

ОБОБЩЕННЫЕ ЗАКОНЫ ПОДОБИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ «ЗАКОНА ЛОКАЛЬНОСТИ»

А. И. Бунимович, А. В. Дубинский

(Москва)

Показано, что в условиях закона локальности, т. е. в тех случаях, когда поток импульса на поверхность тела в основном зависит от локальных свойств поверхности (гиперзвуковое течение газа в ньютоновской постановке, течение разреженного газа, воздействие света и т. д.), могут быть установлены обобщенные законы подобия, связывающие между собой аэродинамические характеристики в общем случае аффинно-неподобных тел.

Установлены методы построения соответственных тел, приведены примеры применения предложенных законов подобия.

Законы подобия при обтекании тел идеальным газом в различных диапазонах скоростей хорошо известны и нашли широкое практическое применение. Пользуясь этими законами, можно пересчитать аэродинамические характеристики данного тела на другое число M полета, а в некоторых случаях получить аэродинамические характеристики аффинно-подобных тел [1, 2].

Во многих областях аэродинамики и динамики полета успешно используются для определения сил, действующих на тело, различные теории, по существу, основывающиеся на предположениях о том, что поток импульса на поверхности тела в основном зависит от локальных свойств поверхности и местного угла между нормалью к поверхности и направлением скорости полета (так называемый закон локальности). Обтеканию в условиях закона локальности внутренне присущи определенные универсальные соотношения между аэродинамическими силами и моментами [3].

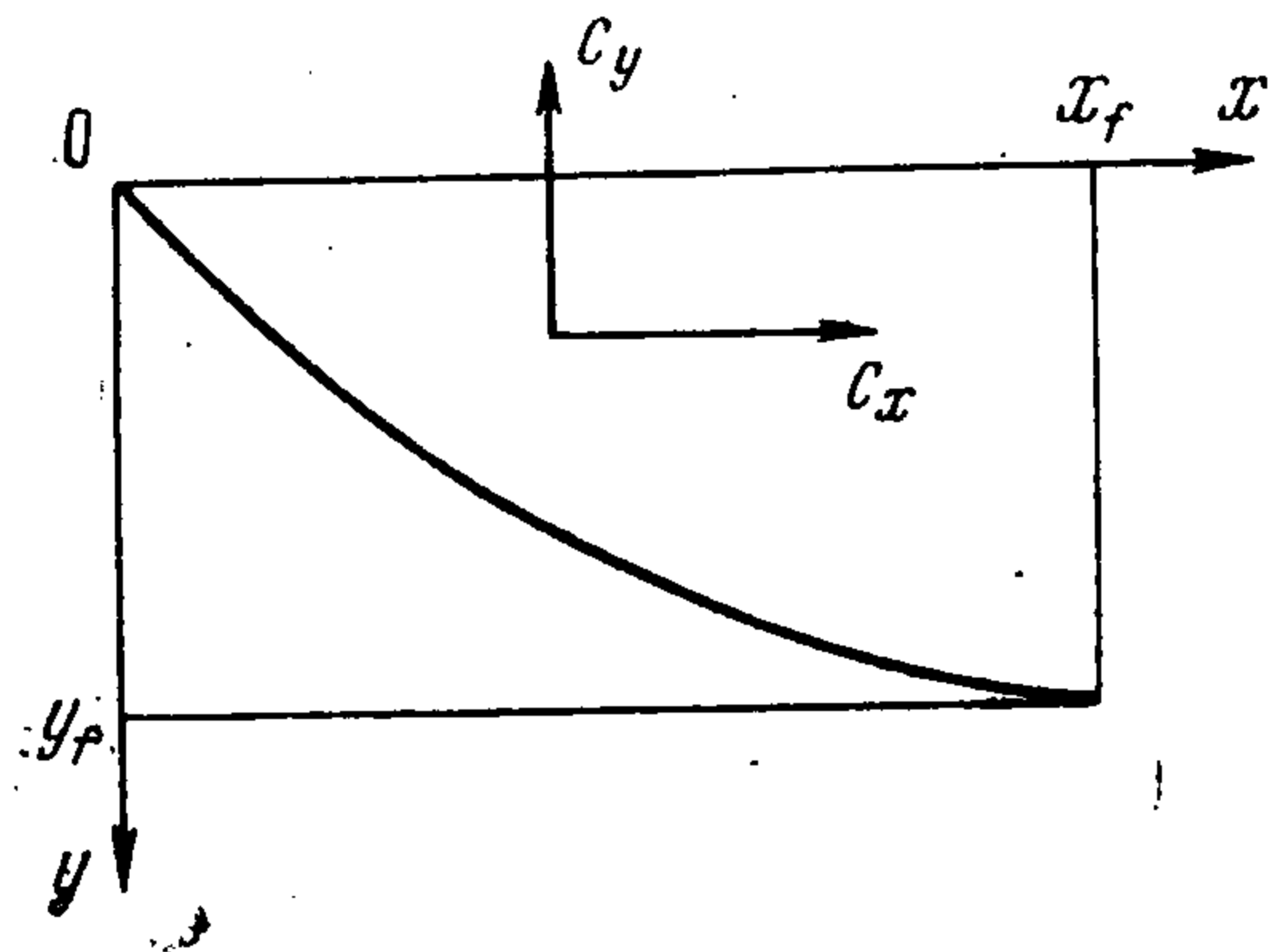
В данной работе показывается, что в условиях закона локальности могут быть установлены обобщенные законы подобия, связывающие между собой аэродинамические характеристики в общем случае аффинно-неподобных тел. Частный случай таких законов для ньютоновского гиперзвукового течения газа при ряде дополнительных ограничений рассматривался в работе [4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание плоского контура в условиях закона локальности. Будем рассматривать профили, ограниченные сверху плоскостью, обтекаемые под нулевым углом атаки (фиг. 1). Очевидно, что любой выпуклый профиль может рассматриваться аналогичным образом, как состоящий из двух профилей, один из которых ограничен плоскостью сверху, а другой — плоскостью снизу.

