Прикладная математика и механика. Том. 37, 1973

УДК 538.4

ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ В НЕПРОВОДЯЩЕЙ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

И. Е. Тарапов

(Харьков)

Рассматривается распространение волн малой амплитуды в непроводящей изотропно намагничивающейся среде. Получены уравнения простых волн. Подробно проанализированы простые волны в намагничивающемся идеальном газе. Для идеального газа и намагничивающейся жидкости рассмотрен вопрос устойчивости и определены значения параметров, при которых фазовые скорости волн становятся мнимыми.

Движение среды, которая не проводит тока, но способна изотропно и неоднородно намагничиваться во внешнем электромагнитном поле, может быть описано следующей системой уравнений [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \qquad \rho T \frac{d}{dt}(s + s^*) = \tau_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \lambda^\circ \Delta T \tag{1}$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla (p + \psi) - M \nabla H = \eta_1 \Delta \mathbf{v} + \left(\eta_2 + \frac{1}{3}\eta_1\right)\nabla \operatorname{div} \mathbf{v}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \qquad \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi M(\rho, T, H)\mathbf{H}/H, \qquad p = p(\rho, s), \qquad T = T(\rho, s)$$

$$\left(\psi = \int_0^H \left\{M - \rho\left(\frac{\partial M}{\partial \rho}\right)_{T,H}\right\} dH, \qquad s^* = \frac{1}{\rho}\int_0^H \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_{\rho,H} dH\right)$$

Здесь τ_{ik} — тензор вязких напряжений, λ°, η_1, η_2 — постоянные коэффициенты теплопроводности, первой и второй вязкости, $M(\rho, T, H) \equiv (4\pi)^{-1}(\mu - 1) H$ — функция намагниченности (считается известной), $\mu = \mu(\rho, T, H)$ — магнитная проницаемость среды, причем диэлектрическая проницаемость ε постоянна, а свободные заряды отсутствуют.

Распространение плоских волн малой амплитуды в такой среде описывается следующей системой семи уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + x_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x} = d_{ik}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots 7) \tag{2}$$

$$u_1 \equiv \rho', \; u_2 \equiv s', \; u_3 \equiv v_x', \; u_4 \equiv B_y', \; u_5 \equiv B_z', \; u_6 \equiv E'_y, \; u_7 \equiv E_z'$$

Здесь через u_i обозначены возмущения переменных, а матрицы $\|x_{ik}\|$, $\|d_{ik}\|$ имеют следующие отличные от нуля компоненты:

$$x_{13} = \rho, \quad x_{23} = \rho N [m\mu_T B^2(\mu_\rho + \mu_T T_\rho) - s_\rho^* - s_T^* T_\rho] \tag{3}$$

$$x_{26} = -cm\mu\mu_T N B_z, \qquad x_{27} = -x_{26} B_y / B_z$$

$$x_{31} = (p_\rho + \psi_\rho + \psi_T T_\rho)/\rho + m\rho\mu_\rho B^2(\mu_\rho + \mu_T T_\rho)$$

$$x_{32} = (p_s + \psi_T T_s) / \rho + m\rho\mu_\rho B^2 \mu_T T_s$$
$$x_{34} = -m\mu\mu_\rho \rho B_y, \qquad x_{35} = x_{34} B_z / B_y, \qquad x_{47} = -x_{56} = -c$$
$$x_{61} = -4\pi\rho\mu\varepsilon^{-1} mc (\mu_\rho + \mu_T T_\rho) B_z$$
$$x_{62} = -4\pi\rho\mu\varepsilon^{-1} mc\mu_T T_s B_z, \qquad x_{64} = -4\pi\rho mc\mu_H \varepsilon^{-1} B^{-1} B_y B_z$$
$$x_{65} = 4\pi\rho mc\varepsilon^{-1} [\mu^2 + \mu_H B^{-1} (B_x^2 + B_y^2)]$$
$$x_{71} = -x_{61} B_y / B_z, \qquad x_{72} = -x_{62} B_y / B_z$$
$$x_{74} = -4\pi\rho mc\varepsilon^{-1} [\mu^2 + \mu_H B^{-1} (B_x^2 + B_z^2)], \; x_{75} = -x_{64}$$
$$d_{21} = N\lambda^\circ T_\rho / \rho T, \quad d_{22} = N\lambda^\circ T_s / \rho T, \quad d_{33} = (\eta_2 + {}^4/_3\eta_1) / \rho$$
$$(m^{-1} = 4\pi\rho\mu (\mu^2 + \mu_H B), \; N^{-1} = 1 + T_s (s_T{}^* - m\mu_T{}^2 B^2))$$

