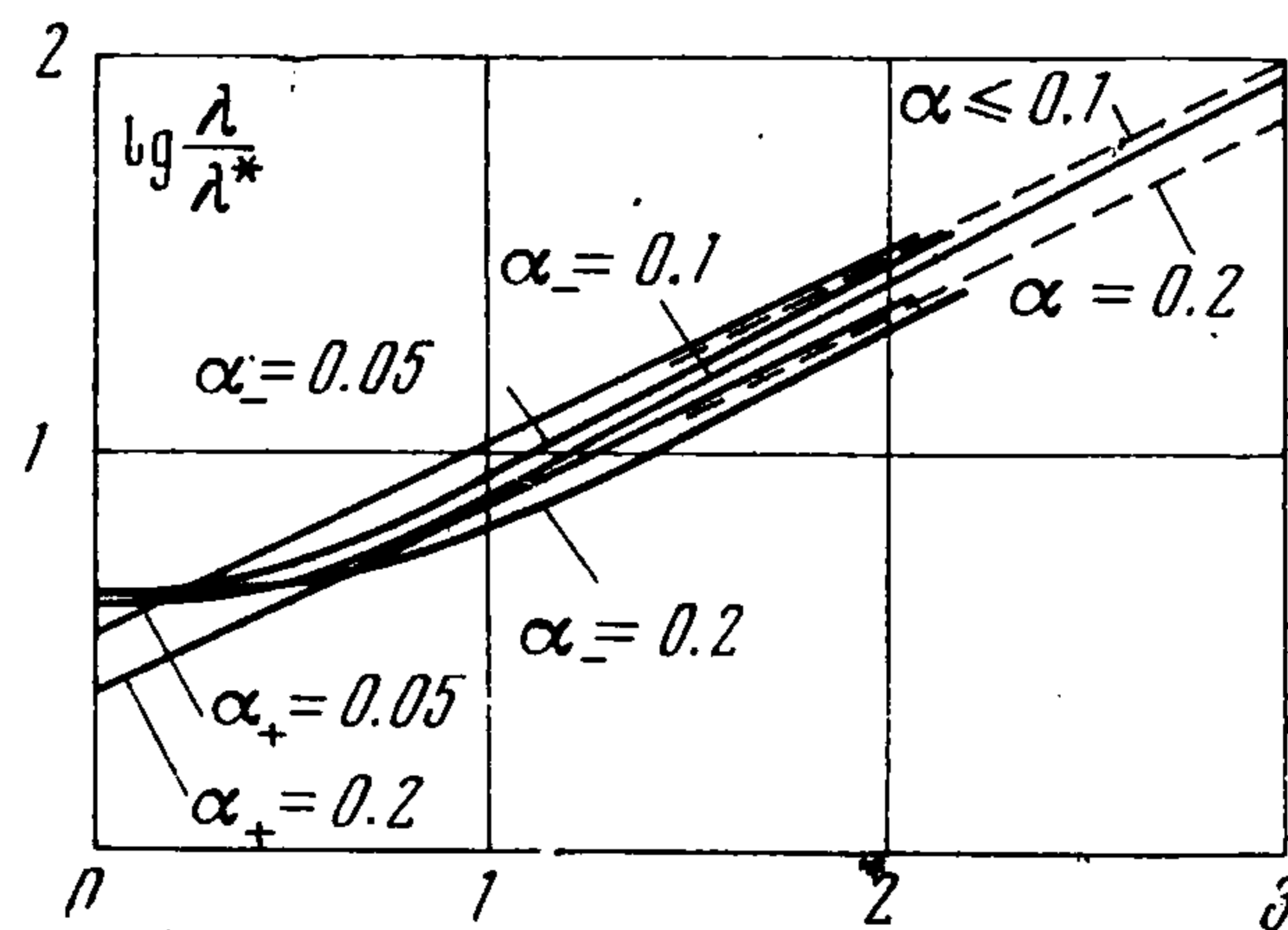
$$\lambda^4(t) \frac{\partial^4 f(r, t)}{\partial r^4} \Big|_{r=0}, \quad \lambda^3(t) \frac{\partial^3 h(r, t)}{\partial r^3} \Big|_{r=0}$$

то  $b$  и  $\lambda = l\sqrt{\alpha}$  изменяются во времени согласно системе уравнений (2.7),

решения которой даются выражениями (4.6) — (4.8), если в системе соотношений (2.14) постоянная интегрирования  $C \neq 0$ , или, если  $C = 0$ , — выражениями (4.2). Это значит, что выводы Л. И. Седова относительно законов вырождения энергии и линейного масштаба турбулентности сохраняются.



Фиг. 3



Фиг. 4

Ниже произведено согласование опытных данных с решением Л. И. Седова. Хотя решения п. 2 и п. 3 сравниваться с опытом не будут, в связи с недостаточной для такого сравнения полнотой опытных данных, ясно, что использование этих более общих решений может только улучшить согласование опыта и теории.

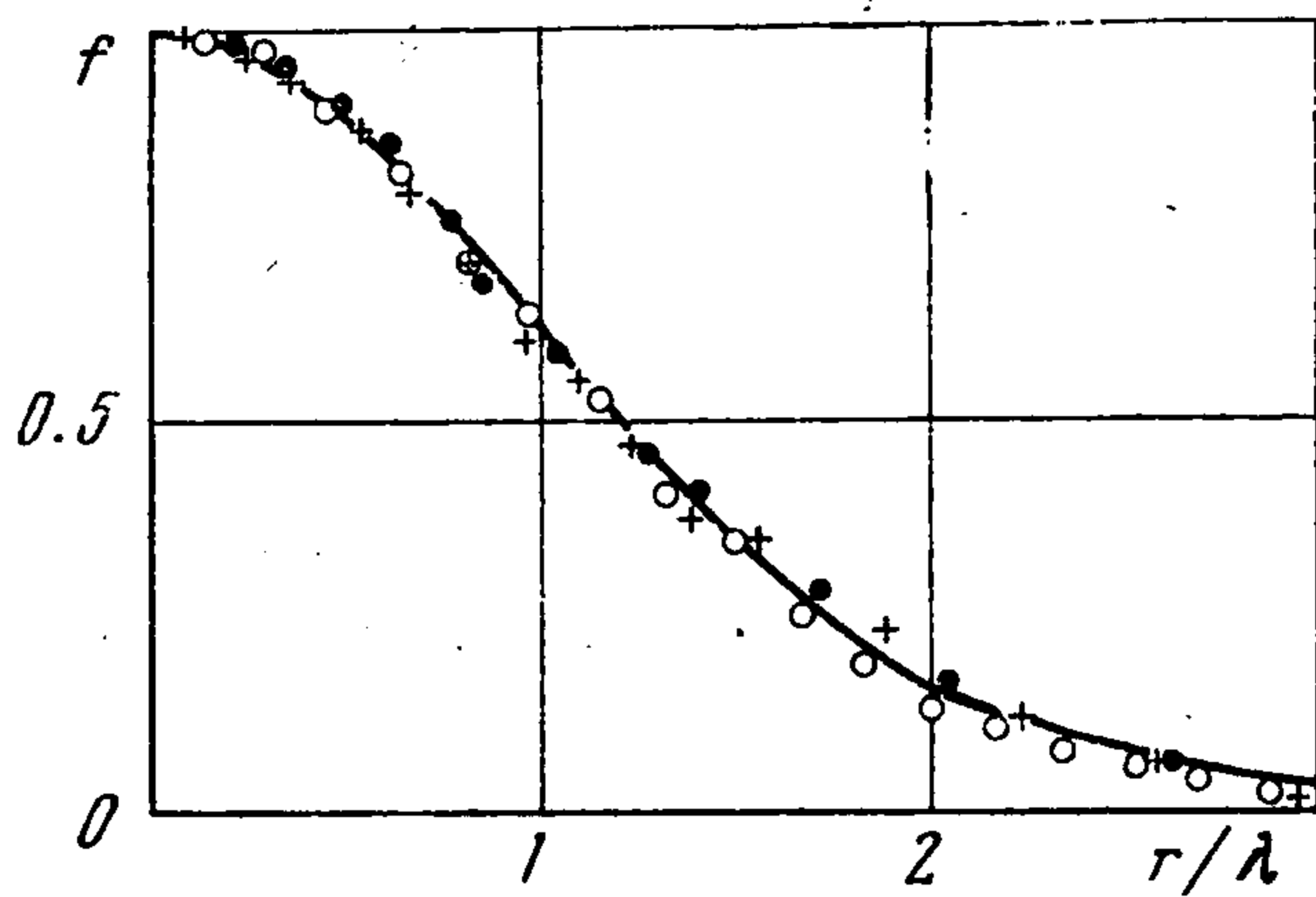
Важно иметь в виду, что законы вырождения  $b(t)$  и  $l(t)$  для однородной турбулентности, когда гипотезы самосохранения спектральных тензоров (2.1) выполнены во всем пространстве (или, как можно показать, когда соответствующие им гипотезы самосохранения корреляционных тензоров  $b_{i,j}$  и  $S_{i,j}$  выполнены хотя бы в некоторой окрестности точки  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ ), совпадают с законами вырождения  $b(t)$  и  $l(t)$  решения Л. И. Седова.

