

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ СНЕЖНОЙ ЛАВИНЫ ПО СКЛОНУ С ПЛАВНО МЕНЯЮЩИМИСЯ СВОЙСТВАМИ

А. Г. Куликовский, М. Э. Эглит

(Москва)

Для описания движения лавины используются «гидравлические» модели, один из вариантов которой для одномерного движения был предложен в [1]. В [2] было построено асимптотическое решение при $t \rightarrow \infty$ уравнений, предложенных в [1] для случая склона постоянной крутизны с однородным снежным покровом.

Ниже исследуется асимптотическое поведение решения двумерной задачи о движении снежной лавины по склону переменной крутизны, на котором лежит снег с переменными свойствами. Предполагается, что характерный линейный масштаб изменения этих величин достаточно велик.

1. Постановка задачи. Уравнения двумерного движения снежной лавины, аналогичные предложенным в [1,2] для одномерного случая, запишем в виде

$$(1.1) \quad dh/dt + h \operatorname{div} v = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{2h} \operatorname{grad} (h^2 \cos \psi) + eg \sin \psi - F(v, h, x, y) v$$

Здесь v — средняя по толщине снега скорость, h — толщина слоя движущегося снега, ψ — угол между горизонтальной плоскостью и касательной плоскостью к склону в рассматриваемой точке, e — вектор, лежащий в касательной плоскости и задающий направление наибольшего спуска, $F(v, h, x, y) v$ — рассчитанная на единицу массы сила трения, t — время, x, y — некоторые координаты на поверхности склона, а операции div и grad берутся на поверхности склона. В работах [1, 2] использовалось выражение для силы трения, которое можно записать в виде

$$(1.3) \quad F(v, h, x, y) v = \mu g \cos \psi \frac{v}{|v|} + k \frac{|v| v}{h}$$

Здесь μ — коэффициент «сухого» трения, k — коэффициент гидравлического трения.

Уравнения (1.1), (1.2) будут применяться только в области, где снег движется. На переднем фронте лавины, т. е. на границе, разделяющей покоящийся и движущийся снег, будем предполагать выполненными соотношения, выражающие сохранение массы и импульса, и аналогичные использованным в [1, 2]

$$(1.4) \quad \begin{aligned} h(w_n - v_n) &= h_0 w_n \\ \rho h_0 w_n v &= 1/2 \rho g h^2 \cos \psi n - \sigma^* h \end{aligned}$$

Здесь w_n — скорость движения фронта (по нормали), v_n — скорость снега за фронтом, ρ — плотность движущегося снега, которая предполагается равной плотности снега, лежащего впереди лавины, σ^* — критическое напряжение, при котором происходит разрушение структуры покоящегося снега.

Будем называть поверхность разрыва, описываемую соотношениями (1.4), фронтом разрушения. Примем, что на фронте разрушения

$$(1.5) \quad \sigma^* = \sigma^* n$$

Тогда второе уравнение (1.4) дает

$$\rho h_0 w_n v_n = 1/2 \rho g h^2 \cos \psi - \sigma^* h_0, \quad v_\tau = 0$$

При естественных предположениях относительно свойств снега и процесса его разрушения должно выполняться соотношение

$$(1.6) \quad \sigma^* h_0 \geq 1/2 \rho g h_0^2 \cos \psi$$

причем равенство может иметь место только для случая, когда снег перед фронтом ведет себя как жидкость. При движении лавины могут образовываться также поверхности разрыва внутри лавины. Будем считать, что на этих поверхностях выполняются такие же условия, как на гидравлических прыжках

$$(1.7) \quad \begin{aligned} h^+ (w_n - v_n) &= h^- (w_n - v_n^-) \\ h^+ (w_n - v_n^+) v_n^+ - h^- (w_n - v_n^-) v_n^- &= \\ &= g \left(\frac{h^{+2}}{2} - \frac{h^{-2}}{2} \right) \cos \psi \quad v_\tau^+ = v_\tau^- \end{aligned}$$

Здесь индексы минус и плюс означают, как обычно, что соответствующая величина берется перед или за поверхностью разрыва.

Обозначим через L^* расстояние, на котором величины, характеризующие свойства склона и снежного покрова, изменяются на существенную часть своей величины. Обозначим через L и T характерный масштаб и характерное время изменения решения, причем, как обычно, можно считать, что $T = L / v^*$, где v^* — характерная скорость лавины. Очевидно, что $L \ll L^*$. Отношения левой части уравнения (1.2) к силе трения имеет порядок величины v^* / FL , а отношение первого члена в правой части к силе трения имеет порядок $hg \cos \psi / Fv^* L$. При достаточно большом значении L , именно при

$$(1.8) \quad L \gg \max \left(\frac{v^*}{F}, \frac{gh \cos \psi}{Fv^*} \right)$$

дифференциальными членами в уравнении (1.2) можно пренебречь. Уравнения, полученные таким образом, будем называть упрощенными. Они описывают крупномасштабные движения.

Для случая, когда $F(v, h, x, y)$ выражается формулой (1.3), условие, когда можно пренебречь дифференциальными членами, может быть записано в виде

$$(1.9) \quad L \gg \max \left(\frac{h^*}{k}, \frac{h^*}{\operatorname{tg} \psi - \mu} \right)$$

где h^* — характерная глубина снега в лавине, равная по порядку величины начальной глубине снега. Пренебрежение дифференциальными членами в уравнении (1.2) при построении асимптотического решения проводилось ранее в работе [2] при изучении движения снега и в [3] при изучении движения слоя жидкости.

Использование упрощенной системы для описания движения на длинных плавно меняющихся склонах возможно при условии, что движение с медленно меняющимися параметрами устойчиво, так как в противном случае могут появиться возмущения с характерным линейным размером, не удовлетворяющим условию (1.8). Однако если представляют интерес не мелкомасштабные возмущения, а только осредненные характеристики движения, то можно (как это делается при изучении турбулентных движений) использовать те же уравнения (1.1), (1.2) с другой силой трения Fv , зависящей от средних v и h . Для такого осредненного движения по склону с большим L^* условие (1.8), очевидно, будет выполняться.

Будем считать, что условие (1.8) выполняется через достаточно большое время после начала движения почти по всей области, занятой движущейся лавиной, за исключением узкой области, непосредственно примыкающей к переднему фронту лавины (фронту разрушения), и, может быть, некоторых узких областей во внутренней части лавины. С точки зрения больших масштабов эти узкие области быстрого изменения параметров движущегося снега можно заменять поверхностями разрыва.

2. Общее решение упрощенной системы. Решая уравнение (1.2) с выброшенными дифференциальными членами относительно v , имеем

$$(2.1) \quad v = V(h, x, y) e$$

Таким образом, скорость направлена по линии наибольшего спуска. Поэтому решение для всего склона можно получить, разбивая его на узкие полоски линиями наибольшего спуска и рассматривая движение внутри каждой полоски.