Что касается четырех скалярных переменных v'_y, v_z', B_x', E_x' системы (1), то они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial E_x'}{\partial x} = \frac{\partial E_x'}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial B_x'}{\partial x} = \frac{\partial B_x'}{\partial t} = 0 \tag{4}$$
$$\rho \frac{\partial v_y'}{\partial t} = \eta_1 \frac{\partial^2 v_y'}{\partial x^2}, \qquad \rho \frac{\partial v_z'}{\partial t} = \eta_1 \frac{\partial^2 v_z'}{\partial x^2}$$

из которых следует: $B_x' = \text{const}$, $E_x' = \text{const}$, возмущения v_x', v_z' (в уравнения (2) они не входят) в недиссипативной системе ($d_{ik} = 0$) также не меняются в плоской волне, а в общем случае их начальные значения диффундируют в среду независимо от распространения волн.

Возмущение поля $\mathbf{H}'$ исключено из (2) при помощи линейного соотношения

$$(4\pi\rho m)^{-1} \mathbf{H}' = \mathbf{l}_1 \rho' + \mathbf{l}_2 s' + \mathbf{l}_4 B_y' + \mathbf{l}_5 B_z' \tag{5}$$
$$\mathbf{l}_1 = -\mathbf{B} (\mu_\rho + \mu_T T_\rho) \mu, \qquad \mathbf{l}_2 = -\mathbf{B} T_s \mu$$
$$\mathbf{l}_4 = (-\mu_H B_x B_y B^{-1}, \quad \mu^2 + \mu_H B^{-1} (B_x^2 + B_z^2), \quad -\mu_H B_y B_z B^{-1})$$
$$\mathbf{l}_5 = (-\mu_H B_x B_z B^{-1}, \quad -\mu_H B_y B_z B^{-1}, \quad \mu^2 + \mu_H B^{-1} (B_x^2 + B_y^2))$$

Уравнения (2), (4) и (5) получены из системы (1) линеаризацией относительно невозмущенного состояния среды при малых возмущениях u_i, зависящих только от x, t. При этом невозмущенное состояние среды определяется постоянными значениями параметров $\mathrm{v} = 0$, ρ, p, s, T, $\mathbf{B}$, $\mathbf{E}$ и производных

$$p_\rho \equiv \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad p_s \equiv \frac{\partial p}{\partial s}, \quad T_\rho \equiv \frac{\partial T}{\partial \rho}, \quad T_s \equiv \frac{\partial T}{\partial s}, \quad \mu_H \equiv \frac{\partial \mu}{\partial H},$$
$$\mu_T \equiv \frac{\partial \mu}{\partial T}, \quad \mu_\rho \equiv \frac{\partial \mu}{\partial \rho}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением недиссипативной непроводящей среды, т. е. будем считать $d_{ik} = 0$. (Отметим, что в работе [2] среда, для которой в примерах рассматривалось распространение звуковых волн, ошибочно названа непроводящей.) Отыскивая решение системы (2) в виде $u_m = u_m{}^\circ \exp(ikx - i\omega t)$, получаем для определения фазовых скоростей волн $\lambda \equiv \omega / k$ характеристическое уравнение вида

$$\lambda [\lambda^6 - \lambda^4 (A_1 + c^2 A_2) + \lambda^2 c^2 (A_3 + c^2 A_4) + c^4 A_5] = 0 \tag{6}$$

где коэффициенты A_i не зависят от c.

Выражения коэффициентов этого уравнения через элементы матрицы x_{ik} довольно громоздки и поэтому здесь не приводятся. Отыскивая корни этого уравнения в виде разложения

$$\lambda^2 = a_m c^{2m} + a_{m-1} c^{2(m-1)} + \ldots + a_0 + a_{-1} c^{-2} + \ldots$$

можно показать, что для m возможны только два значения: $m = 0$ и $m = 1$. Тогда, отбрасывая слагаемые порядка c^{-2}, получаем корни характеристического уравнения (6) в виде

$$\begin{aligned}
(7)\qquad & \lambda_1 = 0, \qquad \lambda_{2,3} = \pm c / \sqrt{\mu\varepsilon} \\
& \lambda_{4,5} = \pm \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \left(1 + L_2 \frac{B_z^2 + B_y^2}{B^2}\right)^{1/2} \\
& \lambda_{6,7} = \pm \left[\rho x_{31} + x_{23} x_{32} - L_1 \frac{B_z^2 + B_y^2}{B^2} \left(1 + L_2 \frac{B_z^2 + B_y^2}{B^2}\right)^{-1}\right]^{1/2} \\
& L_1 = 4\pi\rho\mu^3 m^2 B^2 (\rho\mu_\rho + N\mu_T x_{32}) [\rho (\mu_\rho + \mu_T T_\rho) + \mu_T T_s x_{23}] \\
& L_2 = (m\mu^2 \mu_T^2 T_s N B^2 - \mu_H^- B)(\mu^2 + \mu_H B)^{-1}
\end{aligned}$$

Семь корней (7) уравнения (6) определяют три различных типа волн:

1) энтропийная волна с фазовой скоростью λ_1,

2) первая электромагнитная волна с фазовой скоростью $\lambda_{2,3}$ и вторая электромагнитная волна с фазовой скоростью $\lambda_{4,5}$,

3) магнитогидродинамическая волна с фазовой скоростью $\lambda_{6,7}$.

