

## ПЛОСКОЕ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ С ОБРАТНЫМ ТОКОМ

В. И. Грабовский

(Москва)

Рассматриваются режимы течений униполярно заряженных струй в случае возвращения заряженных частиц по периферийным зонам гидродинамических струй на электрод-«эмиттер» под действием как индуцированного, так и внешнего электрических полей. Показано возрастание, возвращаемого («обратного») тока при увеличении ширины входного участка для заряженных частиц, плотности электрических зарядов на этом участке и величины внешнего тормозящего электрического поля. Электрический ток с электрода-эмиттера уменьшается благодаря обратному току и запирающему действию внешнего поля.

Исследование проводится методом численного решения двумерных уравнений электрогидродинамики. Определяются локальные электрические параметры и характер течения во всей области.

Существование обратных токов является следствием пространственности (двумерности) электрогидродинамических течений в реальных устройствах. Интерес к этому эффекту возникает при создании электрогидродинамических преобразователей энергии, где необходим учет потерь вследствие возвращения части тока на эмиттер по пограничному слою, и в таких технологических процессах, как электростатическая окраска деталей и опыление. Значение имеет и процесс воздействия на заряженные частицы тормозящим внешним электрическим полем с целью очистки среды, где обратные токи являются уже положительным фактором.

Некоторые работы по изучению плоских течений даны в работе [1], а также в работах [2-4].

1. Рассматривается стационарное плоское течение между двумя параллельными, бесконечными и пронизаемыми для жидкости электродами  $x^0 = 0$  (эмиттер) и  $x^0 = L$  (коллектор), между которыми создается внешнее электрическое поле, препятствующее движению электрически заряженных частиц в направлении переноса их струей жидкости (нуль сверху означает размерные величины). Струя вязкой несжимаемой жидкости, распространяясь в межэлектродном промежутке в направлении оси  $x^0$ , расширяется вниз по потоку от своего начального сечения ( $x^0 = 0$ ) размера  $H$ . Продольная составляющая скорости  $u^0$  уменьшается поперек струи от максимального значения на оси до нуля на границе струи. Параметр электрогидровзаимодействия принимается малым, поэтому поле скорости в первом приближении задается.

Электрические заряды, образованные в области  $x^0 < 0$  (например с помощью коронного источника), вносятся жидкостью в промежуток  $0 < x^0 < L$ . Размер сечения входа заряженных частиц удовлетворяет неравенству  $h < H$ . Это сечение характеризуется тем, что на нем задается постоянная плотность зарядов  $q_*$ . Пусть для определенности частицы за-

ряжены положительно, т. е. плотность зарядов  $q^\circ > 0$ , а электрод  $x^\circ = 0$  заземлен, тогда положительная величина электрического потенциала  $\varphi^\circ_+$  электрода  $x^\circ = L$  соответствует внешнему электрическому полю, тормозящему частицы.

Взаимодействие зарядов с жидкостью приводит к образованию в межэлектродной области «электрической» струи (зоны, где  $q^\circ \neq 0$ ) [1]. Под действием поперечного индуцированного поля частицы отклоняются в сторону периферийных зон струи жидкости, где продольная скорость сноса зарядов меньше. До тех пор, пока осевая составляющая плотности тока  $j_x^\circ = q^\circ (u^\circ - b \partial \varphi^\circ / \partial x^\circ) > 0$  ( $b$  — подвижность), заряды движутся вниз по потоку. Если же  $j_x^\circ < 0$ , то возникает обратный ток, т. е. частицы возвращаются на электрод-эмиттер. Нетрудно видеть, что необходимым условием существования обратного тока служит неравенство  $\partial \varphi^\circ / \partial x^\circ > 0$ , т. е. обратный ток может образовываться только в области возрастания потенциала в продольном направлении.

В работе [1] исследовались случаи, когда обратные токи не возникали, хотя электрическая струя в некоторых зонах могла быть шире гидродинамической. Ниже изучаются условия реализации течений с обратными токами. Наличие обратного тока означает уменьшение тока на коллектор. Другой фактор уменьшения величины этого тока — действие отрицательного внешнего поля, которое стремится уменьшить всюду скорость заряженных частиц. Соотношение между этими двумя факторами, определяющими уменьшение тока «выноса» с эмиттера, рассматривается в дальнейшем.

2. Перейдем к безразмерным переменным по формулам (обозначения общеприняты)

$$(2.1) \quad \varphi^\circ = \frac{v_* H}{b} \varphi, \quad q^\circ = \frac{\epsilon v_*}{4\pi b H} q, \quad j^\circ = \frac{\epsilon v_*^2}{4\pi b H} j$$

$$V^\circ = v_* V, \quad x^\circ = Hx, \quad y^\circ = Hy$$

В этих переменных уравнения для описания рассматриваемых процессов при введенных предположениях имеют вид [1]

$$(2.2) \quad \Delta \varphi = -q$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} \left( u - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\partial q}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -q^2, \quad j = q (V - \text{grad } \varphi)$$

$$\left( u = \sqrt{\frac{3}{3+x}} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{1+0.3x} \right)^{3/2} \right]^2 \right)$$

Выбор распределения продольной составляющей скорости  $u$  (в скобках в (2.2)) учитывает уменьшение скорости до нуля на границе гидродинамической струи  $Y = (1 + 0.3x) / 2$ . Величина поперечной составляющей принимается всюду равной нулю.