Будем дальше обозначать через x расстояние вдоль какой-нибудь полоски и через $S(x)$ — ширину этой полоски. Тогда из уравнений (1.1) и (2.1) получим

$$(2.2) \quad \frac{\partial Sh}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [ShV(h, x)] = 0$$

Уравнения характеристик для этого уравнения имеют вид

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial}{\partial h} [hV(h, x)] \\ \frac{dh}{dt} &= -h \left(\frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{d \ln S}{dx} \right) \end{aligned}$$

Если для силы трения в движущейся лавине принимается выражение (1.3), то соотношение (2.1), связывающее скорость и глубину снега, и уравнения (2.3) соответственно записываются в виде

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{h} f(x) e, & \frac{dx}{dt} &= \frac{3}{2} f \sqrt{h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{h^{3/2}}{S} \frac{d(Sf)}{dx} \\ f(x) &= \sqrt{g(\sin \psi - \mu \cos \psi) / k} \end{aligned}$$

В этом случае уравнения (2.3) интегрируются и дают

$$(2.4) \quad h = C (Sf)^{-2/3}, \quad t = \frac{2}{3 \sqrt{C}} \int_{x_0}^x \frac{S^{1/3}}{f^{2/3}} dx + t_0$$

Здесь C, x_0, t_0 — константы вдоль характеристики. Используя начальные и граничные условия, можно исключить C, x_0, t_0 из соотношений (2.4) и получить решение в виде $h = h(x, t), v = f \sqrt{h} = v(x, t)$.

В частности, область начального возмущения, из которого развивается лавина, во многих случаях, с точки зрения больших масштабов, можно считать малой и заменять внутри каждой полоски между двумя линиями наибольшего спуска точкой ($x_0 = 0, t_0 = 0$), выше которой снег остается неподвижным. Из этой точки выходит пучок характеристик (волна разрежения). Если $V(h) + h \partial V / \partial h > 0$ для всех $h > 0$, то на последней характеристике естественно задать условие $h = 0$. Распределение h и v в волне разрежения, выходящей из одной точки, полученное с помощью (2.4), имеет вид

$$h = \frac{4}{9} \frac{\varphi^2(x)}{t^2}, \quad v = \frac{2}{3} \frac{f(x) \varphi(x)}{t}$$

$$\varphi(x) = (Sf)^{-1/3} \int_0^x \frac{S^{1/3}}{f^{2/3}} dx$$

3. Граничные условия для упрощенной системы. Условия на поверхности разрыва. Граничными условиями при построении крупномасштабного решения служат условия на границах узких зон резкого изменения параметров движущегося снега или на заменяющих эти зоны поверхностях разрыва.

Одним из условий на поверхности разрыва является условие сохранения массы, которое следует из (1.1), (1.4), (1.7), (2.1) и может быть записано в виде

$$(3.1) \quad w = [hV(h) - h_0V(h_0)] / (h - h_0)$$

$$(3.2) \quad w = hV(h) / (h - h_0)$$

для внутренних разрывов и для разрыва, которым моделируется узкая зона, примыкающая к переднему фронту лавины (фронту разрушения) соответственно.

Здесь w — скорость разрыва вдоль линии наибольшего спуска, $w = w_n / \cos \theta$, θ — угол между нормалью к поверхности разрыва и направлением наибольшего спуска, h и h_0 — глубины снега соответственно за и перед разрывом. Условия (3.1) и (3.2) находятся в соответствии с уравнением (2.2), которое также выражает сохранение массы.

Если изобразить график функции $hV(h)$ (фиг. 1), то выражения (3.1) и (3.2) для скорости разрыва w можно трактовать как тангенс угла наклона секущей, которая в первом случае проходит через точку с координатами $h_0, h_0V(h_0)$, а во втором — через точку с координатами $h_0, 0$. Согласно (2.3), скорость распространения характеристик крупномасштабного дви-

жения равна тангенсу угла наклона касательной к графику $hV(h)$. Будем предполагать, что эта величина — монотонно растущая функция h . Тогда график функции $hV(h)$ обращен выпуклостью вниз и имеет вид, изображенный на фиг. 1.

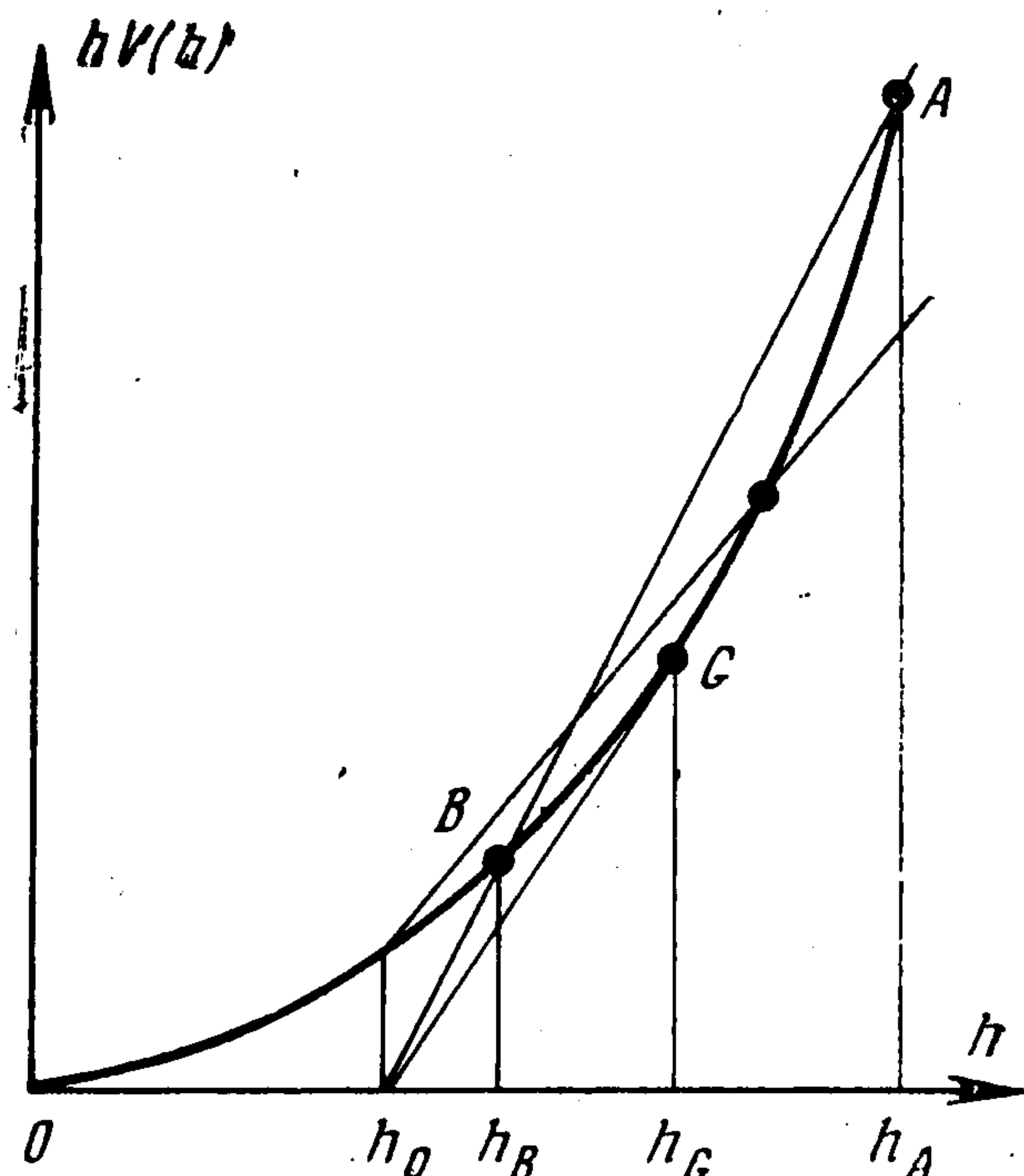
Из фиг. 1 видно, что если $h > h_0$, то для внутренних разрывов выполняется неравенство