Вторая электромагнитная и магнитогидродинамическая волны обладают анизотропией, т. е. скорость распространения их фронта зависит от его ориентации относительно поля **B**.

Как известно [3], простые волны тесно связаны с волнами малой амплитуды. В рассматриваемом случае дифференциальные уравнения простых волн могут быть записаны в виде

$$(8)\qquad \frac{du_1}{r_1^{(\lambda)}} = \frac{du_2}{r_2^{(\lambda)}} = \ldots = \frac{du_7}{r_7^{(\lambda)}}.$$

Здесь $r_1^{(\lambda)}, r_2^{(\lambda)}, \ldots, r_7^{(\lambda)}$ — компоненты правого собственного вектора матрицы $\|x_{ik}\|$, соответствующего данной фазовой скорости λ. Выражения для этих компонент, которые пропорциональны амплитудам соответствующих волн, в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned}
(9)\qquad & r_1 = \lambda^6 - \lambda^4 (x_{23} x_{32} + c^2 R_{11}) + \lambda^2 c^2 (R_{12} + c^2 R_{13}) - c^4 R_{14} \\
& r_2 = \lambda^4 (x_{23} x_{31} + c^2 R_{21}) + \lambda^2 c^2 (R_{22} + c^2 R_{23}) + c^4 R_{24} \\
& r_3 = \lambda^5 x_{31} - \lambda^3 c^2 R_{31} + \lambda c^4 R_{32} \\
& r_4 = -\lambda^4 c x_{71} - \lambda^2 c^2 (R_{41} + c^2 R_{42}) - c^4 R_{43} \\
& r_5 = \lambda^4 c x_{61} - \lambda^2 c^2 (R_{51} + c^2 R_{52}) - c^4 R_{53} \\
& r_6 = \lambda^5 x_{61} - \lambda^3 c (R_{61} + c^2 R_{62}) + \lambda c^3 R_{63} \\
& r_7 = -\lambda^5 x_{71} + \lambda^3 c (R_{71} + c^2 R_{72}) + \lambda c^3 R_{73}
\end{aligned}$$

Необходимые для дальнейшего величины R_{ik} имеют следующие значения:

(10)
$$R_{11} = 4\pi\rho m\varepsilon^{-1}[\mu^2 + \mu_H B_x{}^2 B^{-1} + m\mu^2\mu_T{}^2 N T_s (B^2{}_y + B_z{}^2)] + (\mu\varepsilon)^{-2}$$
$$R_{13} = (\mu\varepsilon)^{-1} R_{11} - (\mu\varepsilon)^{-2}$$
$$R_{14} = 4\pi\rho m\mu^{-1}\varepsilon^{-2}x_{23}[x_{32}(\mu^2 + \mu_H B_x{}^2 B^{-1}) - m\mu^2\mu_\rho\mu_T\rho T_s (B_y{}^2 + B_z{}^2)]$$
$$R_{21} = 4\pi\rho m^2\mu^2\mu_T N\varepsilon^{-1}(\mu_\rho + \mu_T T_\rho)(B_z{}^2 + B_y{}^2) = -\varepsilon\mu R_{23}$$
$$R_{24} = 4\pi\rho m\mu^{-1}\varepsilon^{-2}x_{23}[x_{31}(\mu^2 + \mu_H B_x{}^2 B^{-1}) - m\mu^2\mu_\rho\rho(\mu_\rho + \mu_T T_\rho)(B^2{}_z + B_y{}^2)]$$
$$R_{32} = x_{31}[1 + L_2(B_y{}^2 + B_z{}^2)B^{-2}]\mu^{-2}\varepsilon^{-2} - 4\pi\rho\mu m^2\varepsilon^{-2}(\mu_\rho + \mu_T T_\rho)(\rho\mu_\rho + \mu_T x_{32}N)(B_z{}^2 + B_y{}^2)$$
$$R_{42} = -4\pi\rho m\varepsilon^{-2}B_y(\mu_\rho + \mu_T T_\rho)$$
$$R_{43} = 4\pi\rho m\varepsilon^{-2}B_y x_{23}[x_{32}(\mu_\rho + \mu_T T_\rho) - \mu_T T_s x_{31}]$$
$$R_{52} = R_{42}B_z B_y{}^{-1}, \qquad R_{53} = R_{43}B_z B_y{}^{-1}$$
$$R_{62} = R_{52}, \qquad R_{72} = R_{42}$$

Исходя из выражений (9), для каждого значения фазовой скорости λ получаем соответствующие дифференциальные уравнения простых волн, причем в $r_i^{(\lambda)}$ отбрасываются слагаемые, имеющие порядок c^{-2} и выше.