Течение симметрично относительно оси  $y = 0$ , поэтому можно рассматривать только область  $y \geq 0$ , учитывая условие симметрии  $\partial \varphi / \partial y = 0$  при  $y = 0$ . Очевидно также, что  $\varphi \rightarrow \varphi_+ x$  при  $y \rightarrow \infty$ . Таким образом,

граничные условия для системы уравнений (2.2) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \text{ при } x = 0, \varphi = \varphi_+ \text{ при } x = l \\ \partial\varphi / \partial y &= 0 \text{ при } y = 0, \varphi \rightarrow \varphi_+ x \text{ при } y \rightarrow \infty \\ q &= \beta \text{ при } x = 0, y \leq a/2 \\ \left( a = \frac{h}{H}, l = \frac{L}{H}, \beta = q_* \frac{4\pi b H}{\varepsilon v_*}, \varphi_+ = \varphi_+^0 \frac{b}{v_* H} \right) \end{aligned}$$

Следует отметить, что предполагается отсутствие поверхностного заряда на границе  $\Gamma$  электрической струи, на которой плотность заряда претерпевает разрыв.

Необходимо решать систему (2.2) отдельно в областях, где  $q = 0$  и  $q \neq 0$ , и сшивать решения на границе  $\Gamma$ . Условием сшивания служит требование непрерывности величин потенциала и его первых производных.

Задача характеризуется четырьмя параметрами: геометрическими факторами  $a$  и  $l$ , величинами  $\beta$  и  $\varphi_+$ , но не любая комбинация их значений соответствует течению с обратным током.

Практически важными характеристиками течения, в которых будут проявляться рассматриваемые эффекты, являются суммарные величины токов: проходящего через коллектор —  $J_+$  и выходящего в межэлектродное пространство —  $J_0$

$$(2.3) \quad J_0 = \int_{-a/2}^{a/2} j_x(0, y) dy, \quad J_+ = \int_{-\infty}^{\infty} j_x(l, y) dy$$

Решение задачи проводилось численно методом последовательных приближений [1], суть которого — в последовательном интегрировании эллиптического и гиперболического уравнений системы (2.2). Эллиптическое уравнение интегрировалось методом последовательных смещений Зейделя, а гиперболическое — методом характеристик, на которых справедливо соотношение

$$(2.4) \quad \frac{dx}{u - \partial\varphi / \partial x} = \frac{dy}{-\partial\varphi / \partial y} = \frac{dq}{-q^2}$$

Требовалось выполнение граничного условия при  $y \rightarrow \infty$  на достаточно большом, но конечном расстоянии от оси  $y = 0$ . В расчетах также принималось  $l = 1$ ,  $a < 1$ , а параметр  $\beta$  изменялся от нуля до достаточно большого значения, вплоть до выхода на режим «насыщения».

3. Рассмотрим случай отсутствия внешнего торможения:  $\varphi_+ = 0$ . Уменьшение  $J_+$  (относительно  $J_0$ ) происходит из-за обратного тока, который своим возникновением обязан только индуцированным электрическим полям.

Деформация области, где  $q \neq 0$ , при  $\beta \rightarrow \infty$  характеризуется следующими особенностями. При  $\beta = 0$  электрическая струя по всей длине сохраняет свою ширину. При увеличении  $\beta$  интенсивность расширения струи увеличивается, и течение характеризуется все большим заполнением межэлектродного пространства зарядами. Наконец, появляется зона обратного тока, примыкающая к электроду  $x = 0$  при больших  $y$ . По мере

дальнейшего увеличения  $\beta$  эта зона расширяется, опускаясь в направлении оси течения. При достаточно больших  $\beta$  граница  $\Gamma$  перестает изменяться — реализуется режим насыщения.

На фиг. 1 представлено семейство граничных кривых  $\Gamma$  при  $a = 0.4$  и разных  $\beta$ . Левее каждой кривой — зона  $S$ , где  $q \equiv 0$ , а правее —  $q \neq 0$ . Штрих-пунктирная линия — граница гидродинамической струи  $Y$ .