5. Большинство экспериментальных данных по однородной и изотропной турбулентности, в частности все цитируемые ниже, кроме [8, 9], относятся к турбулентным движениям воздуха, пропускаемого с постоян-

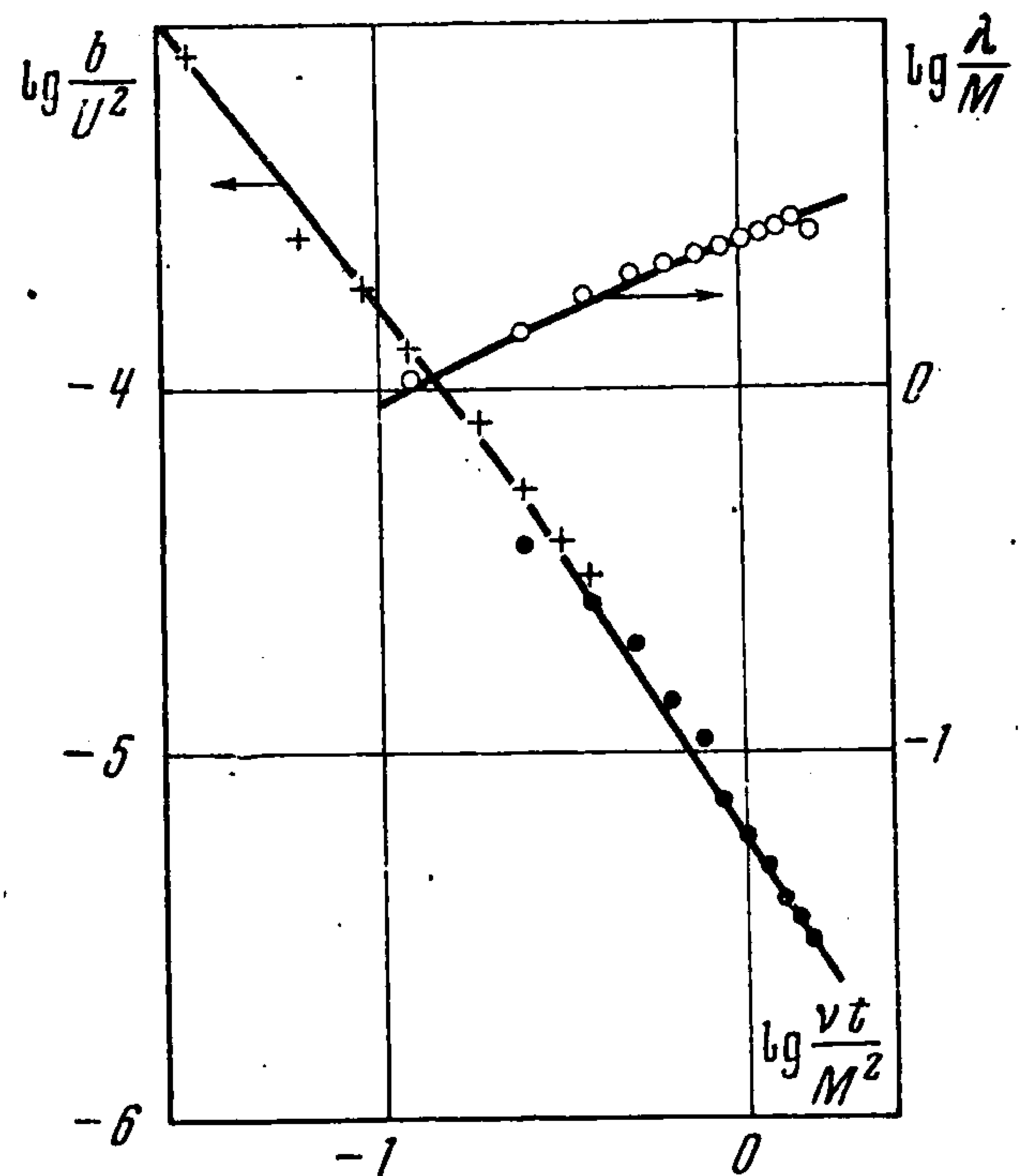
ной скоростью  $U$  через решетку, образованную двумя взаимно перпендикулярными рядами круглых прутьев диаметра  $d$ , отстоящих друг от друга на расстоянии  $M$ .

Было установлено, что отклонения от изотропии значительны [10, 11], и при вырождении турбулентности нет тенденции к установлению изотропии. В частности, отношение осредненного квадрата продольных пульсаций скорости к осредненному квадрату поперечных пульсаций больше единицы ( $\langle u_1^2 \rangle / \langle u_2^2 \rangle = 1.3 \pm 0.2$ ).