В предположении закона локальности аэродинамические [характеристики (коэффициент подъемной силы и коэффициент лобового сопротивления) профиля определяются формулами

$$(1.1) \quad c_y = \frac{1}{\lambda} \int_0^{x_f} f_1(\theta, A_i, B_i) dx, \quad c_x = \frac{1}{\lambda} \int_0^{x_f} f_2(\theta, A_i, B_i) dx$$

Здесь θ — угол между касательной к контуру в данной точке и направлением набегающего потока, A_i, B_i — константы, характеризующие условия взаимодействия контура с набегающим потоком, λ — характерный размер. Интегрирование проводится от передней критической точки до границы «освещенной», т. е. обращенной к потоку, поверхности профиля.



Фиг. 1

В частности, если местный коэффициент силы, действующей на тело, может быть представлен в форме

$$(1.2) \quad c_f = \omega(\theta) n + \Omega(\theta) v, \quad \Omega(\theta) = B_1 \sin \theta, \quad \omega(\theta) = A_0 + A_1 \sin \theta + (A_2 - B_1) \times \sin^2 \theta$$

то выражения (1.1) принимают вид

$$(1.3) \quad c_y = \frac{1}{\lambda} \int_0^{x_f} \omega(\theta) dx, \quad c_x = \frac{1}{\lambda} \int_0^{x_f} [\omega(\theta) + B_1] \operatorname{tg} \theta dx$$

Иногда более удобна запись (1.3) в форме

$$(1.4) \quad c_x^* = \frac{1}{\lambda} \int_0^{x_f} \omega(\theta) \operatorname{tg} \theta dx, \quad c_x^* = c_x - \frac{B_1 y_f}{\lambda}$$

$$y_f = \int_0^{x_f} \operatorname{tg} \theta dx, \quad f_2(\theta, A_i, B_i) = \omega(\theta) \operatorname{tg} \theta$$

Формулы (1.3) охватывают, в частности, наиболее интересные случаи гиперзвукового течения газа в предположениях теории Ньютона ($A_0 = A_1 = B_1 = 0$), классической ($A_2 = 2$) или модифицированной ($A_2 = c_{p_0}$ для затупленных тел, $A_2 = c_{p^*} / (v n)_0^2$ для заостренных тел [2]; величины с индексом нуль относятся к передней кромке); свободно-молекулярного течения разреженного газа при диффузно-зеркальном отражении ($A_2 = 2(2 - \sigma)$, $B_1 = 2\sigma_\tau$), гиперзвукового ($A_0 = A_1 = 0$) или в приближении Шрелло [3,5] ($A_0 = (2 - \sigma) S_\infty^{-2}$, $A_1 = \sigma (\pi T_w T_\infty^{-1})^{1/2} S_\infty^{-1}$, где σ и σ_τ — соответственно коэффициенты нормального и касательного отражения, T_w и T_∞ — температура тела] и набегающего потока, $S_\infty = v(2RT_\infty)^{-1/2}$, R — [газовая] постоянная); воздействия светового потока на тело ($A_0 = 0$, $B_1 = 1 - e(1 - B)$, $A_1 = 2/3 [1 - e(1 - A)]$, $A_2 = 1 + e \times (1 - A)$, где e, A, B — коэффициенты отражательной способности, аккомодации нормального и касательного импульса соответственно).