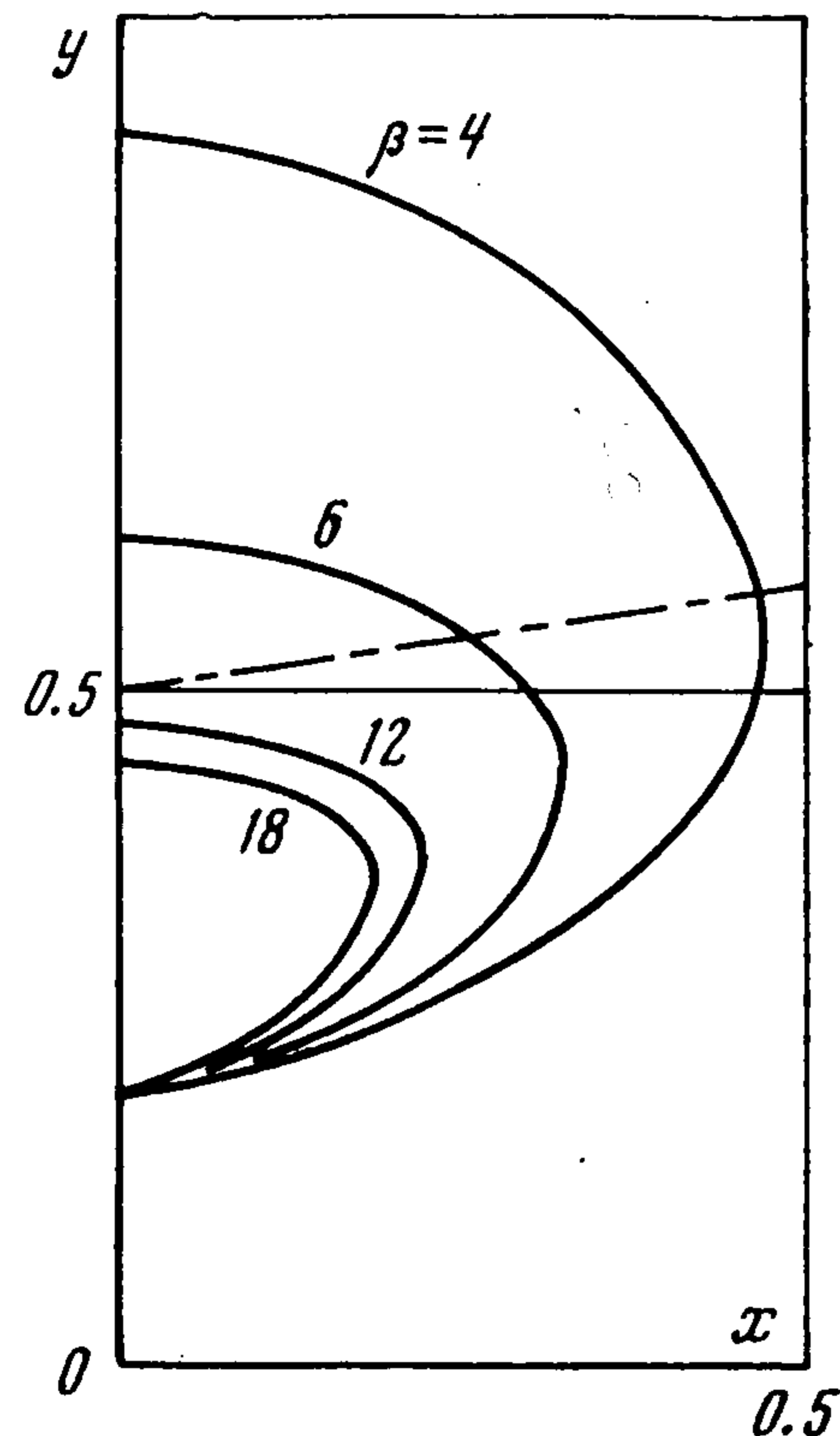
При бóльших значениях параметра  $a$  обратный ток возникает раньше по  $\beta$ , так как (при одинаковых  $\beta$ ) выносится больший заряд с соответствующим увеличением индуцированных полей. Значение  $\beta$ , при котором впервые возникает обратный ток, приблизительно равно 0.7 при  $a = 0.6$  и 3.5 при  $a = 0.4$ .

Зона  $S$  в режиме насыщения при увеличении  $a$  уменьшается. Существует такое  $a = a^*$ , когда область  $S$  вырождается в точку  $x = 0$ ,  $y = a^* / 2$ , и заряженные частицы занимают межэлектродный промежуток полностью. Величина  $a^*$  определяет максимально возможный в режиме насыщения полезный участок электрода  $x = 0$ , т. е. зону, через которую частицы выходят в рабочий промежуток  $0 < x < 1$ . Это соответствует ограничению на размер сечения в плоскости  $x = 0$ , где задается плотность заряженных частиц. В проведенных расчетах  $a^* \approx 0.5$ .

Характер течения с обратным током при отсутствии внешнего поля можно видеть из фиг. 2, а, где для  $\beta = 6$ ,  $a = 0.4$  пунктирными линиями нанесены характеристики (траектории движения заряженных частиц). Существует «нейтральная» характеристика, уходящая в бесконечность и разделяющая область течения на части, одна из которых соответствует возвращающимся на эмиттер частицам, а другая — частицам, приходящим на коллектор.

