Прикладная математика и механика. Том. 37, 197

УД

К ЗАДАЧЕ О ТЕЧЕНИИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

О. М. Киселев, Л. М. Котляр

(Казань)

В точной нелинейной постановке исследуется задача о плоском установившемся течении идеальной весомой жидкости, ограниченном твердыми полигональными участками и двумя свободными поверхностями конечной протяженности. Доказывается однозначная разрешимость задачи при достаточно больших числах Фруда.

Разрешимость одной частной задачи рассматриваемого типа при некоторых упрощающих предположениях была ранее доказана в работе [1]. В работах [2–5] исследовались вопросы разрешимости задачи о течении весомой жидкости с одной свободной поверхностью.

1. В плоскости $z = x + iy$ рассматривается установившееся потенциальное течение несжимаемой весомой жидкости, граница которого состоит из твердых полигональных участков и свободных поверхностей AB и CD конечной протяженности. Течение может содержать изолированные гидродинамические особенности. На фиг. 1 изображена одна из возможных схем движения жидкости.

Пусть в плоскости вспомогательного комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ области течения конформно соответствует прямоугольник с вершинами $0, \pi / 2, \pi / 2 + \pi\tau / 2, \pi\tau / 2$ $(\tau = i|\tau|)$, причем свободным поверхностям соответствуют горизонтальные стороны прямоугольника (фиг. 2). Внутренность названного прямоугольника обозначим через D.

Производная от комплексного потенциала $dw / d\zeta$ в плоскости ζ легко строится по нулям и полюсам [6] (их число и кратность определяются схемой течения, их положение в замкнутой области $\bar{D}$ будем считать известным). Функция $dw / d\zeta$ — эллиптическая с периодами π, $\pi\tau$ и имеет вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = |\varphi_0| F(\zeta) = \varphi_0 \theta_1(2\zeta) \prod_m [\theta_1(\zeta - ia_m)\theta_1(\zeta + ia_m)]^{d_m} \times \tag{1.1}$$

$$\times \prod_n [\theta_2(\zeta - ib_n)\theta_2(\zeta + ib_n)]^{c_n} \times$$

$$\times \prod_k [\theta_1(\zeta - \zeta_k)\theta_1(\zeta + \zeta_k)\theta_1(\zeta - \bar{\zeta}_k)\theta_1(\zeta + \bar{\zeta}_k)]^{\varkappa_k}$$

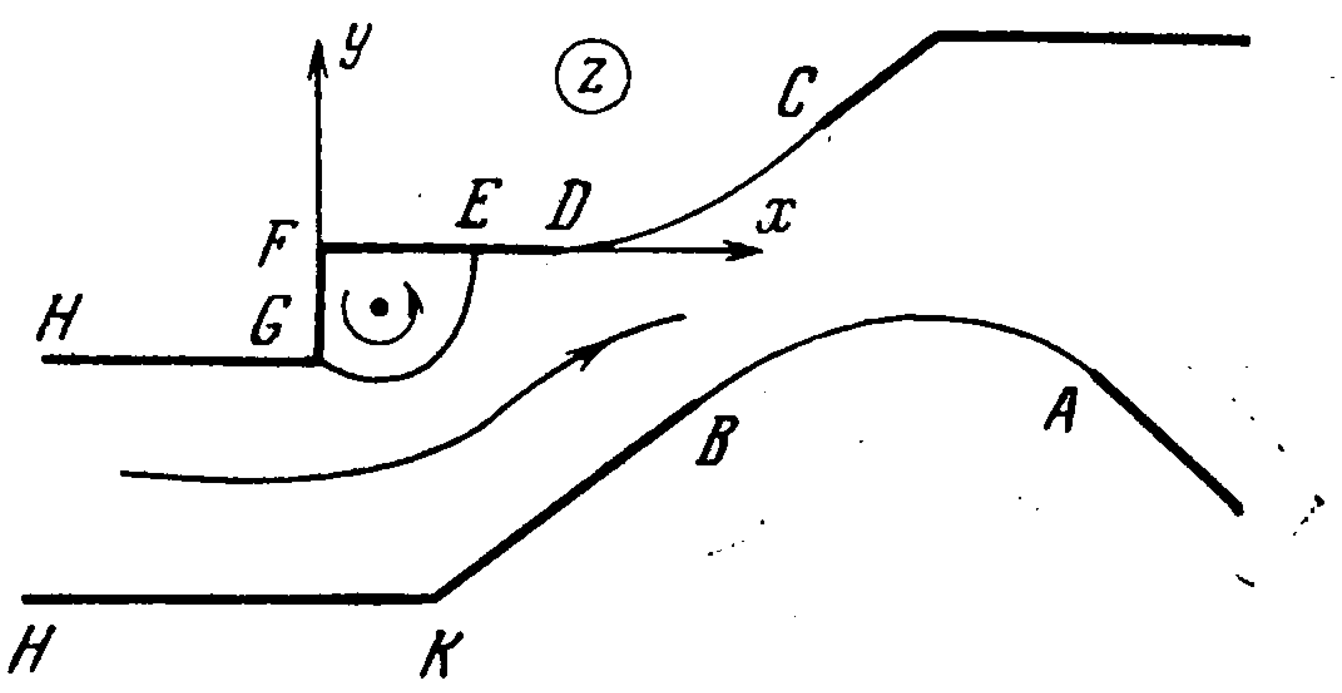
$$\Big(2 + \sum_m d_m + \sum_n c_n + 2\sum_k \varkappa_k = 0,\ a_m, b_n \in (0, \pi|\tau| / 2),\ \zeta_k \in D\Big)$$