При высказанных предположениях может быть найден широкий класс профилей, получаемых из исходного с помощью некоторых преобразований (в общем случае — не аффинных), аэродинамические характеристики которых могут быть получены пересчетом характеристик исходного профиля на основании устанавливаемых ниже законов подобия.

2. Соответственные профили. Определим форму исходного профиля уравнением (φ — достаточно гладкая функция)

$$(2.1) \quad y^{(0)} = \varphi(x^{(0)}) \\ \varphi \geq 0, \varphi' > 0 \text{ при } x^{(0)} \in (0, x_f^{(0)}), \varphi(0) = 0$$

Введем параметр ξ , определяемый из соотношения

$$(2.2) \quad \xi = \int_0^{x^{(0)}} \Phi[u(t)] dt = F(x^{(0)}), \quad u(t) = \arctg \varphi'(t)$$

где Φ — некоторая [достаточно гладкая функция, принимающая на $(0, \pi/2)$ неотрицательные значения. Тогда уравнение (2.1) может быть представлено в параметрическом виде

$$x^{(0)} = F^{-1}(\xi), \quad y^{(0)} = \varphi[F^{-1}(\xi)]$$

Построим соответственный профиль, определяемый уравнениями

$$y^{(1)} = y^{(1)}(\xi), \quad x^{(1)} = x^{(1)}(\xi)$$

Здесь $y^{(1)}$ и $x^{(1)}$ находятся из соотношений (Ψ — некоторая функция)

$$(2.3) \quad \frac{y^{(1)}(\xi)}{x^{(1)}(\xi)} = \operatorname{tg} \Psi(\beta), \quad x^{(1)}(\xi) = \frac{1}{\Phi[\Psi(\beta)]} \\ \beta = \arctg \frac{y^{(0)}(\xi)}{x^{(0)}(\xi)}, \quad x' = \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad y' = \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

Очевидно, что при произвольном ξ углы наклона касательных $\theta^{(0)}(\xi)$ и $\theta^{(1)}(\xi)$ в соответствующих точках исходного и соответственного профилей связаны соотношением

$$(2.4) \quad \theta^{(1)} = \Psi(\theta^{(0)})$$

После перехода в (2.3) от параметра ξ к $x^{(0)}$ по формуле (2.2) уравнения соответственного профиля примут вид

$$(2.5) \quad x^{(1)} = \int_0^{x^{(0)}} Q(u) dt, \quad y^{(1)} = \int_0^{x^{(0)}} Q(u) \operatorname{tg} u dt$$

$$(2.6) \quad Q(z) = \Phi(z) / \Phi[\Psi(z)]$$

Итак, функции Φ, Ψ осуществляют преобразование исходного профиля в соответственный.

Аэродинамические характеристики исходного (индекс нуль) и соответственного (индекс единица) профилей (режимы обтекания в рамках закона локальности могут быть различными для этих контуров) записываются в форме

$$(2.7) \quad c_y^{(0)} = \frac{1}{\lambda^{(0)}} \int_0^{\xi_1} \frac{f_1^{(0)}(\theta)}{\Phi(\theta)} d\xi, \quad c_x^{(0)} = \frac{1}{\lambda^{(0)}} \int_0^{\xi_1} \frac{f_2^{(0)}(\theta)}{\Phi(\theta)} d\xi \\ c_y^{(1)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \int_0^{\xi_1} \frac{f_1^{(1)}[\Psi(\theta)]}{\Phi[\Psi(\theta)]} d\xi, \quad c_x^{(1)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \int_0^{\xi_1} \frac{f_2^{(1)}[\Psi(\theta)]}{\Phi[\Psi(\theta)]} d\xi \\ \theta \equiv \theta^{(0)}, \quad \xi_1 = F(x_f^{(0)})$$