Уравнения для энтропийной простой волны ($\lambda = 0$) имеют вид

(11)
$$\frac{d\rho}{-R_{14}} = \frac{ds}{R_{24}} = \frac{dv_x}{0} = \frac{dB_y}{-R_{43}} = \frac{dB_z}{-R_{43}B_z B_y^{-1}} = \frac{dE_y}{0} = \frac{dE_z}{0}$$

Отсюда следует, что в энтропийной простой волне не меняется скорость и электрическое поле. В отличие от энтропийной волны в немагнитной среде, здесь меняется и поле **B**, но волна является плоско-поляризованной, ибо из (11) следует $B_z B_y{}^{-1} = \mathrm{const}$. Выбирая систему координат так, чтобы в ней $B_z = 0$, из (11) получаем

(12)
$$\frac{ds}{d\rho} = -\frac{R_{24}}{R_{14}}, \qquad \frac{dB_y}{d\rho} = \frac{R_{43}}{R_{14}}, \qquad v_x, E_y, E_z = \mathrm{const}$$

Уравнения, определяющие вторую электромагнитную простую волну в намагничивающейся среде ($\lambda = \lambda_{4,5}$), после вычисления соответствующих коэффициентов приобретают следующий вид:

(13)
$$\frac{d\rho}{0} = \frac{ds}{m\mu\mu_T N B_y{}^2} = \frac{dv_x}{0} = \frac{dB_y}{-B_y} = \frac{dB_z}{-B_z} = \frac{dE_y}{-\lambda c^{-1}B_z} = \frac{dE_z}{\lambda c^{-1}B_y}$$

Таким образом, в простой второй электромагнитной волне не меняется плотность и скорость среды. Эта волна также является плоско-поляризованной. Тогда, полагая $B_z = 0$, из (13) имеем

(14)
$$\frac{dE_z}{dB_y} = -\frac{\lambda_{4,5}}{c}, \qquad \frac{ds}{dB_y} = -m\mu\mu_T N B_y, \qquad \rho, v_x, E_y = \mathrm{const}$$

В первой электромагнитной волне ($\lambda = \lambda_{2,3}$) меняется только электрическое и магнитное поле. Волна также плоско-поляризована.

Наконец, рассмотрим магнитогидродинамические простые волны в намагничивающейся среде. В силу (7), (9) и (10) для $\lambda = \lambda_{6,7}$ из (8) получаем

$$(15)\qquad \frac{d\rho}{\rho R_{32}} = \frac{ds}{\lambda^2 R_{23} + R_{24}} = \frac{dv_x}{\lambda R_{32}} = \frac{dB_y}{-(\lambda^2 R_{42} + R_{43})} =$$

$$= \frac{dB_z}{-B_z B_y^{-1}(\lambda^2 R_{42} + R_{43})} = \frac{dE_y}{0} = \frac{dE_z}{0}$$

Таким образом, в простой магнитогидродинамической волне не меняется только электрическое поле. Как и предыдущие волны, эта волна также плоско-поляризована. Тогда, полагая $B_z = 0$, получаем из (15)

$$(16)\qquad \frac{dv_x}{d\rho} = \frac{\lambda_{6,7}}{\rho}, \qquad \frac{ds}{d\rho} = -\frac{R_2}{R_1}, \qquad E_y, E_z = \text{const},$$

$$\frac{dB_y}{d\rho} = 4\pi m B_y \mu^2 \left(1 + L_2 \frac{B_y{}^2}{B^2}\right)^{-1} (\mu_T T_s x_{23} + \rho(\mu_\rho + \mu_T T_\rho))$$

$$R_1 = \rho x_{31} \mu^{-2} \varepsilon^{-2} (1 + L_2 B_y{}^2 B^{-2}) - 4\pi\rho\mu\varepsilon^{-2} m^2 (\mu_\rho + \mu_T T_\rho) \times$$
$$\times (\rho\mu_\rho + \mu_T N x_{32}) B_y{}^2$$

$$R_2 = 4\pi\rho m \mu^{-1} \varepsilon^{-2} [m\mu^2 (\mu_\rho + \mu_T T_\rho)(x_{23}\rho\mu_\rho + \lambda^2 \mu_T N) B_y{}^2 -$$
$$- x_{23} x_{31} (\mu^2 + \mu_H B^2{}_x B^{-1})]$$