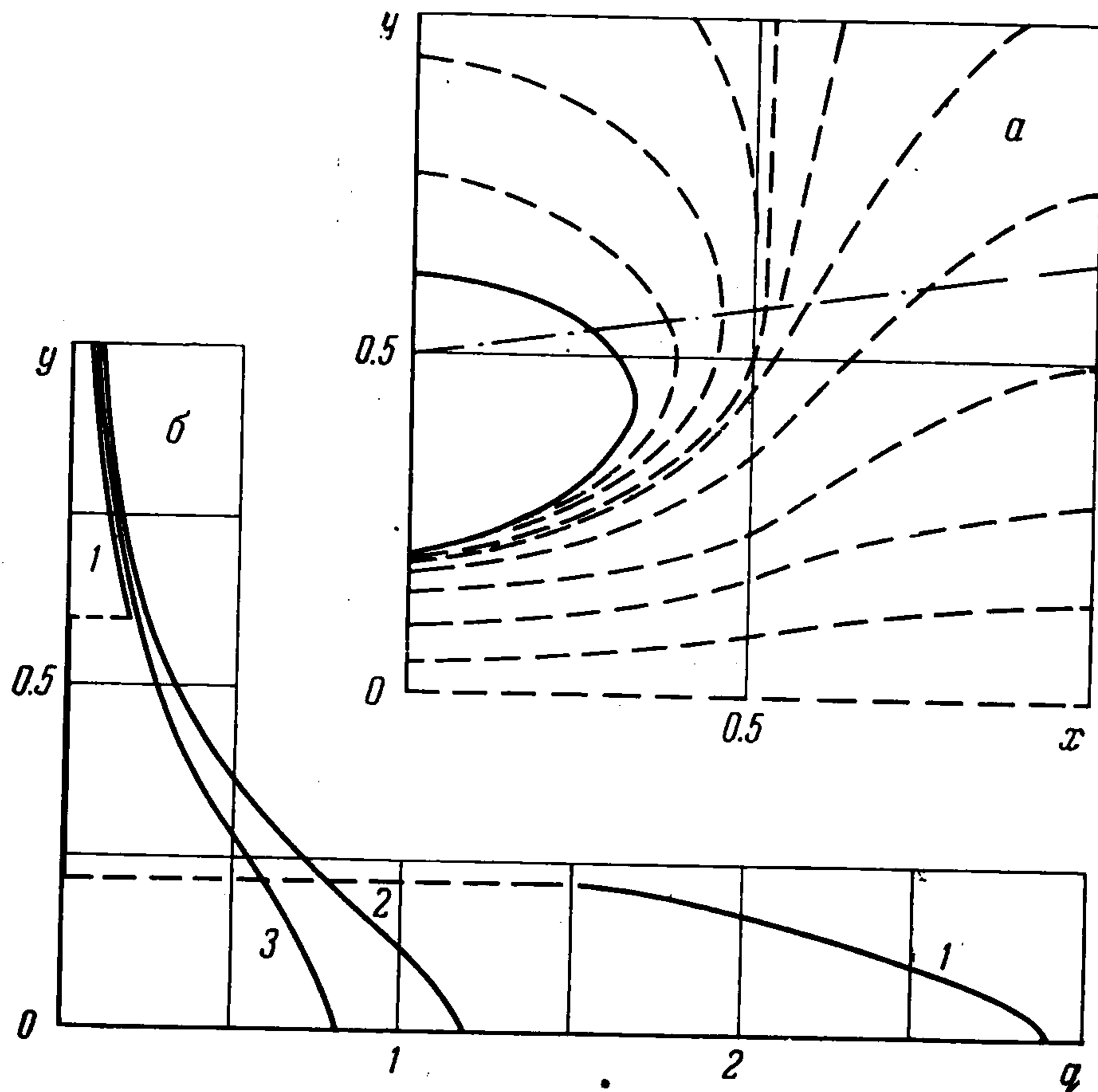
На фиг. 2, б изображены поперечные распределения плотности заряда в различных сечениях  $x_0 = \text{const}$  (кривые 1—3 соответствуют  $x_0 = 0.1, 0.5, 0.9$ ) для  $\beta = 6$ ,  $a = 0.4$ . В сечении  $x_0 = 0.1$ , пересекающем зону  $S$ , плотность заряда дважды претерпевает разрыв. В каждом сечении  $q$  асимптотически уменьшается до нуля при  $y \rightarrow \infty$ . Обратим внимание, что хотя заряженные частицы занимают почти все пространство, включая бесконечность, их плотность на периферии невелика.

Расчет суммарной величины обратного тока  $|J_-|$  ( $J_- < 0$  — ток, проходящий через электрод  $x = 0$  в периферийной зоне) показывает ее рост при увеличении  $\beta$  и  $a$ . На фиг. 3 нанесены зависимости  $J_0(\beta)$  и  $J_+(\beta)$  при  $a = 0.4$ . При значениях параметра  $\beta$ , когда обратного тока нет,  $J_0 = J_+$ . Если же обратный ток отличен от нуля, то  $J_0 - J_+ = |J_-|$ . Как видно из представленных зависимостей, токи  $J_0, J_+$  практически не растут



Фиг. 1

(режим насыщения) уже при  $\beta \approx 20$ . Соответственно и величина обратного тока достигает максимума, составляя не более 5% от  $J_0$ .



Фиг. 2

Следует отметить, что через коллектор в его периферийной части проходит такой же малый ток. Ток, проходящий через электрод  $x = 1$ , в основном определяется величиной тока центральной зоны (у оси  $y = 0$ ),

размер которой приблизительно соответствует размеру сечения гидродинамической струи при  $x = 1$ .