Несмотря на указанные отклонения от изотропности, решение Л. И. Седова (решение второго случая) с параметрами  $\alpha_+ = 0.2$ ,  $Ut^* / M = 0$ ,  $U^2 / b^* = 700$ ,  $M / \lambda^* = 1.43$ , как видно из [фиг. 5, 6, хорошо описывает эксперименты Бэтчелора и Таунсенда [12, 13] при  $R_M = UM / \nu = 650$ ,  $M / d = 16/3$ . На фиг. 5 светлые точки, крестики и темные точки соответ-



Фиг. 5



Фиг. 6

ствуют экспериментальным данным о  $f(r/\lambda)$  при  $x/M = Ut/M = 320, 640, 960$ . На фиг. 6 темные точки и крестики соответствуют опытным данным о  $b(t)$  при  $M = 0.159$  см и  $M = 0.635$  см, а светлые точки — опытным данным о  $\lambda(t)$  при  $M = 0.159$  см. На фиг. 5, 6 и на всех остальных фигурах сплошные линии соответствуют теоретическим кривым.

При сравнении экспериментальных данных с решением Л. И. Седова значения параметров решения определялись по следующей схеме:

1)  $\alpha$  — из сопоставления экспериментальных точек  $f(r/\lambda)$  с семейством кривых (4.3), (4.5)  $f(r/\lambda; \alpha)$ ;

2)  $\lambda^*$ ,  $b^*$  и принадлежность к семейству  $\alpha = \alpha_+$  или  $\alpha = \alpha_-$  — из сопоставления экспериментальных точек  $\lambda(b)$  с парой теоретических кривых (4.6) — (4.8)

$$\lg \frac{\lambda}{\lambda^*} \left( \lg \frac{b}{b^*} \right)$$

соответствующих семействам  $\alpha = \alpha_+$  и  $\alpha = \alpha_-$ ;

3)  $t^* = x^* / U$  — из сопоставления экспериментальных точек  $b(t)$  с теоретической кривой (4.6) — (4.8)

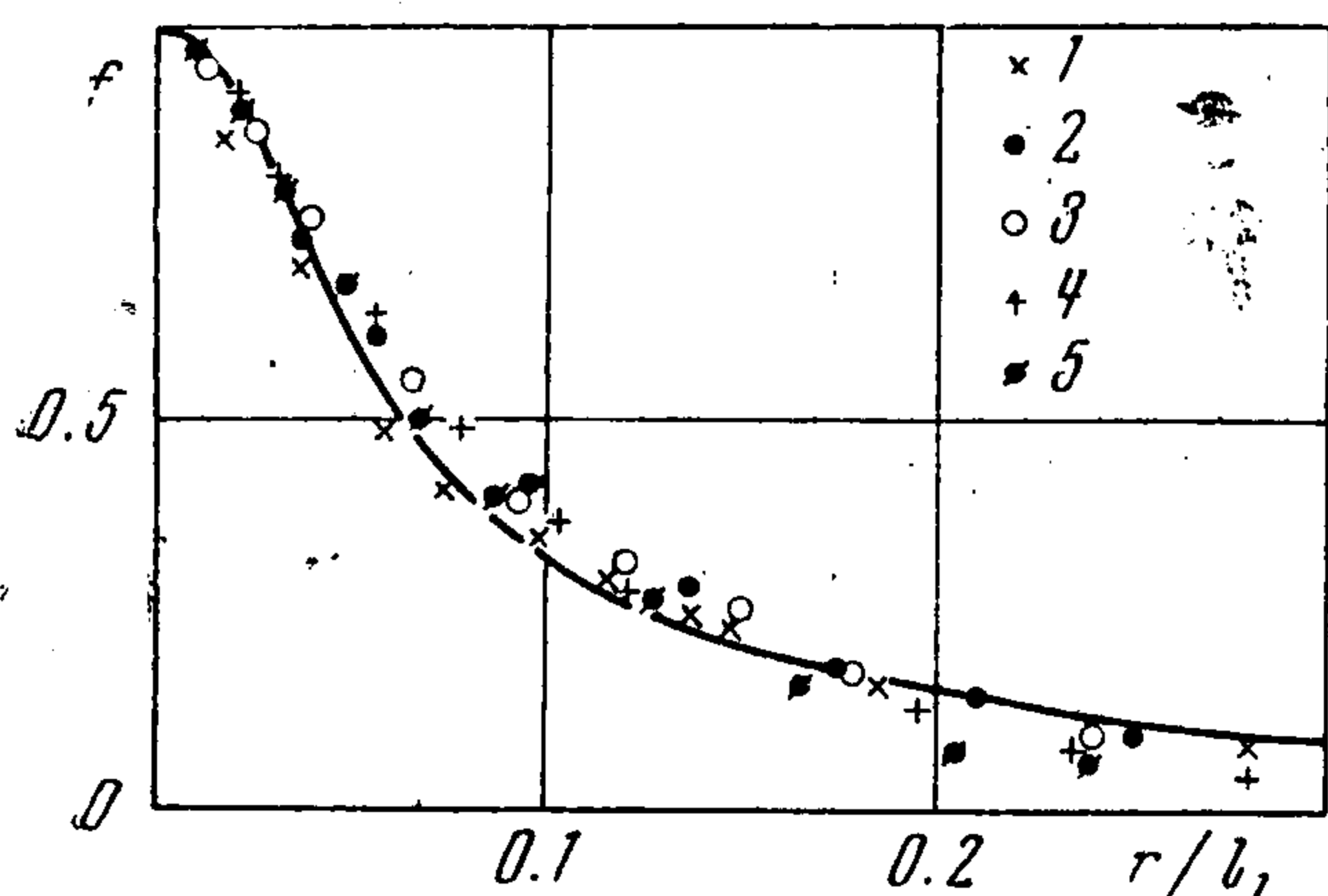
$$\frac{b}{b^*} \left[ \frac{\nu(t+t^*)}{\lambda^{*2}} \right]$$

при известном  $\alpha = \alpha_+$  или  $\alpha = \alpha_-$ .