Очевидно, что

$$(2.8) \quad \int_0^{\xi_1} \frac{d\xi}{\Phi(\theta^{(i)})} \equiv x_f^{(i)}, \quad \int_0^{\xi_1} \frac{\operatorname{tg}\theta^{(i)}}{\Phi(\theta^{(i)})} d\xi = y_f^{(i)}, \quad i = 0, 1$$

Предположим, что существует некоторая совокупность констант $a_k^{(0)}$, $a_k^{(1)}$, не всех равных нулю, а таких, что выполняется тождество

$$(2.9) \quad a_1^{(0)} f_1^{(0)}(\theta) + a_2^{(0)} f_2^{(0)}(\theta) + a_3^{(0)} \operatorname{tg}\theta + a_4^{(0)} + Q(\theta) \{a_1^{(1)} f_1^{(1)}[\Psi(\theta)] + \\ + a_2^{(1)} f_2^{(1)}[\Psi(\theta)] + a_3^{(1)} \operatorname{tg}[\Psi(\theta)]\} \equiv 0$$

Тогда, интегрируя (2.9) по ξ в пределах от нуля до ξ_1 с учетом (1.1), (2.6) — (2.8), получим соотношение между аэродинамическими характеристиками исходного и соответственного профилей в форме

$$(2.10) \quad \sum_{i=0}^1 \lambda^{(i)} \left[a_1^{(i)} c_y^{(i)} + a_2^{(i)} c_x^{(i)} + a_3^{(i)} \frac{y_f^{(i)}}{\lambda^{(i)}} + a_4^{(i)} \frac{x_f^{(i)}}{\lambda^{(i)}} \right] = 0$$

Очевидно, что соотношение (2.10) не зависит от формы исходного профиля. Поскольку возможно существование нескольких линейно-независимых совокупностей величин $a_k^{(i)}$, то соответственно могут иметь место несколько различных соотношений вида (2.10).

Следовательно, преобразование определяется функциями Ψ и Q , причем последняя не является произвольной, ибо должна существовать такая функция, чтобы выполнялось соотношение (2.6).

Если Φ_0 удовлетворяет (2.6), то этому соотношению будет удовлетворять и функция $\Phi(\theta) = \Phi_0 R[\Psi(\theta), \theta]$, где $R(u, v)$ — симметричная функция ($R(u, v) = R(v, u)$). Следовательно, существует бесконечное множество функций Φ , удовлетворяющих (2.6), если доказано существование хотя бы одной такой функции. Это означает, что при одном и том же преобразовании контуров параметр ξ можно выбирать разными способами.

Отметим еще некоторые полезные свойства рассматриваемого преобразования. Так, если для функций Q_i найдутся $\Phi_i(\theta)$, $i = 1, 2$ такие, что выполняется соотношение (2.6), то соответствующая функция $\Phi = \Phi_1 \Phi_2$ найдется и для $Q = Q_1 Q_2$, а функция $\Phi = \Phi_1^n$ — для $Q = Q_1^n$.

Наибольший интерес при использовании закона локальности представляют выпуклые контуры.

Установим поэтому, при каких условиях в результате преобразования направление выпуклости контура не изменится. Поскольку

$$\frac{d^2 y^{(0)}}{dx^{(0)2}} = \varphi''(x^{(0)})$$

$$\frac{d^2 y^{(1)}}{dx^{(1)2}} = \frac{\Psi'(\gamma) \varphi''(x^{(0)})}{Q(\gamma) [1 + \varphi'^2(x^{(0)})] \cos^2 \Psi(\gamma)}, \quad \gamma = u(x^{(0)}) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varphi'(x^{(0)})$$

то очевидно, что если $\varphi'' \neq 0$, то при $\Psi'(\theta) > 0$ направление выпуклости в результате преобразования не изменится, а при $\Psi'(\theta) < 0$ изменится на противоположное.

Отметим, что преобразование исходного контура можно повторять последовательно несколько раз при различных Q и Ψ . При этом можно применять и преобразования, переводящие выпуклый контур в вогнутый, так как последовательно проведенное четное число таких преобразований всегда переводит выпуклый контур в выпуклый.