Здесь φ_0 — константа, имеющая размерность потенциала скорости; $\theta_1(\zeta)$, $\theta_2(\zeta)$ — тэта-функции [7]; $d_m, c_n, \varkappa_k$ — целые числа, ζ_0 — образ бесконечно удаленной точки плоскости z, если он существует и лежит в D.

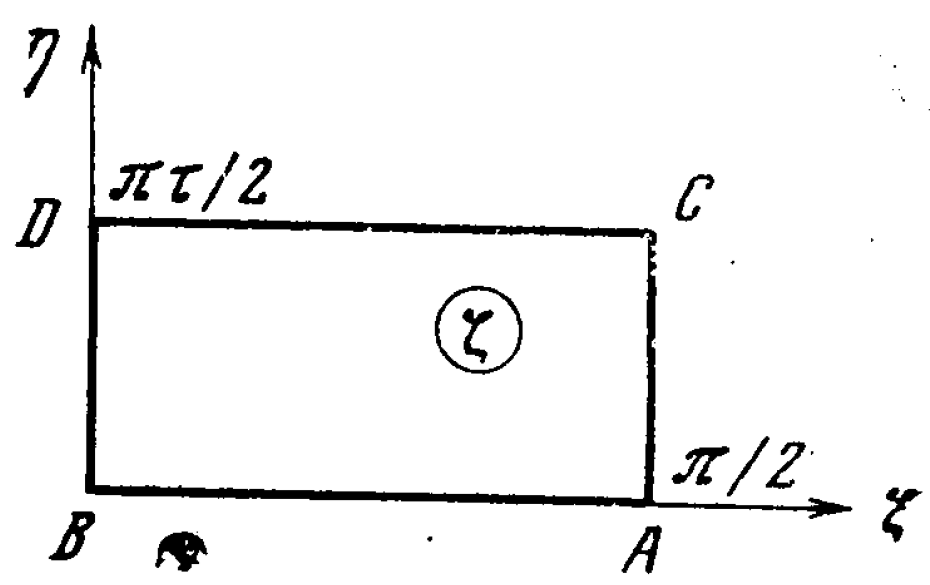
...рассмотрение функцию Жуковского

$$\chi(\zeta) = \ln\left(V_0 \frac{dz}{dw}\right) = r + i\theta, \quad r = \ln \frac{V_0}{V}$$

...десь V — модуль скорости, V_0 — значение V в точке A, θ — угол ...клона скорости к оси x.



Фиг. 1



Фиг. 2

Считая, что образы вершин полигона в плоскости ζ заданы, зная углы наклона звеньев полигона, а также положение и характер особых точек функции $\chi(\zeta)$, построим кусочно-постоянные функции $a(\eta)$, $b(\eta)$

(1.3) $\qquad a(\eta) = \theta(i\eta), \quad b(\eta) = \theta(\pi / 2 + i\eta)$

При этом будем приписывать функции $\theta(\zeta)$ те значения, которые она принимает, изменяясь непрерывно, при движении точки ζ по контуру $DBAC$ с обходом особых точек по дугам бесконечно малых окружностей. Согласно принятому правилу, для схемы, изображенной на фиг. 1, имеем: на DE $\theta = 0$, на EF $\theta = \pi$, на FG $\theta = 3\pi / 2$, на GH и HK $\theta = 2\pi$ и т. д.