Все эти типы простых волн существуют, если фазовые скорости действительны. Как следует из выражений (7), величины $\lambda_{4,5}$ и $\lambda_{6,7}$ в намагничивающейся среде при некоторых значениях параметров могут быть чисто мнимыми. При этом система (2) перестает быть гиперболической и состояние среды становится неустойчивым. Подобного рода неустойчивость уже отмечалась в магнитной газодинамике при рассмотрении волн в плазме с анизотропным давлением [4], а также при анализе звуковых волн в намагничивающейся проводящей среде [2].

Будем считать, что намагничивающаяся непроводящая среда становится неустойчивой и ее движение уже не может быть описано системой (1), если найдется такое $\vartheta \equiv \arcsin B_y B^{-1}$, что или $\lambda_{4,5}$, или $\lambda_{6,7}$ становятся мнимыми. Это может быть в одном из следующих трех случаев:

$$(17)\qquad 1)\ L_2 + 1 < 0, \qquad 2)\ \rho x_{31} + x_{23} x_{32} < 0, \qquad 3)\ \rho x_{31} + x_{23} x_{32} > 0$$
$$L_2 + 1 \leqslant 0 \qquad (1 + L_2)(\rho x_{31} + x_{23} x_{32}) - L_1 \gtrless 0$$

В первом случае неустойчива вторая электромагнитная волна, а в остальных — магнитогидродинамическая волна. Заметим, что в немагнитной среде ни один из этих случаев осуществиться не может.

Рассмотрим некоторые модели намагничивающихся сред.

Состояние идеального газа в слабых магнитных полях может быть описано следующими уравнениями (R — газовая постоянная, $\varkappa = c_p / c_v$ — отношение теплоемкостей):

$$(18)\qquad p = \rho^\varkappa \exp(s / c_v), \quad T = R^{-1} \rho^{\varkappa - 1} \exp(s / c_v)$$
$$\mathbf{B} = \mu(\rho, T)\mathbf{H}, \quad T(\mu - 1) / \mu\rho = \text{const}$$

В этом случае

$$L_1 = a^2 \frac{\alpha(\mu-1)(2-\varkappa+\varkappa\alpha)^2}{(\varkappa-1)(1+\varkappa\alpha)^2}, \qquad L_2 = \frac{\varkappa\alpha(\mu-1)}{1+\varkappa\alpha}$$

$$(\alpha \equiv (\mu-1)(\varkappa-1)B^2(4\pi\rho\mu a^2)^{-1}, \ a^2 \equiv p_\rho = \varkappa RT)$$

Поэтому из (7), полагая $B_z = 0$, получаем

$$\lambda_{4,5} = \pm \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(1 + \frac{\varkappa\alpha(\mu-1)}{1+\varkappa\alpha}\sin^2\vartheta\right)^{1/2} \tag{19}$$

$$\lambda_{6,7} = \pm a\delta_0^{1/2}\left(\frac{\delta_1+\sin^2\vartheta}{\delta_2+\sin^2\vartheta}\right)^{1/2}$$

$$\delta_0 \equiv \frac{3\varkappa-4-\varkappa\alpha}{\varkappa(\varkappa-1)}, \qquad \delta_1 \equiv \frac{(\varkappa-1)(1+\alpha)}{\alpha(\mu-1)(3\varkappa-4-\varkappa\alpha)}, \qquad \delta_2 = \frac{1+\varkappa\alpha}{\varkappa\alpha(\mu-1)}$$

Анализ этих выражений показывает, что идеальный намагничивающийся газ при $\mu > \varkappa^{-1}$, $2 > \varkappa > 4/3$ устойчив только в следующем диапазоне значений безразмерного параметра α:

$$-\varkappa^{-1} < \alpha < \alpha^*$$

$$\alpha^* \equiv \frac{1}{2\varkappa}\left(3\varkappa + 4 - \frac{\varkappa-1}{\mu-1}\right) + \sqrt{\frac{1}{4\varkappa^2}\left(3\varkappa - 4 + \frac{\varkappa-1}{\mu-1}\right)^2 + \frac{\varkappa-1}{\varkappa(\mu-1)}}$$

Таким образом, диамагнетик ($\mu < 1$) и соответственно парамагнетик ($\mu > 1$) в полях

$$B > \sqrt{\frac{4\pi\mu p}{(\varkappa-1)(1-\mu)}} \quad (\mu<1), \qquad B > \sqrt{\frac{4\pi\mu\varkappa\alpha^* p}{(\varkappa-1)(\mu-1)}} \quad (\mu>1) \tag{20}$$

должны находиться в состоянии неустойчивости в описанном выше смысле.