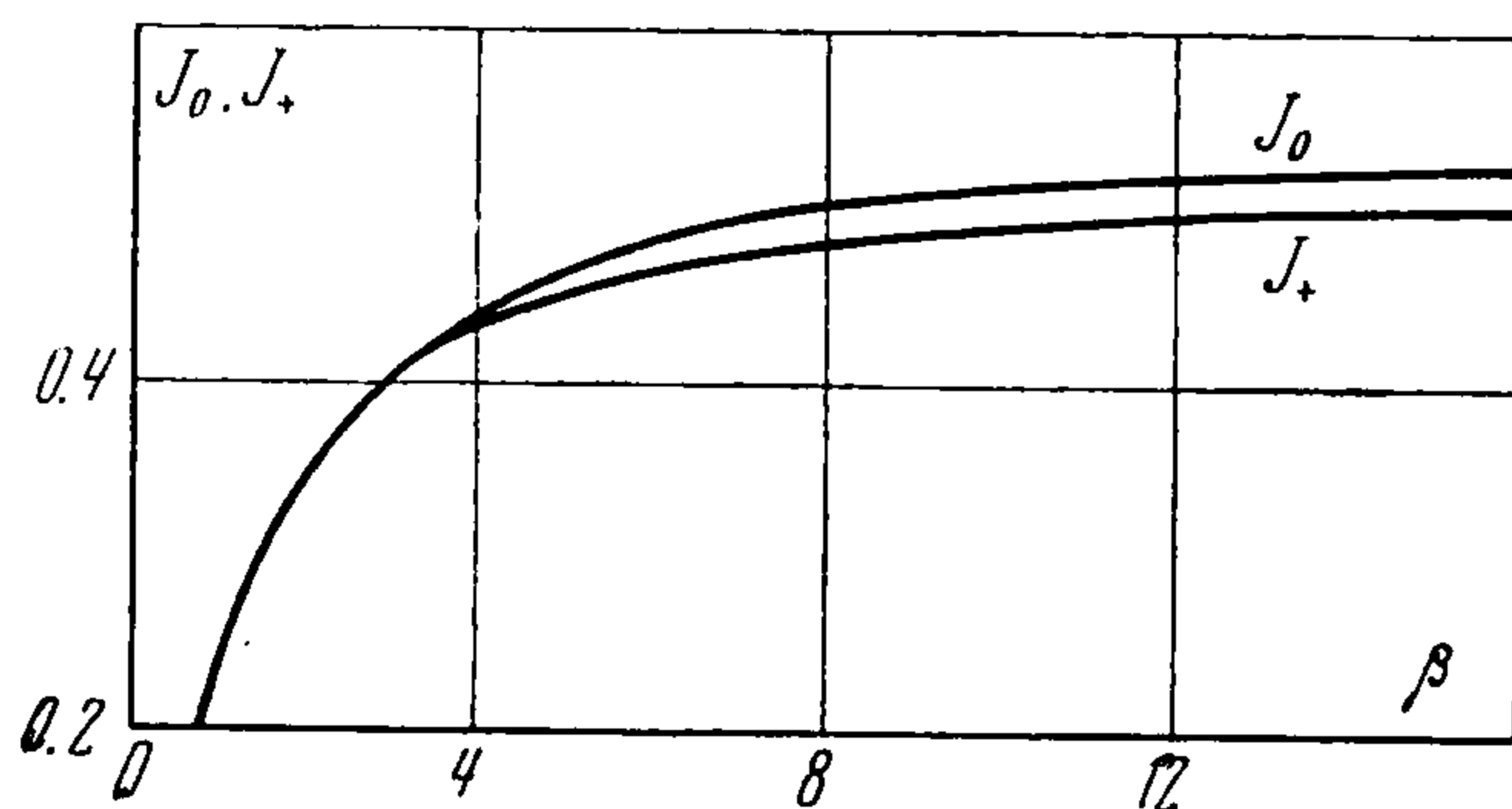
По-видимому, обратный ток будет больше при  $l > 1$  и при отличном от нуля внешнем тормозящем поле, что рассматривается ниже.

4. Наличие внешнего тормозящего поля ( $\varphi_+ > 0$ ), с одной стороны, приводит к общему уменьшению скорости движения заряженных частиц,

что проявляется в уменьшении тока  $J_0$ . Это явление условно можно назвать эффектом «запирания» источника. С другой стороны, тормозящее поле способствует более раннему появлению обратного тока. Это связано с увеличением зоны, в которой  $\partial\varphi / \partial x > 0$ .

С помощью проведенных расчетов и аналитического исследования системы уравнений обнаружен следующий характер деформации области электрической струи.

Пусть при  $\varphi_+ = 0$  обратные токи отсутствуют и граница электрической струи находится внутри гидродинамической области течения (например



Фиг. 3

при  $a = 0.4$ ,  $\beta = 2$ ). При увеличении  $\varphi_+$  струя расширяется и ее граница  $\Gamma$  пересекает плоскость  $x = 1$  во все более удаленных от оси течения точках  $N$ . Такое движение точки  $N$  вверх по прямой  $x = 1$  будет происходить до тех пор, пока в ней не реализуется условие  $u - \partial\varphi / \partial x = 0$  (до этого момента течение без обратного тока). Такая точка  $N = P(1, y_0)$ , в которой одновременно

$$(4.1) \quad u - \partial\varphi / \partial x = 0, \quad \partial\varphi / \partial y = 0$$

является особой для характеристических уравнений (2.4).

Для определения типа этой особой точки представим уравнение характеристик (2.4) в виде эквивалентной автономной системы уравнений второго порядка ( $t$  — параметр)

$$(4.2) \quad dx/dt = u - \partial\varphi / \partial x, \quad dy/dt = -\partial\varphi / \partial y$$

для которой точка  $P(1, y_0)$  — положение равновесия.

Представим функцию  $\varphi$  в окрестности исследуемой точки в виде ряда

$$(4.3) \quad \varphi = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} (x-1)^n (y-y_0)^m, \quad a_{0m} = 0 \text{ при } m \geq 2$$

$$(|x-1| < 1, |y-y_0| < 1)$$

(Указанное соотношение для  $a_{0m}$  — следствие второго равенства из (4.1), которое выполняется для любых  $y$  при  $x = 1$ ).