3. Рассмотрим преобразование вида

$$(3.1) \quad x^{(1)} = a_1 x^{(0)} + a_2 y^{(0)}, \quad y^{(1)} = b_1 x^{(0)} + b_2 y^{(0)}$$

В этом случае соответственный контур получается из исходного в результате растяжения последнего в направлении осей и поворота вокруг начала координат. Изучим условия существования такого преобразования. Воспользовавшись (2.4), получим из (3.1)

$$(3.2) \quad \int_0^{x^{(0)}} [Q(u) - a_1 - a_2 \operatorname{tg} u] dt = 0$$

$$\int_0^{x^{(0)'}} \{Q(u) \operatorname{tg} [\Psi(u)] - b_1 - b_2 \operatorname{tg} u\} dt = 0$$

Так как (3.2) должно выполняться для любых $x^{(0)}$ и $u(t)$, то имеют место равенства

$$(3.3) \quad Q(u) = a_1 + a_2 \operatorname{tg} u, \quad \Psi(u) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b_1 + b_2 \operatorname{tg} u}{a_1 + a_2 \operatorname{tg} u}$$

Кроме условий (3.3), должно выполняться также условие (2.8), которое сводится в данном случае к существованию функции Φ , такой что

$$(3.4) \quad a_1 + a_2 z = R(z) / R\left(\frac{b_1 + b_2 z}{a_1 + a_2 z}\right), \quad z = \operatorname{tg} u, \quad R(z) = \Phi(\operatorname{arc} \operatorname{tg} z)$$

Таким образом, достаточно доказать, что при некоторых a_1, a_2, b_1, b_2 существует функция $R(z)$, удовлетворяющая условию (3.4), чтобы сделать вывод о существовании соответствующего преобразования.

В качестве примера рассмотрим вопрос о существовании преобразования

$$x^{(1)} = a_1 x^{(0)}, \quad y^{(1)} = b_2 y^{(0)}, \quad a_1 > 0, \quad b_2 > 0$$

Условие (3.4) принимает вид

$$a_1 = R(z) / R\left(\frac{b_2}{a_1} z\right)$$

Можно показать, что преобразование реализуется при любых значениях параметров a_1, b_2 , кроме $a_1 = b_2 \neq 1$; соответствующие выражения для функции $R(z)$ имеют вид $R(z) \equiv 1$, если $a_1 = 1$; $R(z) = z^c$, $c = (\log_{a_1} b_2 - 1)^{-1}$, если $a_1 \neq 1$.

4. Примеры применения предложенного метода. Выберем функции Ψ и Q следующего вида:

$$(4.1) \quad \Psi(\theta) = 1/2\theta, \quad Q(\theta) = 4\cos^2 1/2\theta$$

Выбор $Q(\theta)$ обоснован, так как соотношение (2.6) удовлетворяется, если положить $\Phi(\theta) = \sin^2 \theta$. Направление выпуклости контура при преобразовании (4.1) не меняется, ибо $\Psi'(\theta) = 1/2 > 0$.

Пусть исходный и соответственный контуры обтекаются либо гиперзвуковым потоком в предположении Ньютона, либо свободно-молекулярным гиперзвуковым потоком разреженного газа, причем режимы течений могут быть для этих контуров различными.

В рассматриваемом случае

$$f_1^{(j)}(\theta, A_i, B_i) = (A_2^{(j)} - B_1^{(j)}) \sin^2 \theta, \quad f_2^{(j)}(\theta, A_i, B_i) = f_1^{(j)} \operatorname{tg} \theta, \quad j = 0, 1$$

и соотношение (2.9) принимает вид

$$(4.2) \quad (A_2^{(0)} - B_1^{(0)}) (a_1^{(0)} + a_2^{(0)} \operatorname{tg} \theta) \sin^2 \theta + a_3^{(0)} \operatorname{tg} \theta + a_4^{(0)} + 4 \cos^2 1/2 \theta \times \\ \times \{(A_2^{(1)} - B_2^{(1)}) (a_1^{(1)} + a_2^{(1)} \operatorname{tg} 1/2 \theta) \sin^2 1/2 \theta + a_3^{(1)} \operatorname{tg} 1/2 \theta + a_4^{(1)}\} \equiv 0$$