$$(3.3) \quad a(h_0) \leq w \leq a(h), \quad a(h) \equiv d/dh [hV(h)]$$

причем равенство может иметь место только при $h = h_0$. Каждому $h \geq h_0$ соответствует значение $w(h)$, причем $w(h)$ — монотонно растущая функция. Как будет следовать [из дальнейшего, разрывам с $h < h_0$ не соответствуют решения, представляющие их структуру. Поэтому такие разрывы рассматриваться не будут. Кроме того, при $h < h_0$ знаки неравенств в (3.3) изменятся на противоположные, и если не выставить дополнительных условий (трех), то такой разрыв будет неэволюционным [4].

Отметим на фиг. 1 точку G , в которой луч, проведенный из точки $h_0, 0$, касается кривой $hV(h)$. Видно, что

$$(3.4) \quad \begin{aligned} w_G = w(h_G) = a(h_G), \quad w \geq w_G \\ w < a(h), \quad h > h_G; \\ w > a(h), \quad h < h_G \end{aligned}$$



Фиг. 1

Заметим, что если единственным условием на поверхности разрыва является (3.2), то передний фронт при $h < h_G$ будет неэволюционным разрывом. Однако для некоторых случаев будет найдено дополнительное условие, которое должно выставляться при $h < h_G$. Если отказаться от предположения, что $a(h)$ — монотонная функция, то будут возможны внутренние разрывы с уменьшением h .

Рассмотрим движение в узкой зоне, соответствующей разрыву крупномасштабного решения. Параметры склона внутри этой зоны можно считать постоянными, а движение предположить одномерным и стационарным в системе координат ξ, η , движущейся вместе с передним фронтом со скоростью $w_n = w \cos \theta$. Уравнения (1.1), (1.2) в этом случае принимают вид

$$(3.5) \quad \begin{aligned} h(w_n - u) &= Q \\ (u - w_n) \frac{du}{d\xi} + g \cos \psi \frac{dh}{d\xi} &= g \sin \psi \cos \theta - F(\sqrt{u^2 + v^2}, h) u \\ (u - w_n) \frac{dv}{d\xi} &= g \sin \psi \sin \theta - F(\sqrt{u^2 + v^2}, h) v \end{aligned}$$

Здесь u, v — проекции абсолютной скорости соответственно на ось ξ , направленную по нормали к переднему фронту вниз по движению, и ось

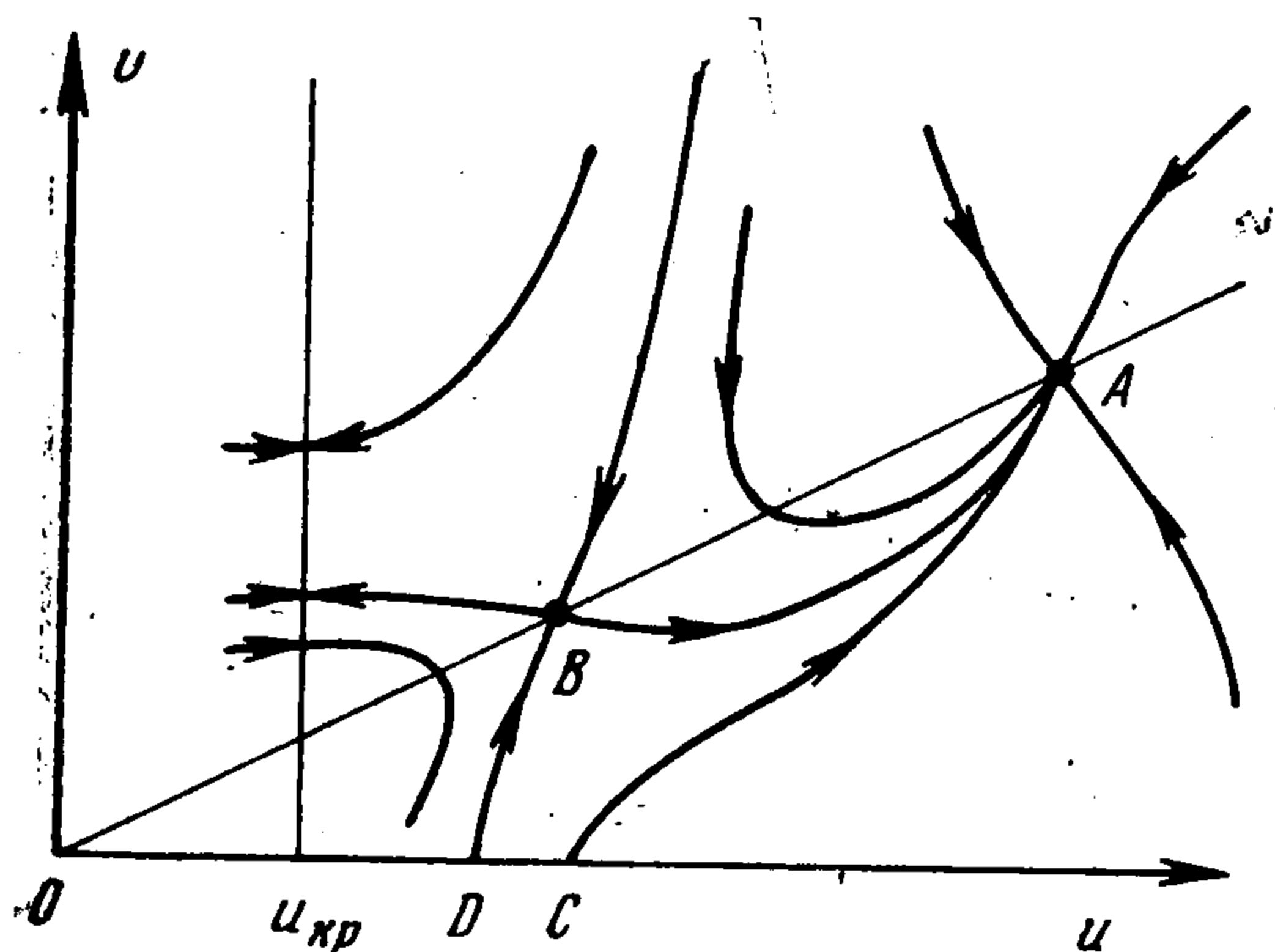
η , направленную по касательной, Q — поток массы снега, разделенный на его плотность. В зоне, примыкающей к фронту разрушения, $Q = h_0 w_n$; в зоне, соответствующей внутреннему разрыву, $Q = h_0 (w_n - u_0)$.