Подставим (4.3) в уравнения (4.2) и, переходя к новым малым переменным  $x-1 = \xi$ ,  $y-y_0 = \eta$ , линеаризуем эту систему, учитывая равенства (4.1). Получим вблизи положения равновесия

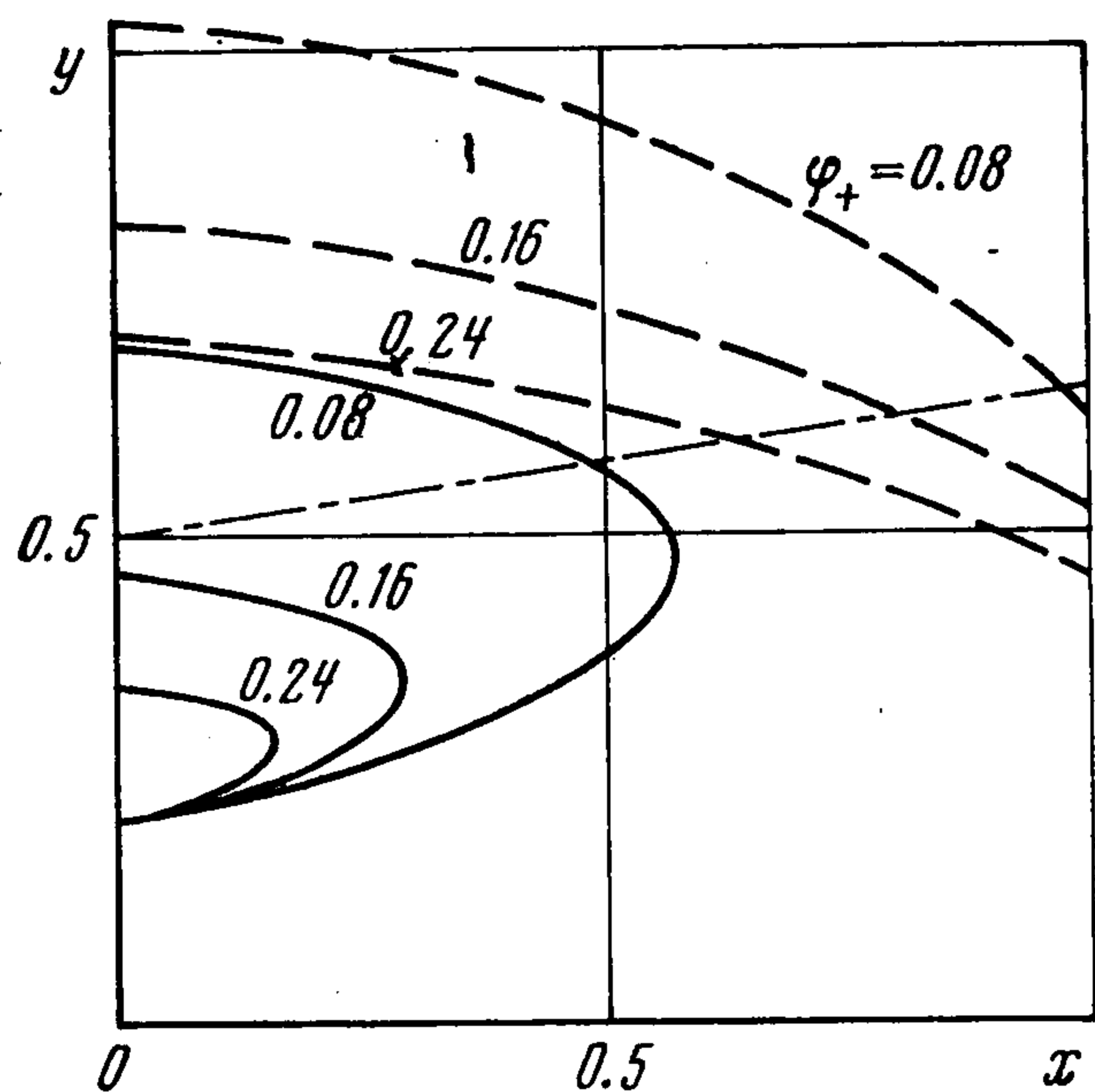
$$\frac{d\xi}{dt} = -2a_{20}\xi - a_{11}\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = -a_{11}\xi$$

Корни характеристического уравнения для определения собственных значений матрицы этой системы вещественны ( $a_{nm}$  вещественны) и разных знаков. Следовательно, положение равновесия (точка  $P$ ) — седло [5].