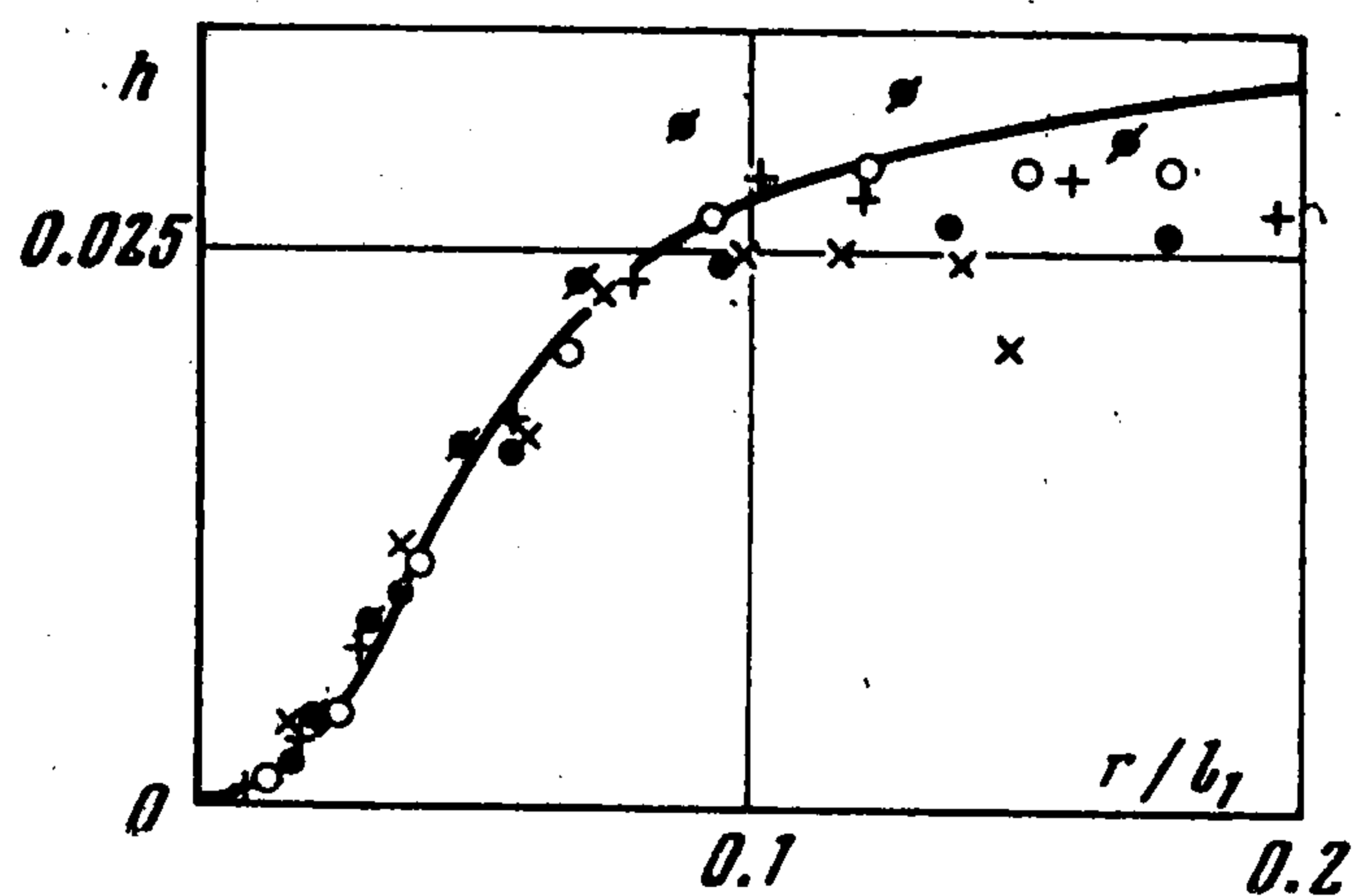
Для определения всех параметров решения достаточно измерить значения  $b$  и  $\lambda$  при двух различных значениях времени и одно значение  $f(r/\lambda)$  при  $r/\lambda \neq 0$ . Желательно, чтобы измеренное значение  $f$  было в интервале  $0.1 < f < 0.6$ , так как кривые семейства  $f(r/\lambda; \alpha)$  близки и при малых  $f$  и, особенно, при  $f$ , близких к единице (из определения  $\lambda$  (4.5) следует, что все кривые  $f(r/\lambda)$  имеют общее касание третьего порядка в точке  $f(0) = 1$  с параболой  $f = 1 - r^2 / 2\lambda^2$ ).

Отметим, что из уравнения Кармана — Хауарта (3.1) можно определить  $h(r, t)$  если известны  $f(r, t)$  и  $b(t)$ . Следовательно, совпадение теоретических и экспериментальных кривых  $b(t)$ ,  $l(t)$  и  $f(r/l)$  гарантирует выполнение гипотезы о самосохранении для экспериментальной функции  $h$  и ее совпадение с теоретически предсказываемой. Другими словами, отклонения теоретической кривой  $h(\chi)$  от экспериментальной  $h(r, t)$  может быть обусловлено только неточным выполнением в эксперименте уравнения Кармана — Хауарта и, стало быть, использованных при выводе этого уравнения предположений об однородности и изотропности осредненного движения и о том, что истинное движение подчиняется системе уравнений Навье — Стокса.

Из совпадения теоретических кривых и экспериментальных точек на  $b(t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $f(r/\lambda)$  на фиг. 5 и 6 следует, что для эксперимента Бэтчелора и Таунсенда [12, 13] при  $R_M = 650$ , во-первых, выполнены гипотезы самосохранения корреляционных функций  $f$  и  $h$  (4.1), и, во-вторых, реализуется второй случай возможной альтернативы п. 4 — решение Л. И. Седова.



Фиг. 7



Фиг. 8

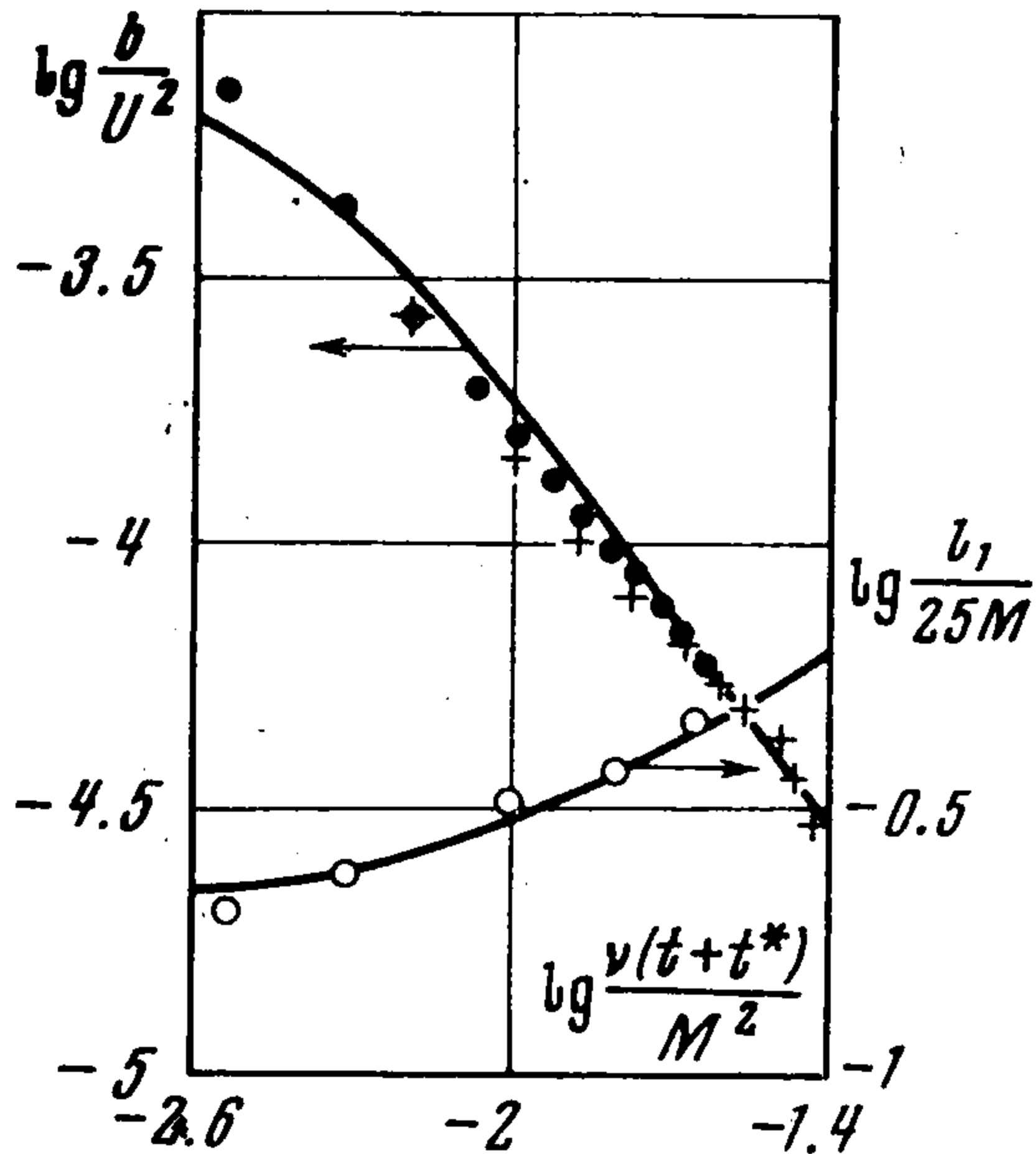
В литературе описан лишь один эксперимент Стюарта [14] при  $R_M = 5300$ ,  $M/d = 16/3$ ,  $M = 1,27$  см, в котором гипотезы (4.1) были проверены непосредственно. Стюарт подобрал масштаб  $l_1 = M\sqrt{5 + Ut/M}$  так, что экспериментальные точки 1—5  $f(r/l_1)$  (фиг. 7) и  $h(r/l_1)$  (фиг. 8), полученные при  $x/M = Ut/M = 20, 30, 60, 90, 120$ , в области  $r/l_1 < 0.1$  укладываются на одну кривую. На фиг. 7 и 8 обозначения совпадают.