При обычных условиях ($p \sim 10^6$ *дин/см*^{2}) нарушение устойчивости следует ожидать при достаточно больших значениях $|\mu - 1|$, ибо величина поля **B** ограничена предположением о линейности между **B** и **H**. Если же считать, что закон намагничивания Клазиуса — Моссоти имеет место и в сильных полях, то при $|\mu - 1| \sim 10^{-6}$ неустойчивость, согласно (20), может наступать в полях порядка 100 тл.

Рассмотрим уравнения простых волн для идеального газа (18).

Для энтропийной волны, на основании (10), (11) и (18) получаем

$$\frac{ds}{d\rho} = -\frac{\varkappa R}{(\varkappa-1)\rho}\left(1 - \frac{\alpha(\mu-1)(2-\varkappa)B_y^2}{(\varkappa-1)B^2}\right)\left(1 + \frac{\varkappa\alpha(\mu-1)B_y^2}{(\varkappa-1)B^2}\right)^{-1} \tag{21}$$

$$\frac{dB_y}{d\rho} = \frac{2B_y(\mu-1)}{\rho}\left(1 + \frac{\varkappa\alpha(\mu-1)B_y^2}{(\varkappa-1)B^2}\right)^{-1}$$

Если учесть, что на основании (18)

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\varkappa-1}\exp\left(-\frac{s_0-s}{c_v}\right), \qquad \frac{\mu-1}{\mu} = \frac{\mu_0-1}{\mu_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2-\varkappa}\exp\left(\frac{s_0-s}{c_v}\right) \tag{22}$$

$$\alpha = \alpha_0\left(\frac{B}{B_0}\right)^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2(1-\varkappa)}\exp\left(\frac{2(s_0-s)}{c_v}\right) \qquad \left(\alpha_0 \equiv \frac{(\mu_0-1)(\varkappa-1)B^2}{4\pi\rho_0\mu_0 a_0^2}\right)$$

то, следовательно, для получения уравнений простых волн в конечном виде необходимо проинтегрировать нелинейную систему (21) довольно сложного вида. Хотя некоторые общие выводы относительно интегральных кривых и можно сделать на основании (21), ограничимся рассмотрением малых значений $|\mu_0 - 1|$. Отбрасывая в (21) слагаемые порядка $(\mu_0 - 1)^2$ и выше, получим после интегрирования

$$s - s_0 = \varkappa c_v \ln(\rho_0 / \rho), \quad B_y - B_{y0} = B_{y0}(\mu_0 - 1)[(\rho / \rho_0)^2 - 1]$$

Первое уравнение выражает факт, что давление в энтропийной волне не меняется (с точностью до $(\mu_0 - 1)^2$), а второе уравнение определяет изменение магнитной индукции как функцию плотности.

Для второй электромагнитной волны на основании (7) и (19) имеем

$$\frac{ds}{dB_y} = \frac{B_y(\mu - 1)}{4\pi\rho\mu T(1 + \varkappa\alpha)}, \qquad \frac{dE_z}{dB_y} = \pm \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(1 + \frac{\varkappa\alpha(\mu - 1)B_y^2}{(1 + \varkappa\alpha)B^2}\right)^{1/2} \tag{23}$$

Пусть Λ — скорость распространения волны относительно выбранной системы координат, так что $\Lambda = v_x + \lambda$.

В электромагнитных простых волнах ρ и v_x не меняются, поэтому, используя (7), (13) и (18), получаем

$$\frac{d\Lambda_{4,5}}{dB_y} = \frac{3cB_y\varkappa\alpha(\mu - 1)}{2\sqrt{\varepsilon}\,\lambda_{4,5}\mu B^2(1 + \varkappa\alpha)}\left(1 - \frac{\varkappa\alpha(5 + 3\varkappa\alpha)B_y^2}{3(1 + \varkappa\alpha)^2 B^2}\right)$$

Отсюда видно, что при $\varkappa\alpha > -1$ скорость распространения этих волн больше там, где B_y больше, так что эти волны при распространении «захлестываются» и приводят к скачкам величин B_y, s, E_z.