Исключая h с помощью первого уравнения (3.5), получим систему двух уравнений для $u(\xi)$, $v(\xi)$. Решение $u(\xi)$, $v(\xi)$, представляющее структуру переднего фронта лавины, должно начинаться фронтом разрушения и заканчиваться в одной из особых точек этой системы, где $du/d\xi = 0$, $dv/d\xi = 0$. Структура внутреннего разрыва представляет переход из одной особой точки в другую. Компоненты скорости, соответствующие особым точкам системы (3.5), определяются соотношениями

$$v/u = \operatorname{tg} \theta \equiv \delta$$

$$u(1 + \delta^2) F\left(u \sqrt{1 + \delta^2}, \frac{Q \sqrt{1 + \delta^2}}{w - u \sqrt{1 + \delta^2}}\right) = g \sin \psi$$

Соответствующее уравнение для определения величины h в особых точках может быть, очевидно, записано в виде (3.1) или (3.2). Исследование,



Фиг. 2

проведенное выше с помощью соотношений (3.1) и (3.2), показывает, что если $a(h)$ — монотонно возрастающая функция h , то существует (в зависимости от величины w) не более двух особых точек системы (3.5) (точки A и B на фиг. 2), причем

$$(3.6) \quad a(h_B) \leq w \leq a(h_A)$$

Отметим еще на плоскости u, v «критическую» прямую

$$u = u_{кр} \equiv w_n - \sqrt[3]{Qg \cos \psi}$$

на которой $w_n - u = \sqrt{gh \cos \psi}$. Непрерывный переход через эту прямую при монотонном изменении ξ невозможен, так как при переходе через нее производная от u по ξ , вообще говоря, меняет знак. Переход через критическую прямую возможен только скачком (1.4), (1.5) или (1.7), который всегда происходит с увеличением u и h [2].

Тип особых точек A и B может быть найден непосредственно из уравнений (3.5) или с помощью теоремы, доказанной в [5].

Известно [6], что если движение с постоянными параметрами, удовлетворяющими как полной, так и упрощенной системе, устойчиво (что и предполагается), то характеристики упрощенной системы не могут обогнать характеристики полной системы. Поэтому в особых точках выполняется неравенство

$$(3.7) \quad u + \sqrt{gh \cos \psi} \geq a \cos \theta$$

Из работы [2] следует, что для силы трения, заданной равенством (1.3), неравенство (3.7) эквивалентно неравенству $\operatorname{tg} \psi - \mu < 4k / \cos^2 \theta$.

Из (3.6) и (3.7) видно, что особая точка A всегда лежит правее критической прямой $u = u_{кр}$ и представляет собой узел или фокус с интегральными кривыми, входящими в нее при $\xi \rightarrow -\infty$ (см. фиг. 2). Тип особой точки B зависит от ее положения относительно прямой $u = u_{кр}$. Если она лежит левее этой прямой, т. е. если

$$(3.8) \quad w_n > u_B + \sqrt{gh_B \cos \psi}$$

то точка B — узел или фокус с входящими интегральными кривыми, если же точки A и B расположены по одну сторону от прямой $u = u_{кр}$, т. е. если неравенство (3.8) имеет обратный знак, то точка B — седло.

Для внутренних разрывов всегда существует решение полной системы, начинающееся в точке B и кончающееся в точке A , описывающее их структуру. Это решение при выполнении неравенства (3.8) начинается скачком, определяемым условиями (1.7), а при обратном знаке неравенства (3.8) является непрерывным.

Рассмотрим теперь подробнее структуру переднего фронта лавины. Соответствующее решение системы (3.5) начинается фронтом разрушения заканчивается в точке A или в точке B . В первом случае будем говорить, что передний фронт имеет тип A , а во втором — тип B .

Из соотношений (1.4), (1.5) видно, что непосредственно за фронтом разрушения точка (u, v) лежит на оси u (точка C на фиг. 2), причем при условии (1.6) всегда

$$(3.9) \quad w_n < u_C + \sqrt{gh_{CC} \cos \psi}, \quad u_C > u_{кр}$$

Если $u_B < u_{кр}$, то в силу (3.9) искомое решение изображается интегральной кривой, идущей в точку A . Переход в точку B сопровождался бы переходом через критическую прямую с уменьшением u и h , что невозможно. Пусть точка B — седло. Рассмотрим интегральную кривую, входящую в точку B .

На этой интегральной кривой может существовать точка (точка D на фиг. 2), в которой $v = 0$. Если такой точки нет, то решение, описывающее структуру рассматриваемого разрыва, может заканчиваться только в точке A . Если точка D существует, то при $u_C > u_D$ решение заканчивается в точке A , при $u_C < u_D$ решение, представляющее структуру переднего фронта лавины, не существует и при $u_C = u_D$ решение заканчивается в точке B . Условие

$$(3.10) \quad u_C = u_D$$

представляет собой дополнительное соотношение, которое должно выполняться на разрывах типа B .

Величины u_C и u_D могут быть выражены через скорость фронта w и параметры склона и снега. Поэтому условие (3.10) можно рассматривать как уравнение для w . Его решение, если оно существует, может быть записано в виде функции от параметров снега и склона в месте нахождения фронта и величины δ , характеризующей угол наклона фронта к линии наибольшего спуска

$$(3.11) \quad w = w^*(\psi, \dots, \delta)$$

Задача нахождения явного вида соотношения (3.11), включающая в себя определение интегральной кривой DB , по-видимому, может быть решена только численными методами.

Функция w^* , вообще говоря, может быть неоднозначной. Значения w^* выделяют из области допустимых значений w , которая определяется неравенством $w > w_G$, отрезки, такие, что значениям w , принадлежащим этим отрезкам, не соответствует решения, представляющего структуру переднего фронта. Значениям w , не принадлежащим этим отрезкам, соответствуют фронты типа A , а концам отрезков — фронты типа B . В тех случаях, когда точка D отсутствует или уравнение (3.10) не выполняется ни при каких значениях w , все значения $w \geq w_G$ соответствуют разрывам типа A .