После введения новой переменной $z = \operatorname{tg} 1/2 \theta$ и элементарных преобразований (4.2) переписывается в виде условий равенства нулю многочлена относительно z ; приравняв к нулю коэффициенты многочлена, получаем систему линейных уравнений для определения $a_i^{(j)}$, которая имеет два линейно независимых решения

$$a_1^{(0)} = B_1^{(0)} - A_2^{(0)}, \quad a_1^{(1)} = A_2^{(1)} - B_1^{(1)}, \quad a_2^{(0)} = a_3^{(0)} = a_4^{(0)} = a_2^{(1)} = a_3^{(1)} = a_4^{(1)} = 0 \\ a_1^{(0)} = a_4^{(0)} = a_1^{(1)} = a_4^{(1)} = 0, \quad a_2^{(0)} = 2, \quad a_3^{(0)} = 2(B_1^{(0)} - A_2^{(0)}) = -2a_3^{(1)}, \quad a_2^{(1)} = \frac{B_1^{(0)} - A_2^{(0)}}{A_2^{(1)} - B_1^{(1)}}$$

Полученные решения позволяют, в соответствии с равенством (2.10), построить соотношения

$$(4.3) \quad \lambda^{(0)} (A_2^{(1)} - B_2^{(1)}) c_y^{(0)} = \lambda^{(1)} (A_1^{(0)} - B_1^{(0)}) c_y^{(1)} \\ 2\lambda^{(0)} c_x^{(0)} - 2B_1^{(0)} y_f^{(0)} + (A_2^{(0)} - B_1^{(0)}) (y_f^{(1)} - 2y_f^{(0)}) - 2 \frac{B_1^{(0)} - A_2^{(0)}}{B_1^{(1)} - A_2^{(1)}} (\lambda^{(1)} c_x^{(1)} - B_1^{(1)} y_f^{(1)}) = 0$$

Разрешая уравнения (4.3) относительно аэродинамических характеристик соответственного контура, получим равенства

$$(4.4) \quad c_y^{(1)} = A \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(1)}} c_y^{(0)}, \quad A = \frac{A_2^{(1)} - B_1^{(1)}}{A_2^{(0)} - B_1^{(0)}} \\ c_x^{(1)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}} \left[A \lambda^{(0)} c_x^{(0)} - A A_2^{(0)} y_f^{(0)} - \frac{1}{2} (3B_1^{(1)} - A_2^{(1)}) \right]$$

В частности, если исходный контур обтекается гиперзвуковым ньютоновским потоком, а соответственный — гиперзвуковым свободно-молекулярным потоком, то в соотношениях (4.4) надо положить $A_2^{(0)} = 2, B_1^{(0)} = 0, A_2^{(1)} = 2(2 - \sigma), B_1^{(1)} = 2\sigma_\tau$.

Воспользовавшись соотношениями (2.4), (4.1), запишем уравнение соответственного контура в параметрической форме

$$(4.5) \quad x^{(1)} = 2t + 2 \int_0^t \frac{dt}{[1 + \varphi'^2(t)]^{1/2}}, \quad y^{(1)} = 2 \int_0^t \frac{\varphi'(t) dt}{[1 + \varphi'^2(t)]^{1/2}}, \quad t = x^{(0)}$$

