Прикладная математика и механика. Том. 37, 1973

УДК 538.4

ИЗУЧЕНИЕ ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ И НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ СПЛОШНЫХ СРЕД С ПОМОЩЬЮ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

А. Г. Цыпкин

(Москва)

Для построения модели сплошной среды используется вариационное уравнение, предложенное в работах [1, 2], позволяющее получать модели сплошных сред при помощи минимального числа унифицированных физических гипотез. В данной работе при помощи вариационного уравнения получена система уравнений, описывающая макроскопическое движение сплошной среды с учетом эффектов поляризации и намагниченности в рамках специальной теории относительности. Применение четырехмерного пространства — времени и специальной теории относительности требуется для получения согласованной теории электромагнетизма и механики. Рассмотрены некоторые следствия двух возможных разложений суммарного тензора энергии — импульса электромагнитного поля и сплошной среды на тензор энергии — импульса среды и тензор энергии — импульса электромагнитного поля по Минковскому или по Абрагаму соответственно. При отсутствии в среде моментных напряжений и массовых внешних моментов предполагается симметрия суммарного тензора энергии — импульса электромагнитного поля и среды (что равносильно отсутствию или постоянству вдоль мировых линий суммарных собственных внутренних моментов количеств движения электромагнитного поля и среды), и рассмотрены некоторые модели сплошных сред, допускаемые этим предположением.

1. Основные уравнения. В качестве основы для получения согласованной системы уравнений, состоящих из уравнений Максвелла и уравнений механики сплошных сред, возьмем вариационное уравнение в форме [1, 2]

$$\delta \int_{V_4} \Lambda d\tau_4 + \delta W^* + \delta W = 0 \tag{1.1}$$

где V_4 — произвольный четырехмерный объем псевдоевклидова пространства — времени Минковского, элемент объема которого

$$d\tau_4 = \sqrt{-g}\, dx^1 dx^2 dx^3 dx^4, \quad g = \det \|g_{ij}\|$$

Здесь Λ — функция Лагранжа, являющаяся четырехмерным скаляром, δW^* — некоторый функционал, о способе задания которого будет сказано ниже, δW — функционал, определяемый заданием Λ и δW^*, g_{ij} — ковариантные компоненты метрического тензора инерциальной системы координат наблюдателя в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Далее в качестве четырехмерной декартовой системы координат выбирается система координат с метрикой $ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2 dt^2$, где c — скорость света в пустоте, ds — элемент длины дуги в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Здесь и далее принимается, если не оговорено особо, что малые латинские индексы пробегают значения 1, 2, 3, 4; малые греческие индексы — значения 1, 2, 3, а по верхним и нижним совпадающим индексам проводится суммирование.

Зададим суммарный лагранжиан электромагнитного поля и сплошной среды Λ в следующем виде:

$$\Lambda = -\frac{1}{16\pi}F^{ik}F_{ik} + \frac{1}{2}F_{ik}P^{ik} - \rho U(\rho, x^i{}_j, \pi^{ij}, g_{ij}, S, K_B) \tag{1.2}$$

Здесь $x_j^i = \partial x^i(\xi^k)/\partial\xi^j$: $x^i = x^i(\xi^k)$ — закон движения среды; ξ^1, ξ^2, ξ^3, $\xi^4 = \tau$ — координаты точек среды в подвижной сопутствующей системе координат, вмороженной в сплошную среду. В этой системе координат метрика определена формулой

$$ds^2 = g_{\hat{i}\hat{j}}d\xi^i d\xi^j, \quad g_{\hat{i}\hat{j}} = g_{\hat{i}\hat{j}}(\xi^k)$$

(Знаком $\hat{}$ отмечены компоненты тензоров относительно сопутствующей системы координат); F_{ik} — ковариантные компоненты четырехмерного тензора электромагнитного поля в среде, связанные с компонентами четырехмерного векторного потенциала A_k формулами

$$F_{ik} = \nabla_i A_k - \nabla_k A_i$$

где ∇_k — оператор ковариантного дифференцирования в системе координат наблюдателя. Через P^{ij} обозначены компоненты тензора поляризации — намагниченности, рассчитанные на единицу объема среды; по определению положено $\pi^{ij} = \rho^{-1}P^{ij}$, где π^{ij} — компоненты тензора поляризации — намагниченности, рассчитанные на единицу массы среды, ρ — массовая плотность среды, определяемая формулой

$$\rho = f(\xi^\mu)[\det\|g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} - u_{\hat{\alpha}}u_{\hat{\beta}}\|]^{-1/2} \tag{1.3}$$

Здесь $u_{\hat{i}}$ — ковариантные компоненты вектора четыре-скорости среды относительно системы координат наблюдателя, рассчитанные в сопутствующей системе координат (вектор четыре-скорости определен относительно инерциальной системы координат компонентами $u^i = (dx^i/d\tau)_{\xi^k=\mathrm{const}}$) S — энтропия, рассчитанная на единицу массы среды, U — внутренняя энергия единицы массы среды.