Уравнения (23) допускают интегрирование. Действительно, подставляя в первое уравнение (23) выражения (22) и интегрируя его, получаем

$$B^2 = B_{x0}^2 + B_y^2 = B_0^2\left(1 - \frac{2(s_0 - s)}{\varkappa\alpha_0 c_v}\right)\exp\left(-\frac{2(s_0 - s)}{c_v}\right)$$

Тогда из второго уравнения (23) имеет

$$E_z - E_{z0} = \pm \int\limits_{B_{y0}}^{B_y}\left(1 + \frac{\varkappa\alpha(\mu - 1)B_y^2}{(1 + \varkappa\alpha)B^2}\right)^{1/2}\frac{dB_y}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Электромагнитные простые волны для случая $\varepsilon = \varepsilon(E)$, $\mu = \mu(H)$ изучены в [5]. Уравнения этого типа могут быть получены из (13), если положить $\mu_T = 0$.

Уравнения простых магнитогидродинамических волн в идеальном газе, имеют, согласно (15) и (19), следующий вид:

$$\frac{dv_x}{d\rho} = \pm\frac{a}{\rho}\delta_0^{1/2}\left(\frac{\delta_1 + B_y^2B^{-2}}{\delta_2 + B_y^2B^{-2}}\right)^{1/2}, \quad \frac{dB_y}{d\rho} = \frac{B_y(\mu - 1)(\alpha\varkappa + 2 - \varkappa)}{\rho[1 + \alpha\varkappa + (\mu - 1)\varkappa\alpha B_y^2B^{-2}]} \tag{24}$$

$$\frac{ds}{d\rho} = \frac{\alpha\varkappa R}{\rho}\,\frac{(\mu - 1)(2 - \varkappa)(\alpha + \lambda_{6,7}a^{-2})B_y^2 - B^2(\varkappa - 1)}{B^2(\varkappa - 1)(1 + \varkappa\alpha) + \alpha(\mu - 1)B_y^2[\alpha\varkappa(\varkappa - 2) + 3\varkappa - 4]}$$

Отсюда следует, что в парамагнетике всегда $dB_y / d\rho > 0$, так что поле возрастает в местах уплотнения газа.

Отбрасывая члены порядка $(\mu_0 - 1)^2$ и выше, из (24) получаем после интегрирования

$$v_x - v_{x0} = \frac{2a_0}{\varkappa - 1}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\varkappa-1)/2} - 1 + \frac{\alpha_0(\varkappa - 1)}{6}\left(\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{3(1-\varkappa)/2} - 1\right)\right]$$

$$B_y - B_{y0} = B_{y0}(\mu_0 - 1)\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{2-\varkappa} - 1\right]$$

$$s - s_0 = \frac{\varkappa R\alpha_0}{2(\varkappa - 1)}\left[\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2(\varkappa-1)} - 1\right]$$

При этом, поскольку

$$\frac{d\Lambda_{6,7}}{d\rho} = \frac{a_0(\varkappa+1)}{2\rho_0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\varkappa-3)/2}\left[1 - \frac{\alpha_0(\varkappa-1)(5-3\varkappa)}{2(\varkappa+1)}\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2(\varkappa-1)}\right]$$

то в парамагнетике ($\alpha_0 > 0$) различие в скоростях распространения точек с разными плотностями меньше, чем в немагнитном газе, так что превращение простых волн в скачки затягивается по времени. В диамагнетике, наоборот, образование скачков идет более интенсивно.

Рассматривая идеальный газ в сильных полях, когда его состояние характеризуется магнитным насыщением, можно принять

$$M = \rho K(\theta - T) \quad (\theta > T,\ K = \mathrm{const}) \tag{25}$$

В этом случае

$$L_1 = \mu\beta\frac{a^2(\tau-\varkappa)^2}{\varkappa(\varkappa-1)(1-\beta)^2}, \qquad L_2 = \frac{\mu}{1-\beta} - 1$$

$$(\tau \equiv \theta T^{-1} > 1, \qquad \beta \equiv 4\pi\rho K^2 T c_v^{-1})$$

Анализ выражений $\lambda_{4,5}$ и $\lambda_{6,7}$ для случая насыщенного идеального газа показывает, что неустойчивость наступает при $\beta > 1$. Заметим, что безразмерный параметр β не зависит от магнитного поля, а условие $\beta > 1$ может быть записано в виде

$$M > a(\tau - 1)\rho^{1/2}(4\pi\varkappa(\varkappa - 1))^{-1/2}$$

Уравнения простых волн в насыщенном газе принципиально не отличаются от рассмотренных выше и могут быть выписаны на основании (25), (3), (8) — (10).