Учитывая результаты Бэтчелора и Таунсенда [13], Стюарт заключил, что самосохранение  $f$  при малых  $r$  нарушается (хотя это нельзя заметить по графику  $f(r/l_1)$  на фиг. 7). Нарушение самосохранения  $f$  при малых  $r$  дает возможность (см. замечание 2° п. 4) использовать для согласования теории с этим экспериментом более широкий класс решений. Но и решение Л. И. Седова в области  $r/l_1 < 0.1$  (см. замечание 1° п. 4) со значениями параметров

$$\alpha_- = 0.05, U^2/b^* = 400, M/\lambda^* = 20, Ut^*/M = -4, p = -0.071$$

как видно из фиг. 7—9, достаточно хорошо согласуется с экспериментом.

Так как Стюарт не опубликовал своих данных о  $b(t)$ , на фиг. 9 нанесены и сравнены с теорией экспериментальные точки  $b(t)$ , полученные в работе [13] при близких условиях:  $R_M = 5620$ ,  $M/d = 16/3$ ,  $M = 0,635$  см (крестики) и  $M = 1,27$  см (темные точки). Светлые точки на фиг. 9 соответствуют значениям масштаба  $l_1$ , использованным на фиг. 7 и 8. При согласовании решения Л. И. Седова с экспериментом было принято  $\lambda = l_1 / 25$ .



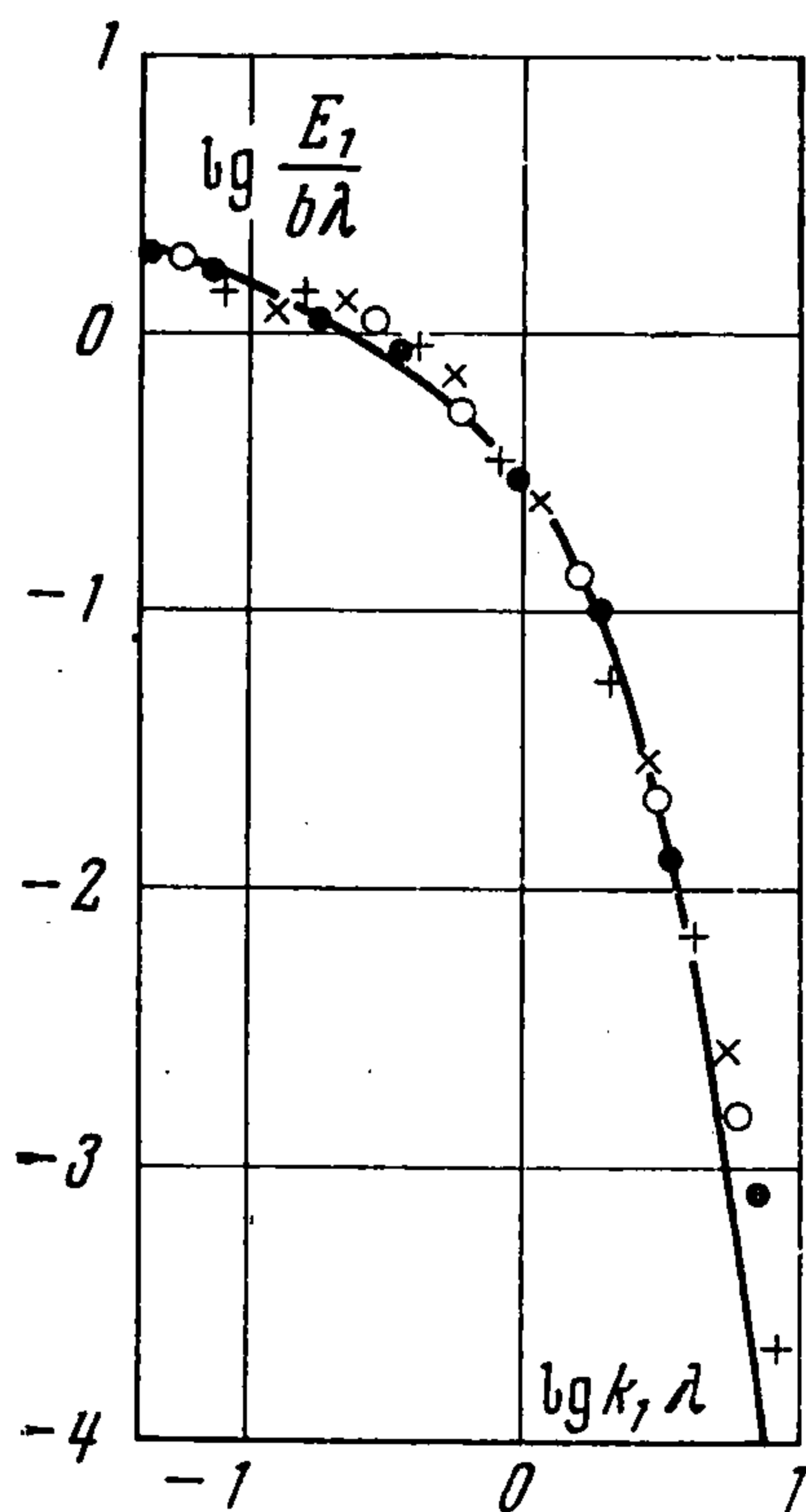
Фиг. 9

При увеличении числа Рейнольдса  $R_M$  соответствие между решением Л. И. Седова и опытными данными о форме корреляционной кривой  $f(r/\lambda)$  для турбулентных движений воздуха за решеткой ухудшается. Попытка Бэтчелора и Таунсенда согласовать это решение со своими опытными данными [13] при  $R_M = 11200$  и  $M/d = 16/3$  дала отрицательный результат<sup>1</sup>.