В случае, когда сила трения задается равенством (1.3), при $\delta = 0$ разность $u_C - u_D$ — монотонно возрастающая функция w . Если в некоторой области значений δ монотонность зависимости $u_C - u_D$ от w сохраняется, то существует не более одного значения w^* . Если такого значения не существует, то при всех $w > w_G$ разрыв имеет тип A . Если же w^* существует, то значениям $w < w^*$ не соответствуют разрывы, обладающие структурой, значению $w = w^*$ соответствует разрыв типа B и значениям $w > w^*$ — разрывы типа A . При этом в пространстве переменных, характеризующих состояние снега, склона и направление ударной волны, в области, где возможны разрывы типа B , удовлетворяется очевидное неравенство $w^* \geq w_G$, а граница этой области задается равенством

$$(3.12) \quad w^* = w_G$$

Для случая $\delta = 0$ и силы трения, определяемой формулой (1.3), условие существования волн типа B было найдено в явном виде [2]

$$\sigma^* < \rho g h_0 \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \psi - \mu}{k} \right) \cos \psi$$

а функция w^* исследована качественно.

В этой статье в тех случаях, когда потребуется явное выражение для w^* , будем считать, что величина δ невелика. Из симметрии следует, что зависимость w^* от δ четная, поэтому, разлагая функцию w^* в ряд по степеням δ^2 и ограничиваясь двумя членами, получим

$$(3.13) \quad w^* = w_0 + K\delta^2$$

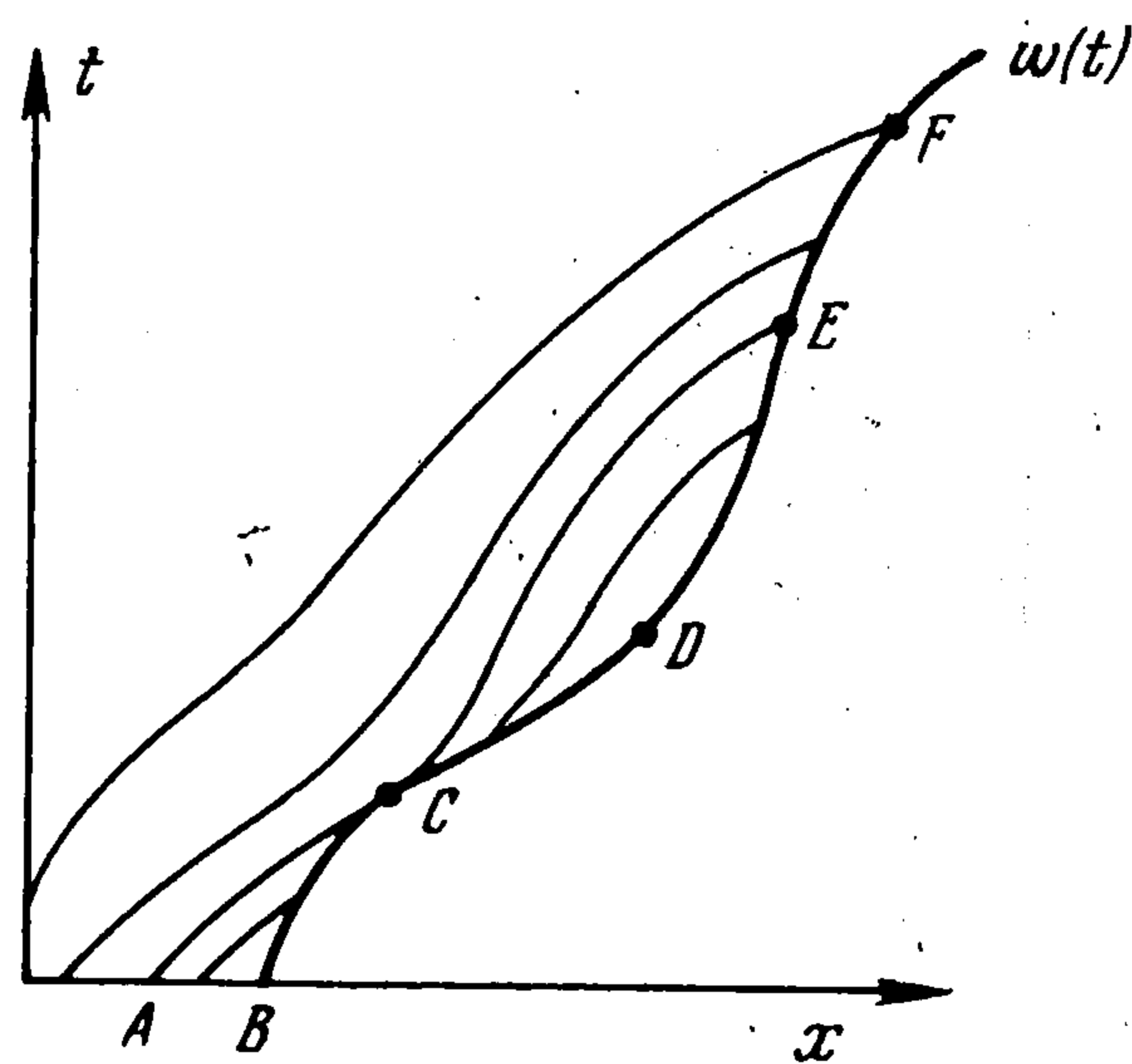
4. Расщепление разрывов. Важно отметить следующее обстоятельство. При $w > w^*$ интегральная кривая, представляющая структуру разрыва приходит в точку A . При $w = w^*$ эта интегральная кривая превращается в интегральные кривые DB и BA , первая из которых представляет структуру разрыва типа B , а вторая — структуру внутреннего разрыва. Таким образом, происходит расщепление разрыва типа A на разрыв типа B и внутренний разрыв, движущиеся при $w = w^*$ с одинаковой скоростью. Расщепление разрывов представляет собой, по-видимому, довольно типичное поведение разрывов в механике сплошной среды (см., например, [7,8]).

Для иллюстрации процесса расщепления разрыва рассмотрим задачу о «поршне» для уравнения (2.2). Будем считать, что движение снега на склоне с постоянными параметрами поддерживается сзади движением поршня, на котором задано значение $h = h_{\Pi} = \text{const}$. При больших h_{Π} решение представляется разрывом типа A и следующим за ним течением с однородными параметрами. При уменьшении h_{Π} скорость разрыва w падает в соответствии с (3.2), и если склон такой, что могут существовать разрывы типа B , то при некотором $h_{\Pi} = h_A(w^*)$, соответствующем $w = w^*$, решение

будет иметь тот же вид, но поверхность разрыва будет представлять собой, как это следует из исследования структуры, два разрыва: передний фронт типа B и внутренний разрыв, движущиеся один за другим с одинаковыми скоростями. При дальнейшем уменьшении h_{Π} волна типа B будет сохранять свою скорость, равной w^* , а скорость внутреннего разрыва будет убывать с его амплитудой. При $h_{\Pi} = h(w^*)$ амплитуда внутреннего разрыва обратится в нуль и при дальнейшем уменьшении h_{Π} в решении появится волна разрежения. Наконец, при $h_{\Pi} = 0$ решение приобретает вид, найденный в [2].