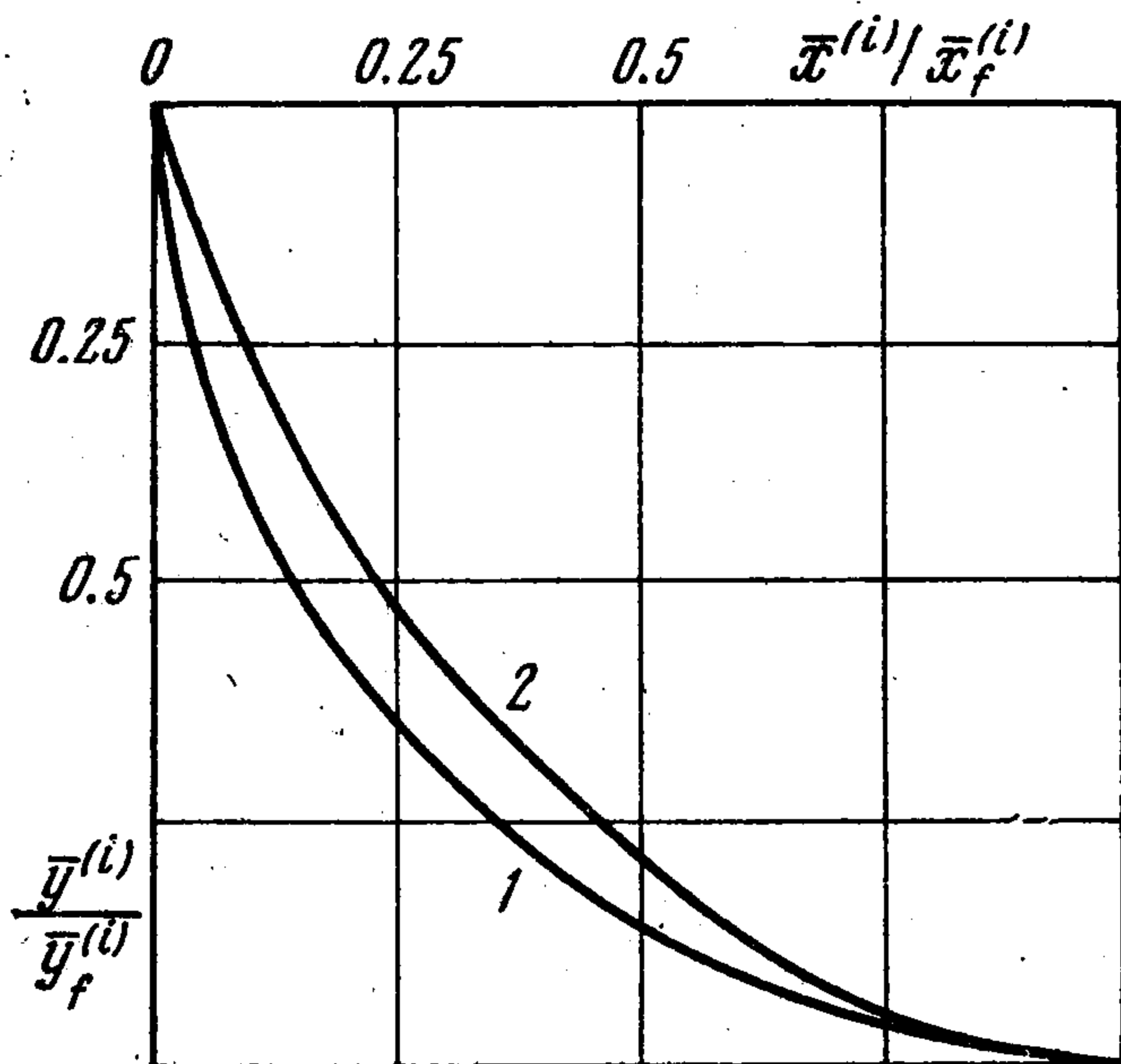
Рассмотрим некоторые семейства исходных контуров.

а) Пусть исходный контур представляет собой дугу окружности радиуса r с центром в точке $(r, 0)$; ее уравнение имеет вид