Наконец, рассмотрим намагничивающуюся среду, по своим свойствам близкую ферромагнитным жидкостям [6]. Будем считать, что состояние среды в отсутствие электромагнитного поля описывается уравнением

$$T = T(s, \rho(p, T)) = T^\circ(s, p) \tag{26}$$

причем для нее из эксперимента известны: изэнтропическая скорость звука $a_s\ (\equiv \sqrt{p_\rho})$, коэффициент теплового расширения $\gamma_1 \equiv -\rho_T / \rho$, коэффициент изотермического сжатия $\gamma_2 \equiv \rho_p / \rho$, теплоемкость при постоянном давлении $c_p \equiv T / T_s^\circ$.

Тогда для этой среды в формулах (3) следует заменить T_ρ и T_s значениями, полученными на основании уравнения (26), а именно

$$T_\rho = T_p^\circ / \rho\gamma_2, \quad T_s = T(1 - T_\rho\rho_T)c_p^{-1} = T(1 + T_p^\circ\gamma_1\gamma_2^{-1})c_p^{-1}$$

$$(T_s^\circ = T_s + T_\rho\rho_T T_s^\circ)$$

Что касается значения $T_p^\circ \equiv (\partial T^\circ / \partial p)_s$, то примем $T_p^\circ = T / p$ — это подтверждается опытами для большинства жидкостей [7]. Кроме того, для простоты дальнейших выкладок будем считать $\mu_\rho = 0$, т. е. пренебрежем, как это иногда делается для жидких магнетиков, магнитострикционными эффектами. Отметим, что звуковые волны в ферромагнитных жидкостях рассматривались также в работах [8,9].

Для насыщенного жидкого магнетика при $M = K_0(\theta - T)$ имеем

$$N^{-1} = 1 - \frac{4\pi K_0^2 T}{\rho c_p}\left(1 + \frac{\gamma_1 T}{\gamma_2 p}\right), \qquad m^{-1} = 4\pi\rho\mu^2$$

$$\rho x_{31} = a_s^2\left(1 - \frac{K_0 HT}{\rho p \gamma_2 a_s^2}\right), \qquad x_{23} = \frac{N}{\rho}\left(\frac{4\pi K_0^2 T}{p\gamma_2} - K_0 H\right)$$

$$x_{32} = -\frac{K_0 HT}{\rho c_p}\left(1 + \frac{\gamma_1 T}{\gamma_2 p}\right)$$

Примем следующие значения порядков для входящих в эти формулы величин, характерные для жидкостей в обычных условиях:

$$\gamma_1 = 10^{-3}\ \textit{град}^{-1},\ \gamma_2 = 10^{-4}\ \textit{атм}^{-1},\ K_0 = 3\cdot 10^{-2}\ \textit{гаусс/град}$$

$$T = 3\cdot 10^2\ \textit{град},\ c_p = 10^{10}\ \textit{эрг / г}\cdot\textit{град},\ a_s = 10^5\ \textit{см / сек}$$

$$\rho = 1\ \textit{г / см}^3,\ p = 10^6\ \textit{дин / см}^2 = 1\ \textit{атм}$$

Тогда, как показывают оценки, наибольший вклад в выражения (7) вносится членом ρx_{31}, так что, отбрасывая слагаемые порядка выше 10^{-6}, получим

$$\lambda_{4,5} = \pm c\varepsilon^{-1/2}, \qquad \lambda_{6,7} = \pm a_s\left(1 - \frac{K_0 HT}{p\gamma_2\rho a_s^2}\right)^{1/2}$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом примере неустойчивость может наступить в полях $H > p\gamma_2\rho a_s^2 / K_0 T \sim 10^5$ *гаусс*.

Автор признателен Л. И. Седову за внимание к работе и ценные замечания, сделанные при ее обсуждении.

Поступила 26 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тарапов И. Е.* К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. Магнитная гидродинамика, 1972, т. 1.
2. *Тарапов И. Е.* Звуковые волны в намагничивающейся среде. ПМТФ, 1973, № 1.
3. *Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В.* Простые волны в магнитной гидродинамике. Ж. техн. физ., 1959, т. 29, вып. 8.
4. *Kato Y., Tajiri M., Taniuti T.* Propagation of hydromagnetic waves in collisionless plasma. J. Phys. Soc. Japan, 1966, vol. 21, No. 4, p. 765—777.
5. *Jeffrey A., Korobeinikov V.* Formation and decay of electromagnetic shock waves. J. Appl. Math. and Phys., 1969, vol. 20, No. 4, p. 440—447.
6. *Neuringer J. L., Rosensweig R. E.* Ferrohydrodynamics. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 12.
7. *Цянь Сюэ-сень.* Физическая механика. М., «Мир», 1965.
8. *Curtis R.* Flows and wave propagation in ferrofluids. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 10.
9. *Берковский Б. М., Баштовой В. Г.* Волны в ферромагнитных жидкостях. Инж.-физ. ж., 1970, т. 18, № 5.