5. Движение лавины, когда ее передний фронт представляет собой разрыв типа A . Если разрыв имеет тип A , то скорость его движения w вдоль линии наибольшего спуска зависит, согласно (2.1), от значения h непосредственно за разрывом, которое, в свою очередь, определяется интегрированием уравнений характеристик (2.3) вдоль линии наибольшего спуска. Таким образом, движение переднего фронта определяется в этом случае вдоль каждой линии независимо от остальных. Форму переднего фронта лавины можно найти, соединив точки, задающие положение разрыва на каждой линии наибольшего спуска.

В случае, когда h за разрывом больше, чем h_G , характеристики догоняют разрыв (фиг. 3) и его скорость определяется по h . Если значение h , приносимое характеристиками на разрыв, убывает и станет равным h_G (в точке C на фиг. 3), то скорость разрыва сделается равной скорости характеристики. Если вдоль характеристики, идущей в непосредственной близости от ударной волны, величина $h - h_G$ после обращения в нуль продолжает убывать в силу уравнений (2.3) и задания $h_0(x)$, то эта характеристика будет отставать от разрыва.



Фиг. 3

Действительно, согласно (3.3), скорость разрыва не может быть меньше, чем скорость характеристики, подсчитанной по величине h_G . В этом случае до тех пор, пока

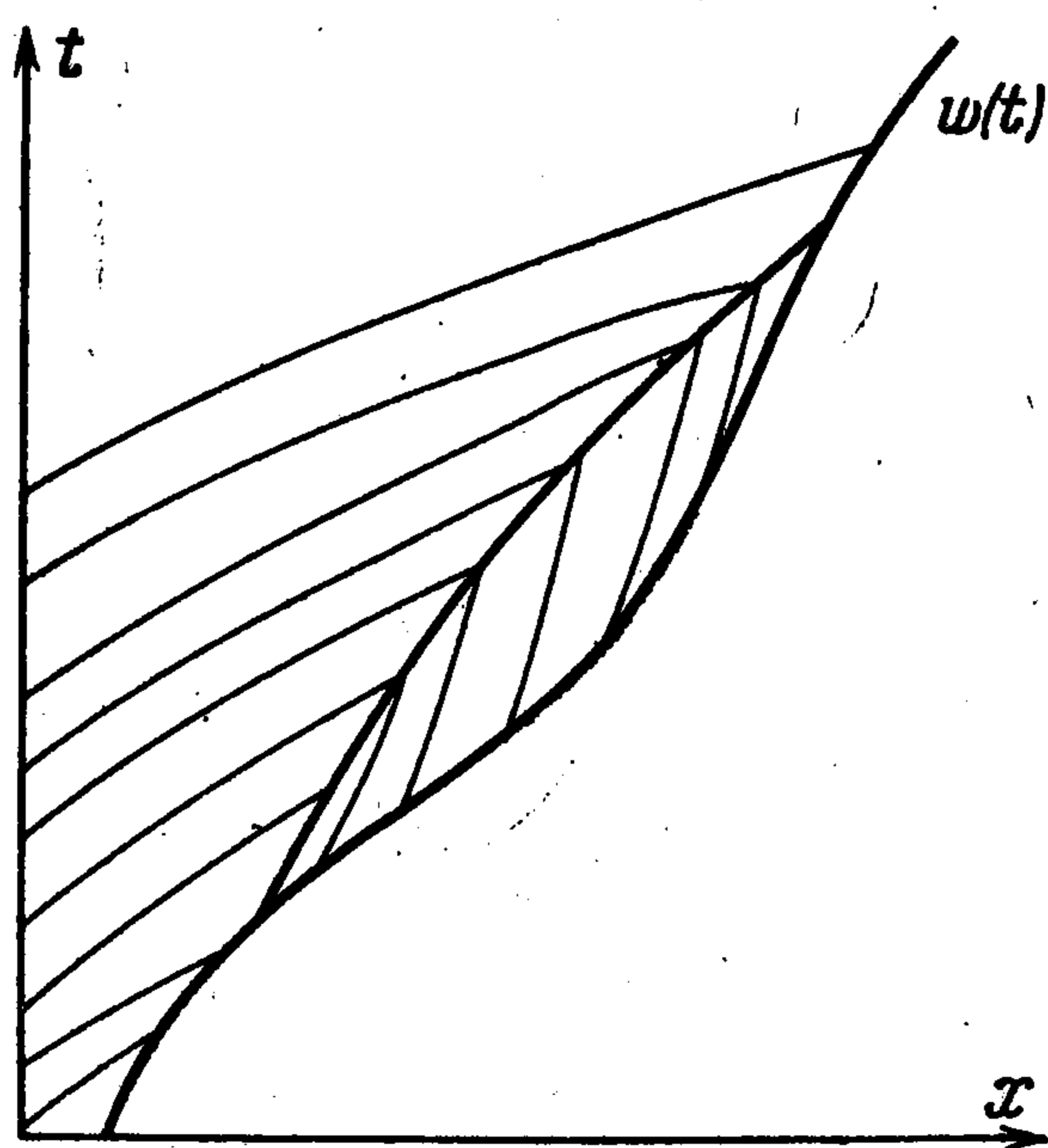
$$(5.1) \quad \frac{d}{dx} (h - h_G) < 0$$

на разрыве будет выполняться условие $w = w_G$, аналогичное условию Жуге. Характеристики (2.3) на плоскости $x t$ будут, касаясь, уходить от поверхности разрыва. Если знак неравенства (5.1) сменится на обратный (точка D на фиг. 3), то характеристики, которые незадолго перед этим отстали от ударной волны, начнут догонять ее, принося с собой значения h , большие h_G .

Не составляет труда написать обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, описывающее движение переднего фронта лавины на отрезках BC и DF .

При изучении движения лавины и ее переднего фронта нужно иметь в виду возможность образования скачков внутри лавины.