Представим $\chi(\zeta)$ в виде суммы

(1.4) $\qquad \chi(\zeta) = \chi_0(\zeta) + f^*(\zeta)$

где $\chi_0(\zeta)$ — функция Жуковского для течения невесомой жидкости по рассматриваемой схеме, $f^*(\zeta)$ — функция, аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$. Граничные условия для $\chi_0(\zeta)$ имеют вид

(1.5)
$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\chi_0(\xi) = 0 \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \pi / 2)\\
&\operatorname{Im}\chi_0(i\eta) = a(\eta) \quad (0 \leqslant \eta \leqslant \pi|\tau| / 2)\\
&\operatorname{Im}\chi_0(\pi / 2 + i\eta) = b(\eta) \quad (0 \leqslant \eta \leqslant \pi|\tau| / 2)\\
&\operatorname{Re}\chi_0(\pi\tau / 2 + \xi) = r_1 \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \pi / 2)
\end{aligned}$$

(r_1 — константа, подлежащая определению).

Через α_j, β_l обозначим точки разрыва функций $a(\eta)$, $b(\eta)$ соответственно. Легко видеть, что производная $d\chi_0 / d\zeta$ в точках $\zeta = i\alpha_j$, $\pi / 2 + i\beta_l$, ζ_k $(k \neq 0)$ имеет полюсы первого порядка с вычетами, соответственно равными величинам

$$\delta_j = [a(\alpha_j + 0) - a(\alpha_j - 0)]\pi^{-1}, \quad \nu_l = [b(\beta_l - 0) - b(\beta_l + 0)]\pi^{-1}$$

и $-\varkappa_k$. Других особенностей в $\overline{D}$ $d\chi_0 / d\zeta$ не имеет.

Учитывая, что на сторонах прямоугольника $ABDC$ $\operatorname{Re}(d\chi_0 / d\zeta) = 0$, продолжим $d\chi_0 / d\zeta$ на всю плоскость ζ, пользуясь принципом симметрии. В результате получим эллиптическую функцию с периодами π, $\pi\tau$ Представим ее в виде линейной комбинации логарифмических производ ных тэта-функций (см. [7], стр. 350), затем интегрированием найдем $\chi_0(\zeta)$

$$\chi_0(\zeta) = \ln\left\{\prod_j \left[\frac{\theta_1(\zeta - i\alpha_j)}{\theta_1(\zeta + i\alpha_j)}\right]^{\delta_j} \prod_l \left[\frac{\theta_2(\zeta - i\beta_l)}{\theta_2(\zeta + i\beta_l)}\right]^{\nu_l}\right\} - \tag{1.6}$$
$$- \ln \prod_k^{k\neq 0} \left[\frac{\theta_1(\zeta - \zeta_k)\theta_1(\zeta + \bar\zeta_k)}{\theta_1(\zeta - \bar\zeta_k)\theta_1(\zeta + \zeta_k)}\right]^{\varkappa_k} + iA\zeta + iB$$

Вещественные постоянные A и B определяются из условий

$$\operatorname{Im}\chi_0(0) = a(0), \qquad \operatorname{Im}\chi_0(\pi / 2) = b(0)$$

которые приводятся к виду

$$-\pi\sum_j \delta_j + B = a(0) \tag{1.7}$$
$$\pi\sum_l \nu_l - 2\pi\sum_k^{k\neq 0} \varkappa_k + \frac{1}{2}\pi A + B = b(0)$$

Нетрудно убедиться, что при выполнении условий (1.7) функция $\chi_0(\zeta)$, выраженная формулой (1.6), имеет в $\bar D$ необходимые особенности и удовлетворяет граничным условиям (1.5), причем

$$r_1 = -2\sum_j \alpha_j\delta_j - 2\sum_l \beta_l\nu_l + 4\sum_k^{k\neq 0} \varkappa_k \operatorname{Im}\zeta_k - \frac{1}{2}A\pi|\tau|$$

2. Пусть ось y направлена вертикально вверх, тогда условия постоянства давления на каждой из свободных поверхностей с помощью дифференцирования можно привести к виду

$$e^{-3r}\frac{dr}{d\xi} = \frac{g}{V_0^3}\frac{d\varphi}{d\xi}\sin\theta \tag{2.1}$$

где g — ускорение силы тяжести, φ — потенциал скорости.