Введем величину ρ_e — плотность свободного электрического заряда среды

$$\rho_e = \varphi(\xi^\mu)[\det\|g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} - u_{\hat{\alpha}}u_{\hat{\beta}}\|]^{-1/2} \tag{1.4}$$

В соответствии с определениями плотности свободного электрического заряда среды и вектора четыре-скорости среды, величина $\rho_e u^\alpha$ представляет собой электрический ток, связанный с движением сплошной среды относительно системы координат наблюдателя.

Согласно определениям массовой плотности среды ρ (1.3) и плотности свободного электрического заряда среды ρ_e (1.4), скаляры ρ и ρ_e в системе координат наблюдателя удовлетворяют четырехмерным уравнениям неразрывности

$$\nabla_i(\rho u^i) = 0, \quad \nabla_i(\rho_e u^i) = 0$$

В лагранжиане (1.2) четырехмерный инвариант — $(16\pi)^{-1}F_{ij}F^{ij}$ — лагранжиан электромагнитного поля, член $^1/_2\, F_{ij}P^{ij}$ определяет взаимодействие между электромагнитным полем в среде и поляризацией и намагниченностью среды.

Определим вариации определяющих параметров модели, совпадающие с определениями вариаций, принятыми в работах [1, 2]. (Введенные ниже вариации векторов и тензоров преобразуются от одной системы координат к другой по тем же законам, что и варьируемые векторы и тензоры соответственно)

$$\delta x^i = x^{i'}(\xi^k) - x^i(\xi^k)$$
$$\delta A_k = A_k{}'(\xi^k) - A_k(\xi^k)$$
$$\delta\pi^{ij} = \pi^{ij'}(\xi^k) - \pi^{ij}(\xi^k)$$
$$\delta S = S'(\xi^k) - S(\xi^k)$$

В этом случае вариации остальных величин, входящих в базисное вариационное уравнение (1.1), выражаются через введенные выше вариации параметров посредством соотношений

$$\delta F_{ij} = \nabla_i\delta A_j - \nabla_j\delta A_i - \nabla_k A_j\,\nabla_i\delta x^k + \nabla_k A_i\,\nabla_j\delta x^k$$
$$\delta x_j{}^i = x_j{}^s\,\nabla_s\delta x^i$$
$$\delta u^j = g_k{}^{*j}u^i\nabla_i\delta x^k$$
$$\delta\rho = -\rho g_k{}^{*i}\nabla_i\delta x^k$$
$$\delta P^{ij} = \rho\delta\pi^{ij} - P^{ij}\,g_k{}^{*s}\nabla_s\delta x^k$$
$$\delta d\tau_4 = d\tau_4\nabla_i\delta x^i$$
$$g^{*ij} = g^{ij} - u^i u^j$$

Поднимание и опускание индексов везде производится при помощи метрического тензора системы координат наблюдателя с ковариантными компонентами g_{ij}, $K_B(\xi^\mu)$ — физические постоянные, характеризующие свойства среды (анизотропию, диэлектрическую проницаемость и т. д). Далее полагаем, что $\delta K_B = 0$. Функционал δW^* выберем в виде

$$\delta W^* = \int\limits_{V_4}\{\rho T\delta S + j^k\delta A_k + j^k A_i\nabla_k\delta x^i - F_i\delta x^i\}\,d\tau_4$$
$$j^k = i^k + \rho_e^- u^k$$

Здесь j^k — контравариантные компоненты четырехмерного вектора электрического тока, i^α — компоненты электрического тока проводимости.

При задании вида функционала δW^* учитывались следующие соображения.

1°. В функционал δW^* необходимо включать члены, представляющие собой работу объемных сил F_α на возможных перемещениях, внешних по отношению к системе электромагнитное поле — среда. Эта работа дается членом $F_\alpha\delta x^\alpha$, который входит в δW^* с отрицательным знаком, так как между компонентами векторов в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве Минковского, которые будем отличать обозначением $(- - - +)$ с метрикой, указанной выше, и в трехмерном пространстве в случае, если система координат декартова, имеют место следующие равенства (обозначение $(+ + +)$ означает, что компоненты векторов вычислены относительно системы координат в трехмерном евклидовом пространстве):

$$F^{\alpha}_{(---+)} = F_{\alpha(+++)} = -F_{\alpha(---+)}$$

и, следовательно

$$F_{\alpha(+++)}\delta x^{\alpha} = -F_{\alpha(---+)}\delta x^{\alpha}$$

Кроме того, будем предполагать, что внешние (по отношению к системе электромагнитное поле — среда) массовые моменты отсутствуют (в противном случае в выражении для δW^* необходимо вводить член, представляющий собой работу внешних массовых моментов на возможных вращениях).

Такими же свойствами обладают также трехмерные и четырехмерные компоненты вектора A_k.

2°. В функционал δW^* включен член $F_4\delta x^4$, представляющий собой возможный внешний приток нетепловой энергии к системе электромагнитное поле — среда. В выражении для δW^* также включаются члены, содержащие электрический ток, которые обусловлены величиной приращения некомпенсированного тепла dQ' за счет диссипативных эффектов.