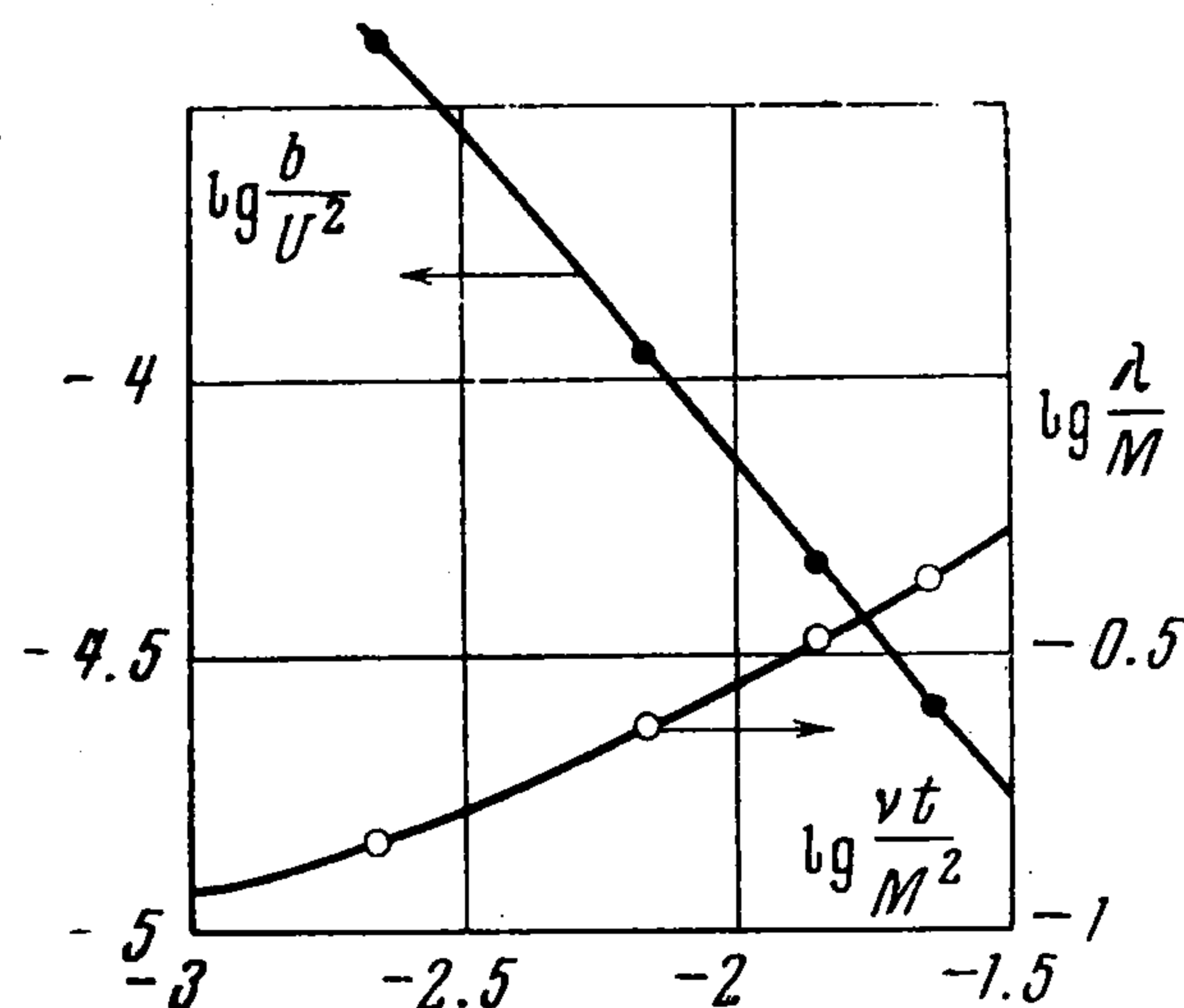
Важно отметить соответствие решения Л. И. Седова с параметрами  $\alpha = 0.05$ ,  $Ut^*/M = -9$ ,  $U^2/b^* = 204$ ,  $M/\lambda^* = 39$  и недавнего эксперимен-

та [16] при  $R_M = 17\,000$ ,  $M/d = 16/3$ ,  $M = 2,54$  см (фиг. 10, 11), в котором с помощью поджатия потока воздуха за решеткой удалось по-

лучить движение, весьма близкое к изотропному: был удовлетворительно выполнен ряд соотношений между компонентами тензора двойных корреляций скорости, вытекающих из предположения об изотропности движе-



Фиг. 10



Фиг. 11

ния, и, в частности,  $\langle u_1^2 \rangle / \langle u_2^2 \rangle = 1$  с точностью до 5%. На фиг. 10 темные точки, светлые точки, прямые крестики и косые крестики

<sup>1</sup> Впрочем, эти опытные данные удовлетворяют скорее гипотезе, рассмотренной в замечании 3° п. 4, чем гипотезе о самосохранении корреляционных функций, и вытекающие из этой гипотезы законы изменения  $b(t)$  и  $\lambda(t)$  (4.7) (в системе (2.14)  $C \neq 0$ ), такие же, как и в решении Л. И. Седова, значительно лучше согласуются с экспериментом, чем принятые Бэтчелором и Таунсендом законы (4.2) (в системе (2.14)  $C = 0$ ), названные ими законами «начального» периода вырождения турбулентности.

соответствуют измеренным значениям спектра  $E_1 / b\lambda = \varphi(k_1\lambda)$  при  $x / M = Ut / M = 45, 120, 240, 385$ . На фиг. 11 заштрихованным кружкам соответствуют опытные данные о  $b(t)$  а незаштрихованным — о  $\lambda(t)$ .

[В последнее время была проведена серия экспериментов по вырождению турбулентных движений воды за решетками различного типа [8, 9], а именно: 1) решетка, описанная в начале п. 5 с  $M/d = 5$ , 2) решетка того же типа, но с  $M/d = 2.8$ , 3) решетка, состоящая из одного ряда колеблющихся вокруг своей оси круглых прутьев, на которых жестко закреплен ряд пластинок, причем максимальная скорость концов пластинок  $V_p$  в одном опыте в три раза, а в другом в 17 раз больше скорости потока  $U$ .

Основные результаты опытов с этими решетками таковы: 1) параметр, характеризующий анизотропию  $\langle u_1^2 \rangle / \langle u_2^2 \rangle$  равен единице с точностью до 5%; 2) очень хорошо выполнена гипотеза самосохранения  $f$ , причем кривая  $f(r/\lambda)$  для всех опытов универсальна. Предложенная авторами эмпирическая кривая в области измерений практически совпадает с кривой (4.3) при  $\alpha = 0.08$ .

Значения параметров решения Л. И. Седова, подобранные для согласования с опытными данными [8, 9] и обозначения, использованные на фиг. 12—14, приведены в таблице. Для всех экспериментов принято  $\alpha_- = 0.08$ .