Учитывая равенства (1.1) — (1.5) и (2.1), для функции $f^*(\zeta)$ получим следующую краевую задачу:

(2.2) $\exp(-3\lambda^*_k)\, d\lambda_k^* / d\xi = \gamma\rho_k \sin(T_k + \mu_k^*)$ $(k = 0,1;\ 0 \leqslant \xi \leqslant \pi|\tau| / 2)$

(2.3) $\operatorname{Re} f^*(\pi / 2) = 0$

(2.4) $\operatorname{Im} f^*(i\eta) = \operatorname{Im} f^*(\pi / 2 + i\eta) = 0$ $(0 \leqslant \eta \leqslant \pi|\tau| / 2)$

Здесь

$$\gamma = g\,|\varphi_0| / V_0^3$$
$$T_k = \operatorname{Im}\chi_0(k\pi\tau / 2 + \xi), \qquad \rho_k = e^{3kr_1}F(k\pi\tau / 2 + \xi) \tag{2.5}$$
$$\lambda_k^* = \operatorname{Re} f^*(k\pi\tau / 2 + \xi), \quad \mu_k^* = \operatorname{Im} f^*(k\pi\tau / 2 + \xi)$$

Обозначив

$$3\operatorname{Re} f^*(\pi\tau / 2 + \pi / 2) = \mu_2^* \tag{2.6}$$

из условий (2.2), (2.3) найдем

$$d\lambda_k^* / d\xi = \gamma\rho_k \exp(k\mu_2^*)\sin(T_k + \mu_k^*) \times \tag{2.7}$$
$$\times \left[1 + 3\gamma\exp(k\mu_2^*)\int_\xi^{\pi/2}\rho_k \sin(T_k + \mu_k^*)\,d\xi\right]^{-1} \quad (k = 0.1)$$

Пусть $h(\xi)$, $h_0(\xi)$, $h_1(\xi)$ — вещественные функции, непрерывные на отрезке $[0, \pi / 2]$. Введем оператор K

$$K(h_0, h_1) = \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi/2} h_0(t)\ln\frac{\theta_1(\zeta - t)}{\theta_1(\zeta + t)}dt - \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi/2} h_1(t)\ln\frac{\theta_4(\zeta - t)}{\theta_4(\zeta + t)}dt \tag{2.8}$$

Нетрудно убедиться, что функция

$$f(\zeta) = K(h_0, h_1) \tag{2.9}$$

регулярна в D, непрерывна в $\bar{D}$ и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{Im} f(i\eta) = \operatorname{Im} f(\pi / 2 + i\eta) = 0 \quad (0 \leqslant \eta \leqslant \pi\,|\tau| / 2) \tag{2.10}$$
$$\frac{d}{d\xi}\operatorname{Re} f\left(\frac{k\pi\tau}{2} + \xi\right) = h_k(\xi) \quad \left(k = 0, 1;\ 0 \leqslant \xi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\operatorname{Re} f(\pi / 2) = 0$$

Используя обозначения

$$\lambda_k = \operatorname{Re} f(k\pi\tau / 2 + \xi), \quad \mu_k = \operatorname{Im} f(k\pi\tau / 2 + \xi) \tag{2.11}$$
$$\lambda_k' = d\lambda_k / d\xi \ (k = 0, 1), \quad \mu_2 = 3\operatorname{Re} f(\pi\tau / 2 + \pi / 2)$$

и операторы

$$D_0(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} h(t)\ln\left[\frac{\theta_1(\xi - t)}{\theta_1(\xi + t)}\right]^2 dt$$

$$D_1(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} h(t)\ln\left[\frac{\theta_4(\xi - t)}{\theta_4(\xi + t)}\right]^2 dt$$

$$D_2(h) = \frac{6}{\pi}\int_0^{\pi/2} h(t)\,t\,dt$$

из (2.8) и (2.9) получим соотношения

$$\mu_0 = D_0(\lambda_0') - D_1(\lambda_1'), \quad \mu_1 = D_1(\lambda_0') - D_0(\lambda_1') \tag{2.12}$$
$$\mu_2 = D_2(\lambda_1') - D_2(\lambda_0')$$

Пусть d — вещественное число. Введем операторы P_0 и P_1

$$P_k(h, d) = \gamma\rho_k\exp(kd)\sin(T_k + h) \times$$
$$\times\left[1 + 3\gamma\exp(kd)\int_\xi^{\pi/2}\rho_k\sin(T_k + h)\,d\xi\right]^{-1} \quad (k = 0, 1)$$