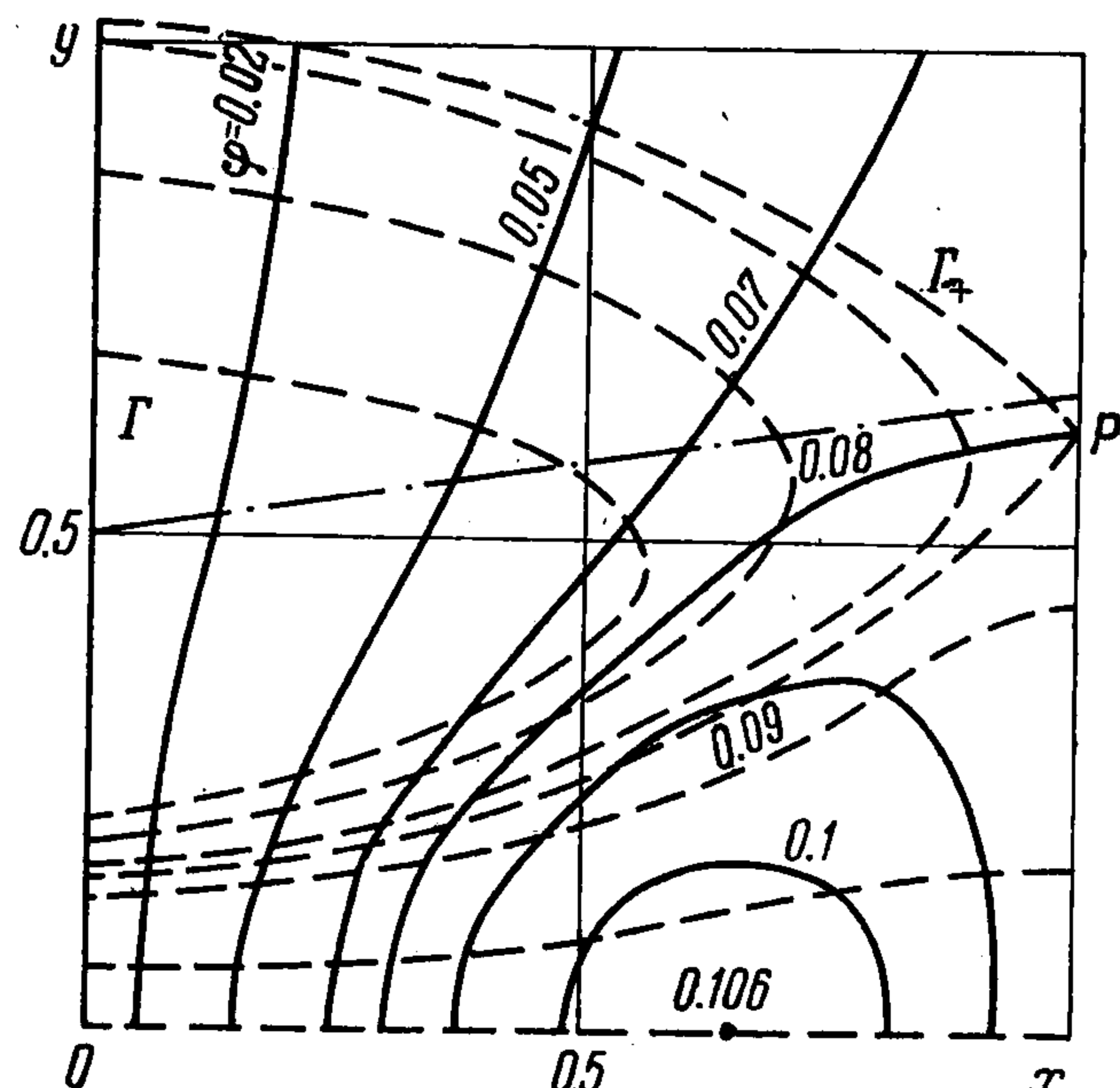
Из точки  $P$  идет отраженная характеристика до пересечения с плоскостью  $x = 0$ . Эта характеристика является внешней границей  $\Gamma_+$  электрической струи, выше которой  $q \equiv 0$ . Таким образом, заряженные частицы занимают уже ограниченную область межэлектродного промежутка. Так же, как и в п. 3, имеется граница  $\Gamma$ , левее которой  $q = 0$ . Дальнейший рост  $\varphi_+$  сопровождается опусканием к оси  $y = 0$  границы  $\Gamma_+$  и деформацией  $\Gamma$ .

На фиг. 4 нанесены границы электрических струй  $\Gamma_+$  (пунктирные линии) и  $\Gamma$  (сплошные) для  $a = 0.4$ ,  $\beta = 2$  и разных  $\varphi_+$  (штрих-пунктирная линия — граница гидродинамической струи). С увеличением  $\varphi_+$  область течения уменьшается, а зона обратного тока растет. При некоторой величине  $\varphi_+ = \varphi_+^*$  заряженные частицы, выходящие из одного (центрального) участка эмиттера  $0 \leq y \leq a/2$ , начинают частично возвращаться на другой (верхний) участок. Такой верхний участок должен отключаться и, тем самым, полезная площадь эмиттера сокращается. В пределе должен отключиться весь эмиттер (полное запираание источника).

На фиг. 5 изображена структура течения для  $a = 0.4$ ,  $\beta = 2$  и  $\varphi_+ = 0.08$ , где пунктирные линии — траектории движения заряженных частиц. Существует приходящая в особую точку нейтральная характеристика, которая вместе с  $\Gamma_+$  и  $\Gamma$  ограничивает зону обратного тока. Видно, что