Условия экспериментов				Значения параметров			Обозначения экспериментальных точек на фиг. 12—14
$R_M$	$M/d$	$V_p/U$	$U$ , см/сек	$t^*$ , сек	$U^2/b^*$	$M/\lambda^*$	
470	2.8	—	2.0	—17	23.4	4.68	прямые крестики косые крестики темные точки светлые точки
840	5	—	2.9	—11	72.4	11.5	
2000	—	3	3.14	—3	13.2	29.5	
2000	—	17	3.14	3	0.4	50	

Как видно из фиг. 12—14, экспериментальные функции  $b(t)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $f(r/\lambda)$  хорошо согласуются с теоретическими. Как и для экспериментов с воздухом, это согласование должно обеспечивать выполнение гипотезы самосохранения для экспериментальной корреляционной функции  $h$  и ее соответствие теоретической с такой степенью точности, с какой выполняется уравнение Кармана — Хауарта.

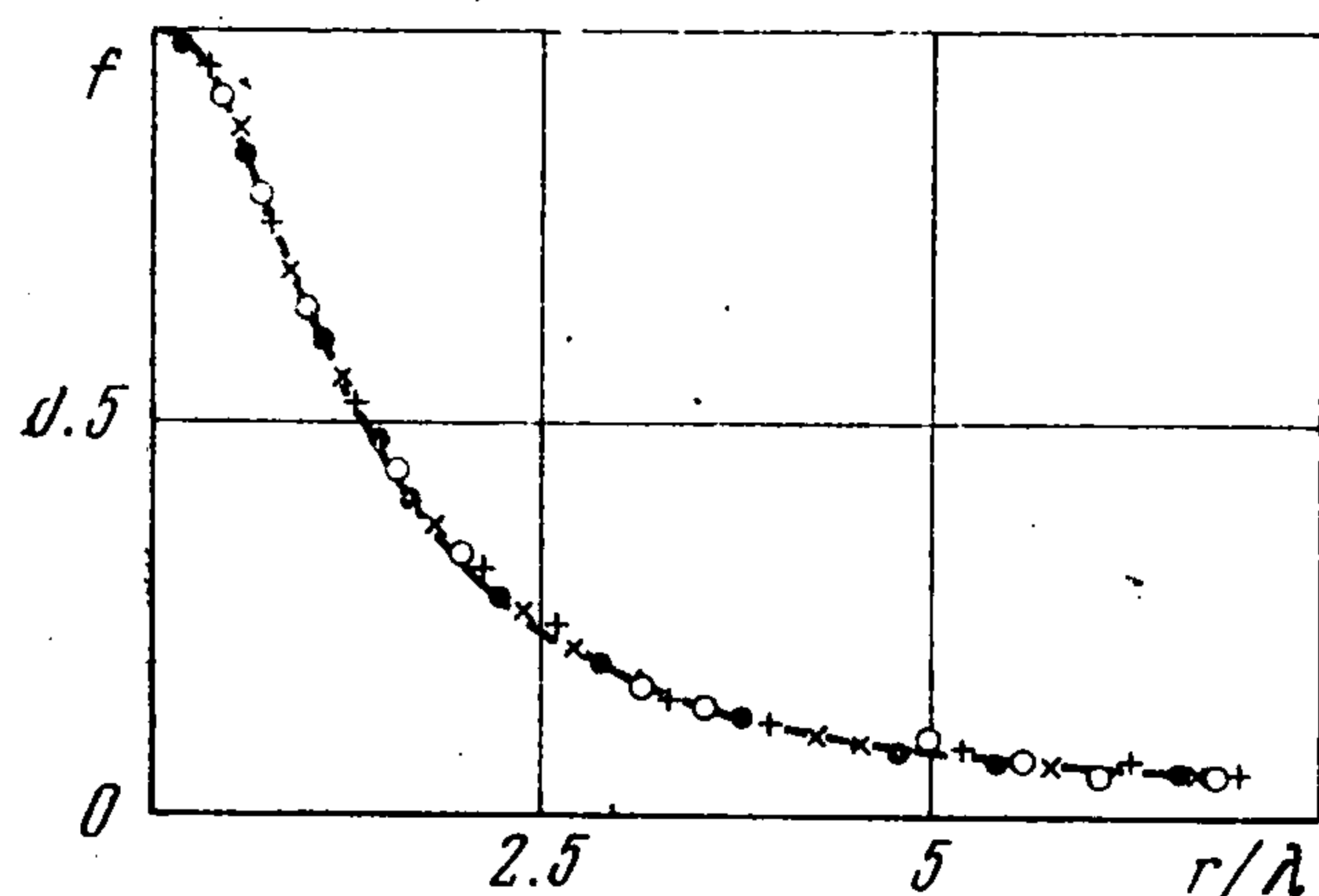
Итак, для экспериментов по вырождению воды за решетками различных типов [8, 9], во-первых, выполнены гипотезы о самосохранении корреляционных функций  $f$  и  $h$  (4.1), во-вторых, реализуется второй случай альтернативы п. 4 — решение Л. И. Седова, в третьих, единственный существенный теоретический параметр  $\alpha$  универсален  $\alpha_- = 0.08$ . При описании турбулентных движений воздуха даже за геометрически подобными решетками такой универсальности нет: в опытах Бэтчелора и Таунсенда [12, 13] при возрастании  $R_M$  от 650 до 5620  $\alpha$  убывает от 0.2 до 0.05, при этом решение переходит от семейства  $\alpha = \alpha_+$  к семейству  $\alpha = \alpha_-$ .

Количественное расхождение результатов опытов с воздухом и водой видно из сравнения корреляционных функций  $f(r/\lambda)$ , полученных при сходных условиях в опытах Бэтчелора и Таунсенда с воздухом [12] ( $R_M =$