Учитывая (2.7), получим из (2.12) систему операторных уравнений для определения функций μ_0^*, μ_1^* и постоянной μ_2^*

$$
\begin{aligned}
(2.13)\qquad \mu_0 &= D_0(P_0(\mu_0, \mu_2)) - D_1(P_1(\mu_1, \mu_2))\\
\mu_1 &= D_1(P_0(\mu_0, \mu_2)) - D_0(P_1(\mu_1, \mu_2))\\
\mu_2 &= D_2(P_1(\mu_1, \mu_2)) - D_2(P_0(\mu_1, \mu_2))
\end{aligned}
$$

Пусть C — пространство функций, непрерывных в интервале $[0, \pi / 2]$, E — пространство вещественных чисел. Вводя банахово пространство

$$B = C \times C \times E = \{\nu = (\mu_0, \mu_1, \mu_2)\colon \mu_0, \mu_1 \in C, \mu_2 \in E\}$$

с нормой

$$\|\nu\|_B = \|\mu_0\|_C + \|\mu_1\|_C + \|\mu_2\|_E$$

и оператор A, определенный на B с помощью равенств

$$
\begin{aligned}
A(\nu) &= A_0(\nu) \times A_1(\nu) \times A_2(\nu)\\
(2.14)\qquad A_0(\nu) &= D_0(P_0(\mu_0, \mu_2)) - D_1(P_1(\mu_1, \mu_2))\\
A_1(\nu) &= D_1(P_0(\mu_0, \mu_2)) - D_0(P_1(\mu_1, \mu_2))\\
A_2(\nu) &= D_2(P_1(\mu_1, \mu_2)) - D_2(P_0(\mu_0, \mu_2))
\end{aligned}
$$

запишем систему (2.13) в виде операторного уравнения

$$(2.15)\qquad \nu = A(\nu)$$

3. Исследуем свойства введенных операторов.

Лемма. Операторы D_0, D_1 преобразуют пространство C в себя.

Пусть $h(\xi) \in C$, $\tau_0(\xi) = D_0(h(\xi))$. Рассмотрим разность $\tau_0(\xi) - \tau_0(\xi')$. Воспользовавшись разложением функции $\theta_1(\xi)$ в бесконечное произведение (см. [7], стр. 344) и равенствами (см. [8], стр. 56)

$$\ln(1 - q^{2n}e^{2i\xi}) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} q^{2nk}e^{2ik\xi} \quad (q = e^{i\pi\tau})$$

$$\ln\left|\frac{\sin(\xi - t)}{\sin(\xi + t)}\right| = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin 2k\xi \sin 2kt$$

([8], стр. 56), с помощью неравенства Коши—Буняковского и равенства Парсеваля получим

$$(3.1)\qquad |\tau_0(\xi) - \tau_0(\xi')| \leqslant \frac{2}{\pi}\|h\|_c \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} q^{4nk} |\sin 2k\xi - \sin 2k\xi'|^2\right\}^{1/2}$$

Ряд в правой части равенства (3.1) равномерно сходится и стремится к нулю при $\xi \to \xi'$, следовательно, $\tau_0(\xi) \in C$. Аналогичным образом доказывается справедливость леммы в отношении оператора D_1.

Подобно тому, как это делается в работах [1, 9], можно найти нормы операторов D_0 и D_1

$$\|D_0\|_C = d_0 = \frac{2}{\pi}\left\{G + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2q^{2n}}{1+q^{4n}}\right)^{2k-1}\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)(2k-1)!!}\right\} \tag{3.2}$$

$$\|D_1\|_c = d_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2q^{2n-1}}{1+q^{4n-2}}\right)^{2k-1}\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)(2k-1)!!}$$

(G — постоянная Каталана). Норма оператора D_2 вычисляется элементарно

$$\|D_2\|_E = 3\pi / 4 \tag{3.3}$$

Согласно (1.1) и (1.6), ρ_k, $T_k \in C$ ($k = 0, 1$) (заметим, что в случае, когда свободные поверхности содержат бесконечно удаленные точки, функция $dW / d\zeta$ имеет вид, отличный от (1.1) и $\rho_k \notin C$).

Если μ_0, $\mu_1 \in C$, $\mu_2 \in [0, r_2]$, то при

$$\gamma < \omega^{-1}e^{-r_2}, \quad \omega = 3\pi \max_{k=0,1} \|\rho_k\|_C \tag{3.4}$$

справедливы соотношения

$$P_k(\mu_k, \mu_2) \in C \quad (k = 0,1) \tag{3.5}$$

$$\|P_k(\mu_k, \mu_2)\|_C \leqslant \gamma\omega e^{r_2}(1 - \gamma\omega e^{r_2})^{-1}(3\pi)^{-1}$$

$$\|A_2(\nu)\|_E \leqslant {}^1/_2\, \gamma\omega e^{r_2}(1 - \gamma\omega e^{r_2})^{-1}$$

При

$$\gamma < 2r_2[\omega(1 + 2r_2)e^{r_2}]^{-1} \tag{3.6}$$

условие (3.4) выполняется, а из (3.5) получается оценка $\|A_2(\nu)\|_E < r_2$. С учетом леммы отсюда следует, что оператор A преобразует замкнутое множество $B_2 = C \times C \times [0, r_2]$ ($B_2 \subset B$) в себя.