6. Движение разрывов при возможности расщепления. Рассмотрим сначала случай $\delta = 0$. Пусть начальные данные таковы, что при малых t осуществляется разрыв типа A (фиг. 4). Если по мере продвижения разрыва его скорость станет равной w^* , то произойдет расщепление разрыва на разрыв типа B и внутренний разрыв. Скорость w^* движения разрыва типа B определяется только свойствами склона и снега в точке, где он находится. От разрыва уходят характеристики, которые определяют течение снега в зоне, примыкающей к разрыву, и влияют, в частности, на движение внутреннего разрыва. Разрыв типа B может превратиться снова в разрыв типа A , если склон станет таким, что на нем волна типа B не может существовать, или если его догонит внутренний разрыв, скорость которого определяется его высотой и больше скорости характеристик (фиг. 4).



Фиг. 4

Рассмотрим теперь движение переднего фронта лавины, когда он представлен разрывом типа B при $\delta \neq 0$. Введем криволинейную систему координат с координатными линиями x , направленными по линиям наибольшего спуска и координатными линиями y , ортогональными к ним.

Пусть длина вектора $\{dx, dy\}$ выражается равенством

$$(6.1) \quad ds^2 = g_1^2(x, y) dx^2 + g_2^2(x, y) dy^2$$

Будем задавать закон движения разрыва уравнением $x = X(y, t)$. Тогда скорость разрыва w и тангенс наклона δ к линии наибольшего спуска выразятся следующим образом:

$$(6.2) \quad w = g_1 \frac{\partial X}{\partial t}, \quad \delta = \frac{g_1}{g_2} \frac{\partial X}{\partial y}$$

Подставляя эти выражения в равенство (3.13), выражающее скорость движения разрыва, получим уравнение в частных производных первого порядка относительно X

$$(6.3) \quad g_1 \frac{\partial X}{\partial t} = w^* \left(X, y, \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \right)$$

Зависимость w^* от x и y происходит от зависимости ψ , σ^* , F , g_1 , g_2 от x и y . В (6.3) учтено, что w — четная функция δ .

Характеристики уравнения (6.3) наклонены к линиям наибольшего спуска, что говорит о возможном переходе движения с одних линий наибольшего спуска на другие, не захваченные первоначально движением лавины.

Рассмотрим для простоты движение фронта типа B по однородному склону. Тогда w^* не будет зависеть от x и y явно, а зависимость от δ возьмем в виде (3.13). Найдем сначала форму переднего фронта лавины, возникшей из точечного возмущения в начале координат. Записывая уравнения характеристик для уравнения (6.3), найдем

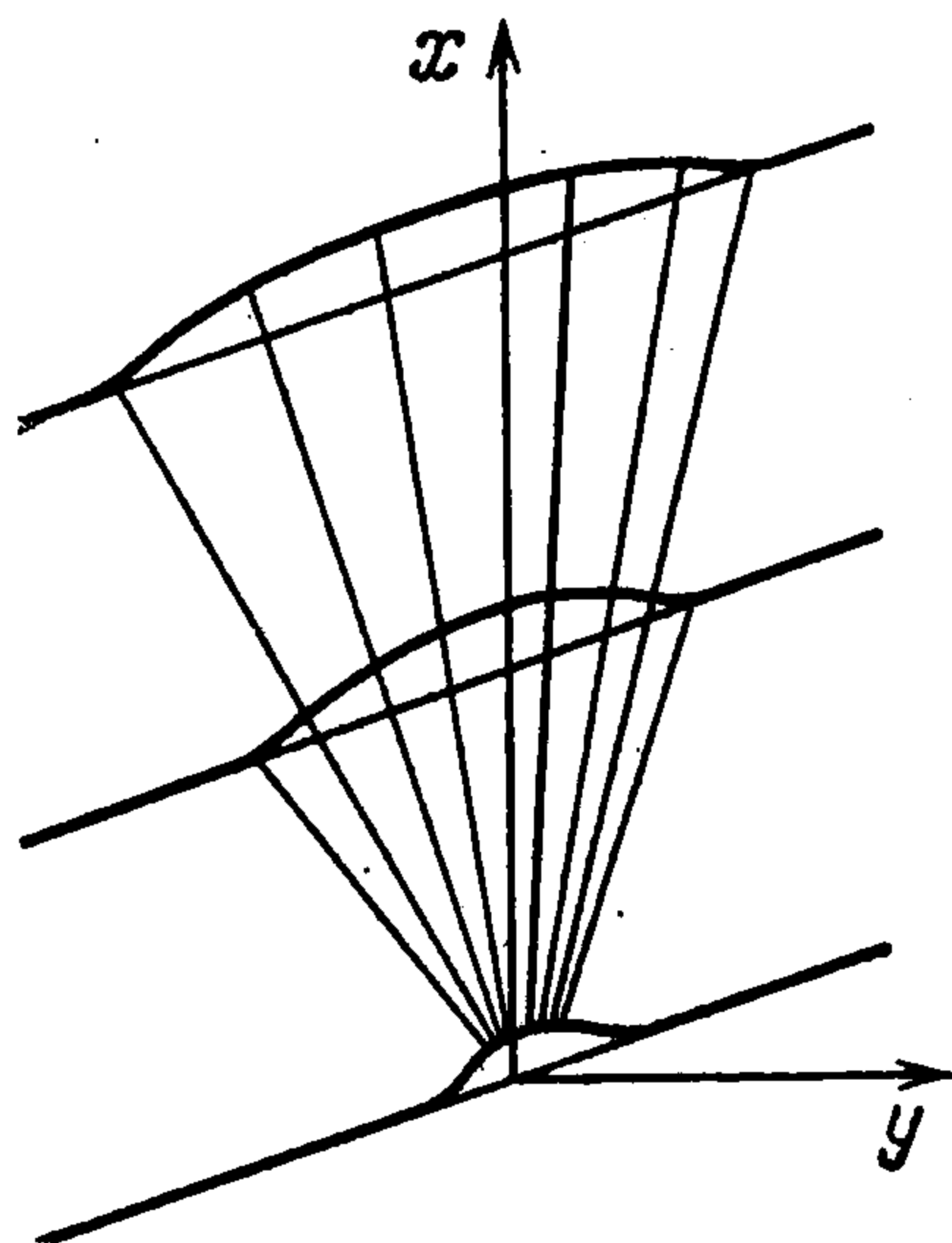
$$(6.4) \quad \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= w_0 - K \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -2K \left(\frac{\partial X}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \text{const} \end{aligned}$$

Интегрируя эти уравнения и исключая $\partial X / \partial y$, получим уравнение фронта