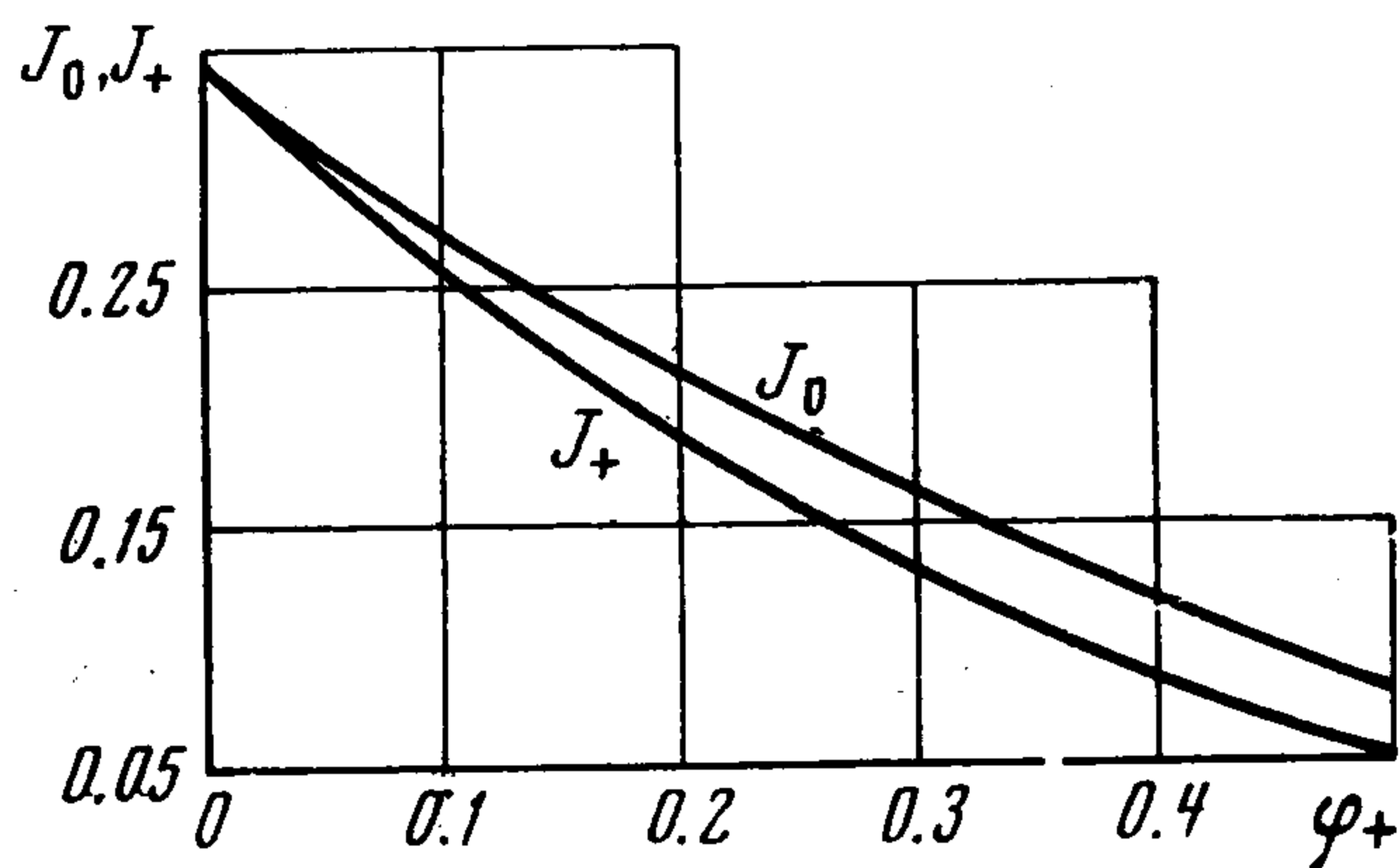
Фиг. 4



Фиг. 5

поворот частиц на электрод  $x=0$  осуществляется и вблизи коллектора. Заметим, что величина плотности заряда на  $\Gamma_+$  терпит разрыв. Картина эквипотенциальных линий на фиг. 5 (сплошные линии) дает представление о действии электрических сил на частицу ( $a = 0.4$ ,  $\beta = 2$ ,  $\varphi_+ = 0.08$ ).

Изменение интегральных параметров  $J_0$ ,  $J_+$ , определенных формулами (2.3), в зависимости от величины тормозящего потенциала  $\varphi_+$  для



Фиг. 6

случая  $a = 0.4$ ,  $\beta = 2$  представлено на фиг. 6. Существенно, что  $J_0(\varphi_+)$  и  $J_+(\varphi_+)$  — убывающие функции. Уменьшение  $J_0$  обусловлено эффектом запирания источника, а уменьшение  $J_+$  — суммарным эффектом запирания и обратного тока. При значениях  $\varphi_+$ , когда обратный ток отсутствует,  $J_0 = J_+$ . Величина обратного тока  $J_0 - J_+$  с увеличением  $\varphi_+$  воз-

растает и при  $\varphi_+ = 0.32$  достигает 23% от величины  $J_0$ . Представленные результаты показывают, что роль обратного тока при  $\varphi_+ \neq 0$  чрезвычайно возрастает. Но все же главный вклад в уменьшение  $J_0$  вносит эффект запирания источника. Например, при  $\varphi_+ = 0.32$  суммарный эффект составляет 75%, а эффект запирания — 54%.

В заключение укажем на особенность деформации области течения с ростом  $\varphi_+$  в случае, когда обратный ток существует уже при  $\varphi_+ = 0$  (например  $a = 0.4$ ,  $\beta = 4$ ). При увеличении  $\varphi_+$  зона течения изменяется от

бесконечно большой, так как особая точка сразу возникает на бесконечности, до локализованной в центральной части у оси  $y = 0$ .

Автор благодарит А. Б. Ватажина за помощь в работе.

Поступила 21 III 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А. Б., Грабовский В. И. Распространение униполярно заряженных струй в гидродинамических потоках. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
2. Бучин В. А. Задача об электрогидродинамическом зонде, не возмущающем распределений плотности тока и объемного заряда. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
3. Ушаков В. В. О построении приближенных решений двумерных потенциальных задач электрогидродинамики. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.
4. Бучин В. А. Некоторые точные решения системы уравнений электрогидродинамики. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
5. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1964.