Пусть $\nu' = (\mu_0', \mu_1', \mu_2') \in B_2$, $\nu'' = (\mu_0'', \mu_1'', \mu_2'') \in B_2$, а γ удовлетворяет условию (3.4). Тогда с помощью преобразований найдем, что при $k = 0,1$

$$\|P_k(\mu_k', \mu_2') - P_k(\mu_k'', \mu_2'')\|_C \leqslant \gamma\omega e^{r_2}[k\,\|\mu_2' - \mu_2''\|_E + (1 + 2\gamma\omega e^{r_2})\,\|\mu_k' - \mu_k''\|_C](1 - \gamma\omega e^{r_2})^{-2}(3\pi)^{-1} \tag{3.7}$$

Учитывая (3.2), (3.3) и (3.7), из (2.14) имеем

$$\|A(\nu') - A(\nu'')\|_B = \|A_0(\nu') - A_0(\nu'')\|_C + \|A_1(\nu') - A_1(\nu'')\|_C + \|A_2(\nu') - A_2(\nu'')\|_E \leqslant \alpha\,\|\nu' - \nu''\|_B$$

$$\alpha = \alpha(r) = \gamma\omega e^{r_2}(1 + 2\gamma\omega e^{r_2})(1 - \gamma\omega e^{r_2})^{-2}b^{-1}$$

$$b = 3\pi(3\pi / 4 + d_0 + d_1)^{-1}$$

причем нетрудно убедиться, что $\alpha < 1$, когда

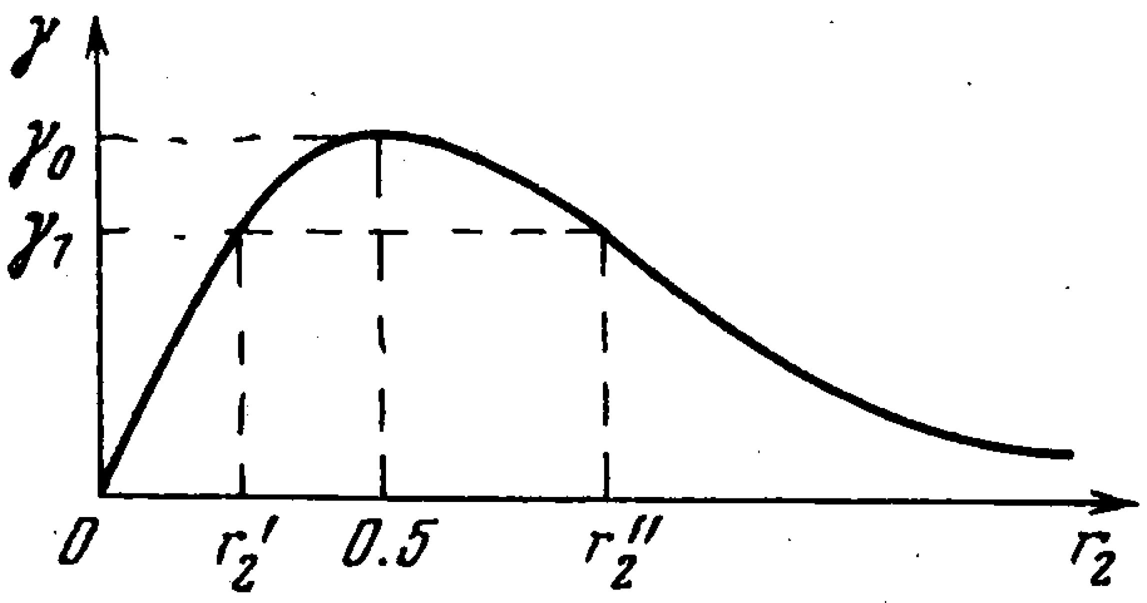
$$\gamma < \beta\omega^{-1}e^{-r_2}, \quad \beta = (2b + 1 - \sqrt{1 + 12b})(2b - 4)^{-1} \tag{3.8}$$

Поскольку $\beta < 1$, то при

$$\gamma < \varphi(r_2) = 2\beta r_2[\omega(1 + 2r_2)e^{r_2}]^{-1}$$

неравенства (3.4), (3.6) и (3.8) одновременно выполняются. При этом оператор A удовлетворяет условиям применимости принципа сжатых отображений.