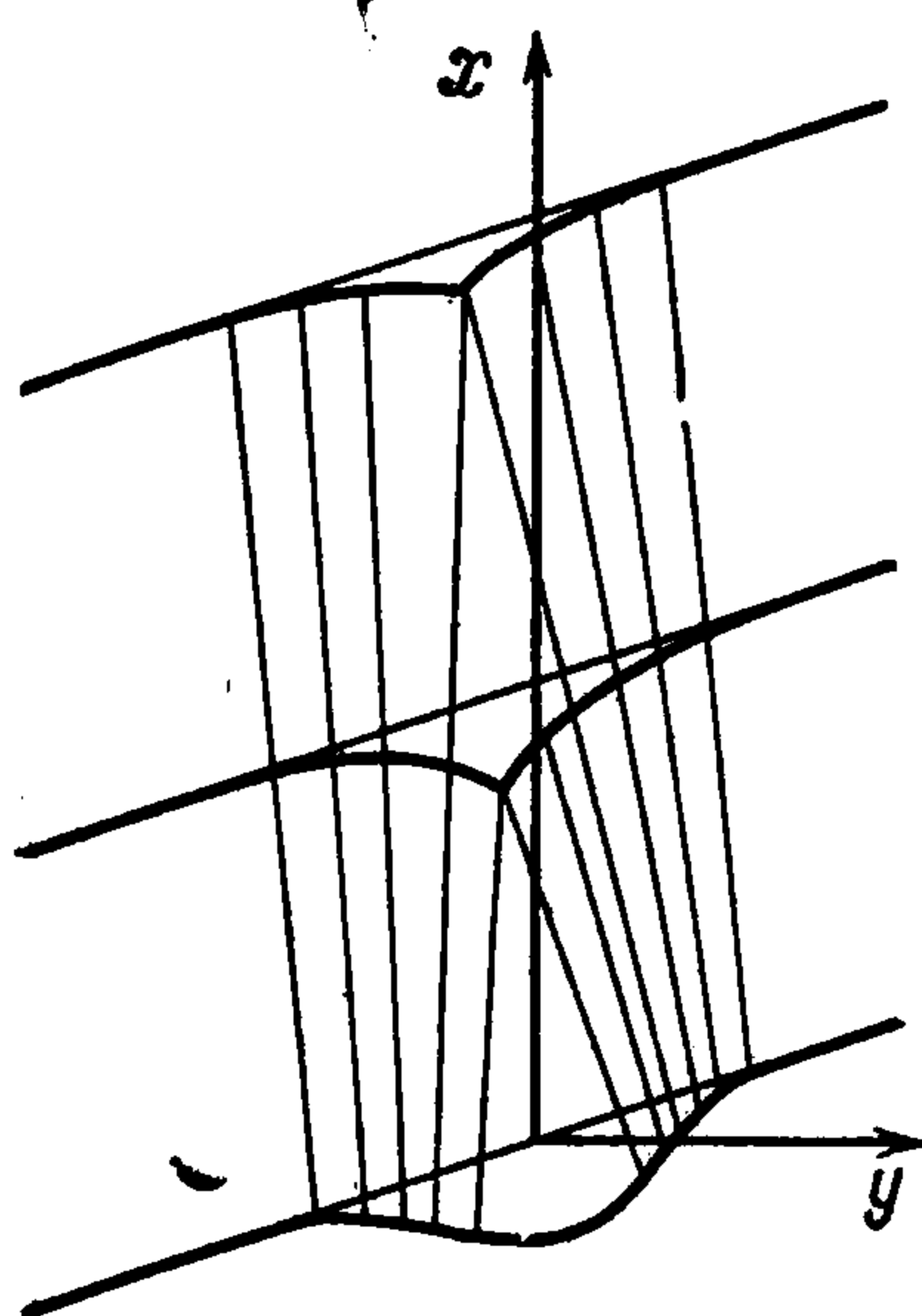
$$(6.5) \quad \frac{X}{t} = w_0 - \frac{1}{4K} \frac{y^2}{t^2}$$

Таким образом, форма переднего фронта лавины, развивающаяся из точечного возмущения, представляет собой параболу, расширяющуюся во всех направлениях пропорционально времени. При $K > 0$ парабола обращена вершиной вниз по склону. Ширина лавины обратно пропорциональна \sqrt{K} .

Теперь рассмотрим поведение возмущения формы фронта, который при $t = 0$ представляет всюду прямую линию $X = \alpha y$, за исключением некоторого отрезка кривой в окрестности точки $x = 0, y = 0$. Будем для определенности рассматривать случай $K > 0$ (случай $K < 0$ исследуется аналогично). Пусть возмущение фронта представляет собой выпуклость, обращенную вниз (фиг. 5). На возмущении есть точка, в кото-



Фиг. 5



Фиг. 6

рой $\partial X / \partial y = \alpha$. Нормальная компонента скорости характеристики в этой точке совпадает со скоростью фронта, и поэтому этот элемент фронта движется на постоянном расстоянии впереди основного фронта. Составляющая вдоль оси y скорости характеристики, соответствующей этому элементу, направлена влево, если $\alpha < 0$, и вправо, если $\alpha > 0$. Остальные характеристики, соответствующие возмущению, расходятся от этой характеристики в разные стороны, так что возмущение будет расширяться. По прошествии достаточно большого времени возмущение фронта будет представлять собой часть параболы

$$(6.6) \quad X = w_0 t + C - \frac{1}{4K} \frac{y^2}{t}$$

(C — амплитуда начального возмущения), которая лежит ниже прямой

$$(6.7) \quad X = \alpha y + (w_0 + K\alpha^2)t$$

представляющей собой остальную часть фронта. Там, где парабола (6.6) пересекается с прямой (6.7), имеется разрыв производной $\partial X / \partial y$. Ширина возмущения при больших t растет, как \sqrt{t} . |

В случае, когда возмущение представляет собой вогнутость фронта, характеристики, соответствующие различным точкам возмущения, сходятся (фиг. 6). При их пересечении образуется разрыв производной $\partial X / \partial y$. На нем заканчиваются характеристики, соответствующие средней части начального возмущения. Поэтому амплитуда возмущения стремится к нулю при увеличении времени.

Поступила 7 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян С. С., Эглит М. Э., Якимов Ю. Л. Новая постановка и решение задачи о движении снежной лавины. В сб.: Физика снега, снежные лавины и ледники. Тр. Высокогорного геофизич. ин-та, 1967, вып. 12.
2. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Исследование решений уравнений движения снежных лавин. Материалы гляциологических исследований. Хроника, обсуждения, 1970, вып. 16.
3. Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves. I. Proc. Roy. Soc. London A, 1955, vol. 229, No. 1178. p. 281—316.
4. Lax P. D. Hyperbolic systems of conservation Laws II. Commun on Pure and Appl. Math., 1957, vol. 10, No. 4.
5. Любарский Г. Я. О структуре ударных волн. ПММ, 1961, т. 25, вып. 6.
6. Whitham G. B. Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magneto hydrodynamics. Commun on Pure and Appl. Math., 1958, vol. 12, No. 1, p. 113.
7. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Изменение скорости газа в ионизирующих волнах. Задача о проводящем поршне. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
8. Черный Г. Г. Сверхзвуковое обтекание тел с образованием фронтов детонации и горения. В сб.: Проблемы гидромеханики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1969, стр. 561—579.