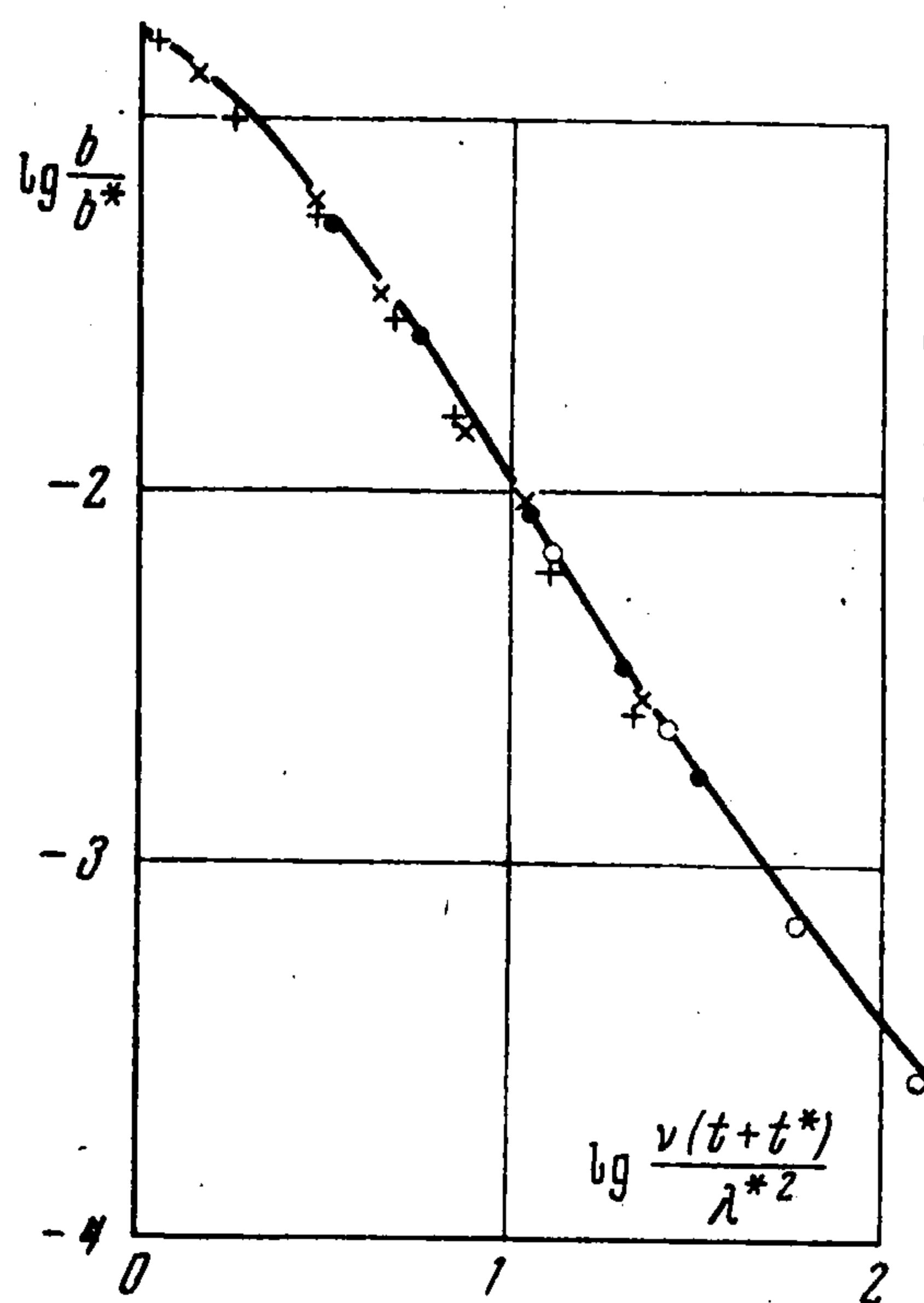
$= 650$ ,  $M/d = 1^{2/3}$ ) и Линга и Хуанга с водой [8] ( $R_M = 840$ ,  $M/d = 5$ ), и совпадающих с теоретической (4.3) при  $\alpha = 0.2$  и  $\alpha = 0.08$  соответственно (см. фиг. 1, 5, 12).

Таким образом, даже для геометрически подобных решеток в опытах наблюдается отклонение от подобия по числу Рейнольдса  $R_M = UM/\nu^1$ . Следовательно, установить универсальные зависимости параметров  $\alpha$ ,  $\nu t^*/M^2$ ,  $U^2/b^*$ ,  $M/\lambda^*$  от  $R_M$  нельзя.

Тем не менее, как было показано выше, решение Л. И. Седова, полученное из уравнения Кармана — Хауарта



Фиг. 12



Фиг. 13

та с помощью только гипотез о самосохранении корреляционных функций и без использования гипотез о равенстве нулю третьих или более высоких корреляций скорости или об их зависимости от вторых корреляций (например, гипотез А. М. Обухова, М. Д. Миллионщикова, Гейзенберга, Кармана, Коважного), хорошо

соответствуют опытным данным о вырождении турбулентных движений воздуха и воды за решеткой.

Отметим, наконец, что для всех цитированных экспериментов, кроме эксперимента Бэтчелора и Таунсенда [12, 13] при  $R_M = 650$ ,  $\alpha < 0.1$ . Для этих значений  $\alpha$  асимптотические законы  $b \sim t^{-1}$  и  $\lambda \sim t^{1/2}$  при  $t \rightarrow \infty$  и,

следовательно,  $\lambda\sqrt{b}/\nu \rightarrow \text{const} \neq 0$ . Это значит, что так называемая «конечная» стадия вырождения турбулентности, для которой  $\lambda\sqrt{b}/\nu \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$  и члены с третьими моментами в уравнении Кармана — Хауарта

$$\frac{\partial b_d^{nn}}{\partial r} + \frac{4}{r} b_d^{nn}$$

<sup>1</sup> Видимо, это отклонение происходит при  $x/M < 20$ , так что в области сравнения эксперимента с моделью изотропной турбулентности ( $x/M \geq 20$ ) расхождения экспериментальных данных о движении воздуха и воды можно отнести за счет начальных условий.

становятся бесконечно малой более высокого порядка, чем члены со вторыми моментами [12], для экспериментов, описываемых решением Л. И. Седова с  $\alpha < 0.1$ , не существует.

Автор благодарит Л. И. Седова за предложенную тему, постоянное внимание и полезные обсуждения работы.

Поступила 9 III 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Karman Th., Howarth L. On the statistical theory of isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc. A, 1938, vol. 164, № 917.
2. Седов Л. И. Вырождение изотропных турбулентных движений несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1944, т. 42, № 3.
3. Hinze J. O. Turbulence. N. Y., McGraw-Hill, 1959.
4. Bochner S. Monotone funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse. Math. Ann. 1933, Bd 108, Nr. 3.
5. Kampé de Fériet J. Le tenseur spectral de la turbulence homogène non isotrope dans un fluide incompressible. Proc. 7th Internat. Congress Appl. Mech. Introduction vol. London, 1948, (London, 1949).
6. Lin C. C. Note on the law of decay of isotropic turbulence. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1948, vol. 34, No. 11.
7. Slater L. J. Confluent hypergeometric functions. Cambridge, CUP, 1960.
8. Ling S. C., Huang T. T. Decay of weak turbulence. Phys. Fluids. 1970, vol. 13, No. 12.
9. Ling S. C., Wan C. A. Decay of isotropic turbulence generated by a mechanically agitated grid. Phys. Fluids, 1972, vol. 15, No. 8.
10. Batchelor G. K., Stewart R. W. Anisotropy of the spectrum of turbulence at small wave-number. Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1950, vol. 3, No. 1.
11. Comte-Bellot G., Corrsin S. The use of a contraction to improve the isotropy grid-generated turbulence. J. Fluid. Mech., 1966, vol. 25, Pt. 4.
12. Batchelor G. K., Townsend A. A. Decay of turbulence in the final period. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1948, vol. 194, No. 1039.
13. Batchelor G. K., Townsend A. A. Decay of isotropic turbulence in the initial period. Proc. Roy. Soc. A, 1948, vol. 193, No. 1035.
14. Stewart R. W. Triple velocity correlations in isotropic turbulence. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1951, vol. 47, No. 1.
15. Comte-Bellot G., Corrsin S. Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated «isotropic» turbulence. J. Fluid. Mech., 1971, vol. 48, No. 2.