Кривая $\gamma = \varphi(r_2)$ $(0 \leqslant r_2 < \infty)$ (фиг. 3) проходит через начало координат и асимптотически приближается к оси абсцисс при $r_2 \to \infty$. При $r_2 = {}^1/_2$ функция $\varphi(r_2)$ имеет единственный максимум $\varphi({}^1/_2) = ({}^1/_2\, \beta / \omega)\, e^{-1/2} = \gamma_0$. Каждая прямая $\gamma = \gamma_1 < \gamma_0$ пересекает кривую $\gamma = \varphi(r_2)$ в двух точках с абсциссами, равными соответственно $r_2' = r_2'(\gamma_1)$ и $r''_2 = r_2''(\gamma_1)$ $(r_2' < {}^1/_2 < r_2'')$.



Фиг. 3

С помощью принципа сжатых отображений формулируется следующая теорема.

Теорема 1. При $\gamma < \gamma_1 < \gamma_0$ в пространстве $B_2' = C \times C \times [0, r_2']$ существует решение $\nu^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \mu_2^*)$ уравнения (2.15). В пространстве $B_2'' = C \times C \times [0, r_2'']$ $(B_2' \subset B_2'')$ это решение является единственным. Решение может быть найдено методом последовательных приближений по схеме

$$(3.9) \qquad \nu^{(n)} = A(\nu^{(n-1)}) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

при любом начальном приближении $\nu^{(0)} \in B_2'$. Оценка погрешности n-го приближения дается формулой

$$(3.10) \qquad \|\nu^* - \nu^{(n)}\|_B \leqslant \frac{\alpha_1^n}{1-\alpha_1} \|\nu^{(0)} - A(\nu^{(0)})\|_B, \quad \alpha_1 = \alpha(r_2^1), \quad \nu^{(0)} \in B_2^1$$

4. Если $\nu^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \mu_2^*)$ — решение уравнения (2.15), принадлежащее пространству B, то, как нетрудно убедиться, функция

$$(4.1) \qquad f^*(\zeta) = K(P_0(\mu_0^*, \mu_2^*), P_1(\mu_1^*, \mu_2^*))$$

является решением краевой задачи (2.2) — (2.4). Справедливо и обратное утверждение: если функция $f^*(\zeta)$ решает краевую задачу (2.2) — (2.4), а величины $\mu_0^*, \mu_1^*, \mu_2^*$ определены равенствами (2.5), (2.6), то $\nu^* = (\mu_0^*, \mu_1^*, \mu_2^*)$ является решением уравнения (2.15), причем $\nu^* \in B$. Поэтому краевая задача (2.2) — (2.4) не имеет решений, отличных от тех, которые определяются через решение уравнения (2.15) по формуле (4.1).

Пусть $\nu^{(n-1)} = (\mu_0^{(n-1)}, \mu_1^{(n-1)}, \mu_2^{(n-1)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Введем обозначения

$$(4.2) \qquad \begin{gathered} f^{(n)}(\zeta) = K(P_0(\mu_0^{(n-1)}, \mu_2^{(n-1)}), P_1(\mu_1^{(n-1)}, \mu_2^{(n-1)})) \\ \lambda_k^{(n)} = \operatorname{Re} f^{(n)}(k\pi\tau/2 + \xi), \quad \lambda_k'^{(n)} = d\lambda_k^{(n)}/d\xi \quad (k = 0, 1) \end{gathered}$$

Учитывая (2.9) — (2.12), описывающие свойства оператора K, имеем

$$(4.3) \qquad \begin{gathered} \operatorname{Re} f^{(n)}(\pi/2) = 0, \quad \lambda_k'^{(n)} = P_k(\mu_k^{(n-1)}, \mu_2^{(n-1)}) \quad (k = 0,1) \\ \operatorname{Im} f^{(n)}(\xi) = D_0(P_0(\mu_0^{(n-1)}, \mu_2^{(n-1)})) - D_1(P_1(\mu_1^{(n-1)}, \mu_2^{(n-1)})) \\ \operatorname{Im} f^{(n)}\left(\frac{\pi\tau}{2} + \xi\right) = D_1(P_0(\mu_0^{(n-1)}, \mu_2^{(n-1)})) - D_0(P_1(\mu_1^{(n-1)}, \mu_2^{(n-1)})) \\ 3\operatorname{Re} f^{(n)}\left(\frac{\pi\tau}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = D_2(P_1(\mu_1^{(n-1)}, \mu_2^{(n-1)})) - D_2(P_0(\mu_0^{(n-1)}, \mu_2^{(n-1)})) \end{gathered}$$