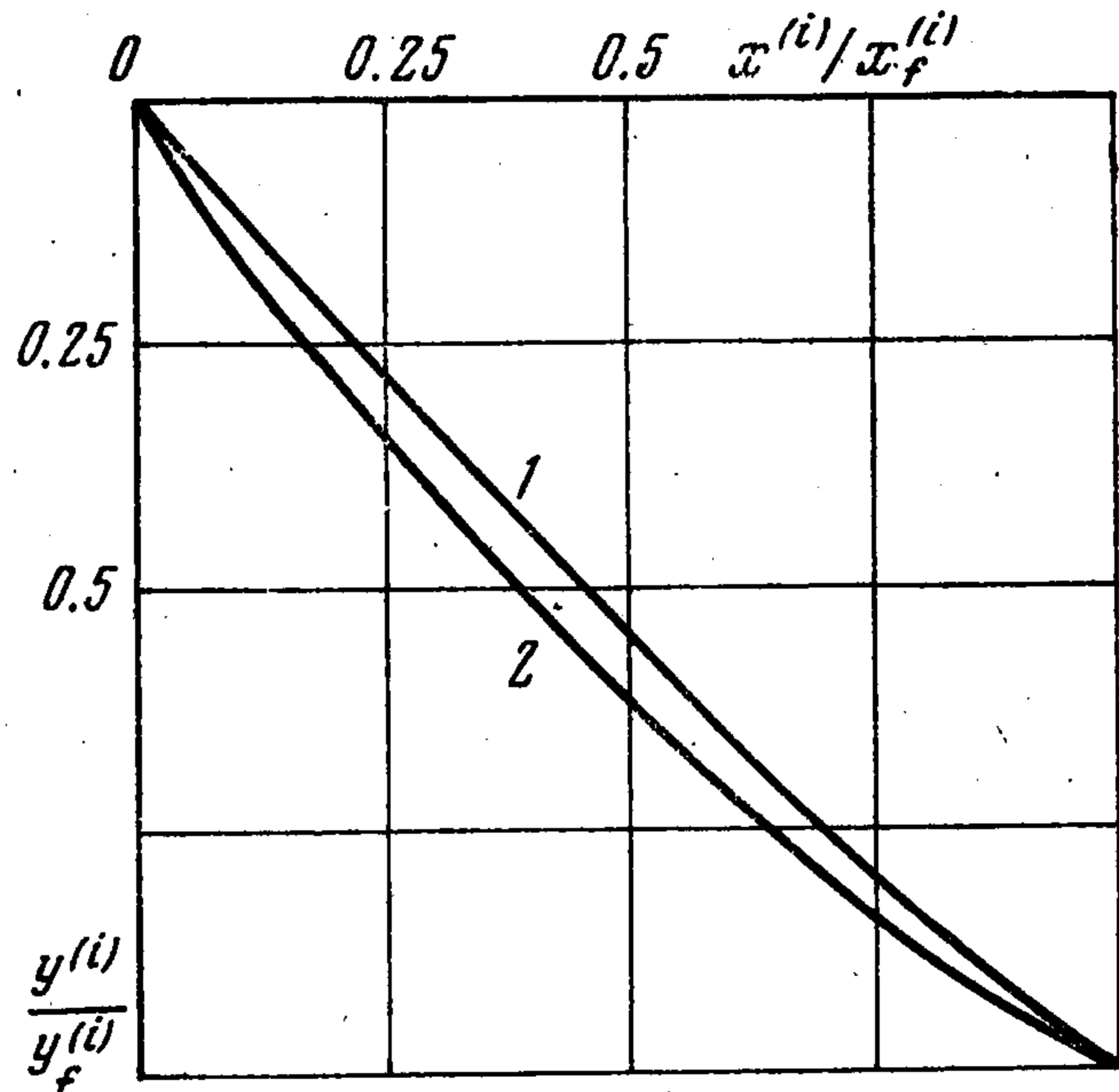
$$(4.6) \quad y^{(0)} = [r^2 - (r - x^{(0)})^2]^{1/2}$$

После подстановки выражения $\varphi(t) = y^{(0)}(x^{(0)})$ из (4.6) в (4.5) получаем уравнение соответственного контура

$$x_+^{(1)} = 2 - (1 + y_+^{(1)})^{1/2} [2 - (y_+^{(1)})^{1/2}] - \arcsin(1 - y_+^{(1)}) + 1/2 \pi \\ x_+^{(i)} = \frac{1}{r} x^{(i)}, \quad y_+^{(i)} = \frac{1}{r} y^{(i)}, \quad i = 0, 1, \quad y_{+f}^{(1)} = x_{+f}^{(0)} (2 - x_{+f}^{(0)})$$



Фиг. 2



Фиг. 3

На фиг. 2 изображен основной (1) контур ($x_{+f}^{(0)} = 1$) и соответственный (2) контур ($x_{+f}^{(1)} = 3.57$).

б) Исходный контур определяется уравнением

$$y^{(0)} = d \ln(x^{(0)} + 1), \quad d > 0$$

Как следует из второго соотношения (4.3), уравнение соответственного контура имеет вид

$$y^{(1)} = 2d \ln \left[1 + \frac{x^{(1)}}{2(1 + \sqrt{1 + d^2})} \right]$$

$$x_f^{(1)} = 2(x_f^{(0)} + \sqrt{(x_f^{(0)} + 1)^2 + d^2} - \sqrt{1 - d^2})$$

На фиг. 3 представлен основной (1) контур ($d = 1, x_f^{(0)} = 1$) и соответственный (2) контур ($x_f^{(1)} = 3.66$).

Поступила 27 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
2. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
3. Бунимович А. И. Соотношения между силами, действующими на тела, движущиеся в разреженном газе, в потоке света и в гиперзвуковом ньютоновском потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
4. Jaslow H. Nonaffine similarity laws inherent in newtonian impact theory. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 11, p. 2062—2064.
5. Schrello D. M. Approximate free molecule aerodynamic characteristics. ARS Journal, 1960, vol. 30, No. 8.