При учете соотношений (3.9), (2.14) отсюда получим

$$\operatorname{Im} f^{(n)}(k\pi\tau / 2 + \xi) = \mu_k^{(n)} \qquad (k = 0,1)$$
$$3\operatorname{Re} f^{(n)}(\pi\tau / 2 + \pi / 2) = \mu_2^{(n)}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\max \zeta \in \overline{D} \, | f^*(\zeta) - f^{(n)}(\zeta) | \leqslant \leqslant \max k = 0, 1 (\| \lambda_k^* - \lambda_k^{(n)} \|_C + \| \mu_k^* - \mu_k^{(n)} \|_C) \tag{4.4}$$

причем $(k = 0,1)$

$$\| \lambda_k^* - \lambda_k^{(n)} \|_C \leqslant \frac{k}{3} \| \mu_2^* - \mu_2^{(n)} \|_E + \frac{\pi}{2} \| \frac{d\lambda_k^*}{d\xi} - \lambda_k'^{(n)} \|_C \tag{4.5}$$

Используя соотношения (2.7), (4.3), (3.2), (3.3), (3.7), из (4.4) и (4.5), при $\nu_0 \in B_2'$, $\gamma < \gamma_1 < \gamma_0$
найдем

$$\max \zeta \in \overline{D} \, | f^*(\zeta) - f^{(n)}(\zeta) | \leqslant \alpha_1 \| \nu^* - \nu^{(n-1)} \|_B$$

С учетом (3.10) отсюда получим

$$\max \zeta \in \overline{D} \, | f^*(\zeta) - f^{(n)}(\zeta) | \leqslant \frac{\alpha_1^n}{1 - \alpha_1} \| \nu^{(0)} - A(\nu^{(0)}) \|_B \tag{4.6}$$

Обозначим через $M(r_2)$ класс функций $f(\zeta)$, аналитических в D, непрерывных в $\overline{D}$ и таких, что

$$3\operatorname{Re} f\left(\frac{\pi\tau}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant r_2, \quad \frac{d}{d\xi} \operatorname{Re} f\left(\frac{k\pi\tau}{2} + \xi\right) \in C \quad (k = 0, 1)$$

Пользуясь полученными результатами, можно сформулировать следующую основную теорему.

Теорема 2. При $\gamma < \gamma_1 < \gamma_0$ решение краевой задачи (2.2) — (2.4) существует в классе $M(r_2')$, причем в классе $M(r_2'')$ это решение единственно. Решение может быть найдено методом последовательных приближений по формулам (4.2), (3.9) при любом $\nu^{(0)} \in B_2'$. Оценка погрешности n-го приближения дается формулой (4.6).

Зная $f^*(\zeta)$, из формул (1.1), (1.2), (1.4) и (1.6) можно найти любые геометрические и кинематические характеристики течения. Уравнение Бернулли дает возможность определить динамические характеристики.

Поступила 13 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишневский В. А., Котляр Л. М., Терентьев А. Г.* Влияние сил тяжести в задаче о кавитационном обтекании препятствий. В сб.: Вопросы прикладной математики и механики, вып. 3. Чебоксары, Изд-во Чувашск. ун-та, 1973.
2. *Пыхтеев Г. Н.* Некоторые методы решения одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения теории струй идеальной жидкости. ПМТФ, 1966, № 2.
3. *Пыхтеев Г. Н.* О двух методах решения одной нелинейной краевой задачи теории струй тяжелой жидкости. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 2. Новосибирск, «Наука», 1969.
4. *Пыхтеев Г. Н.* Решение одной нелинейной краевой задачи теории струй тяжелой жидкости в особом случае. Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук, 1971, № 2.
5. *Киселев О. М.* Об одной задаче теории струй тяжелой жидкости. Тр. Семинара по краевым задачам, вып. 9. Изд-во Казанск. ун-та, 1972.
6. *Гуревич М. И.* Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
7. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
8. *Некрасов А. И.* Собрание соч., т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1961.
9. *Секерж-Зенькович Я. И.* К общей задаче обтекания криволинейной дуги с отрывом струй. Докл. АН СССР, 1935, т. 3, № 4.