Осуществляя варьирование в равенстве (1.1), учитывая, согласно (1.2), принятое допущение об аргументах внутренней энергии и считая независимыми вариации δA_i, $\delta\pi^{ij}$, δS и δx^i, получим уравнения Эйлера в следующей форме: уравнения Максвелла для электромагнитного поля в среде

$$\nabla_j H^{kj} = 4\pi j^k \tag{1.5}$$

$$H^{ij} = F^{ij} - 4\pi P^{ij}$$

уравнения состояния для электромагнитного поля в среде и температуры

$$F_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \pi^{ij}}, \qquad T = \frac{\partial U}{\partial S} \tag{1.6}$$

уравнения импульсов

$$\nabla_k \mathrm{P}_i{}^k = F_i \tag{1.7}$$

В системе координат наблюдателя для компонент суммарного тензора энергии — импульса поля и среды верны следующие формулы, представляющие собой обобщенные уравнения состояния:

$$\mathrm{P}_i{}^k = S_i{}^k - \frac{1}{4}F_{pq}P^{pq}\delta_i{}^k + \tag{1.8}$$

$$+\frac{1}{2}F_{pq}P^{pq}g_i^{*k} + \rho\frac{\partial U}{\partial x_j^i}x_j{}^k - \rho^2\frac{\partial U}{\partial \rho}g_i^{*k} + \rho U u_i u^k$$

$$S_i{}^k = -\frac{1}{4\pi}\left(H^{kp}F_{ip} - \frac{1}{4}H^{pq}F_{pq}\delta_j{}^k\right)$$

Здесь производная $\partial / \partial x_j{}^i$ взята по аргументам $x_j{}^i$, входящим во внутреннюю энергию не через плотность ρ, $S_i{}^k$ — компоненты тензора энергии — импульса электромагнитного поля в среде по Минковскому.

Выкладки при варьировании уравнения (1.1) дают, что для функционала δW в области непрерывных движений верна формула

$$\delta W = \int_{\Sigma_3}\left\{\mathrm{P}_i{}^k\delta x^i + \frac{1}{4\pi}H^{ki}(\delta A_i + A_p\nabla_i\delta x^p)\right\}n_k\,d\sigma_3$$

где n_k — единичный четырехмерный вектор нормали к трехмерной поверхности Σ_3, ограничивающей объем V_4.

Система соотношений (1.5) — (1.8) установлена в предположении, что внутренние необратимые эффекты, определяемые выражением для функционала δW^*, связаны только с наличием электрического тока. При учете необратимых эффектов, обусловленных, например, необратимостью процесса деформирования среды или необратимостью процесса намагничивания в выражение для функционала δW^*, необходимо включать добавочные члены, описывающие эти эффекты. Для замыкания установленной системы уравнений необходимо ввести соотношение, представляющее собой закон Ома или его обобщение, которое, например для изотропной среды, может иметь вид

$$i^k = -\sigma F^{ki} u_i + \alpha F^{kp} F_{pi} u^i$$

где σ — коэффициент электропроводности среды, α — коэффициент, определяющий эффект Холла.

2. О тензоре энергии — импульса электромагнитного поля и пондеромоторных силах. Для компонент вектора пондеромоторной силы по Минковскому по определению примем

$$F_M{}^{\alpha} = -\nabla_j S^{\alpha j} \tag{2.1}$$

В этом случае компоненты тензора четырехмерного объемного пондеромоторного момента, действующего со стороны электромагнитного поля на среду, даются формулами [1]

$$h^{ij} = -(S^{ij} - S^{ji}) \tag{2.2}$$

В четырехмерной декартовой системе координат с метрикой, указанной выше, имеем $S^{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}$, $S^{\alpha 4} = -S_{\cdot\alpha}^{\cdot 4}$, $S^{4\alpha} = -S_{\cdot\alpha}^{4\cdot}$. Также отметим, что все соотношения, полученные в п. 2, справедливы лишь в собственной системе координат, под которой принимается инерциальная система координат, выбираемые для каждой точки M (ξ^1, ξ^2, ξ^3) подвижного континуума в каждый момент времени τ таким образом, чтобы трехмерная скорость $\bar{v}$ точки M в собственной системе координат равнялась нулю.

Как известно [1, 3], связь между тензором энергии — импульса электромагнитного поля по Минковскому и тензором энергии — импульса по Абрагаму в декартовой инерциальной системе координат, относительно которой среда покоится, выражается формулами

$$\begin{aligned} A^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(S^{\alpha\beta} + S^{\beta\alpha}) \\ A^{\alpha 4} &= A^{4\alpha} = S^{4\alpha} \\ A^{44} &= S^{44} \end{aligned} \tag{2.3}$$

из которых следует, что притоки энергии от электромагнитного поля к среде, вычисленные в соответствии с гипотезами Абрагама и Минковского, совпадают

$$F_A{}^4 = F_M{}^4 \tag{2.4}$$

Для компонент вектора пондеромоторной силы в соответствии с гипотезой Абрагама примем

$$F_A{}^\alpha = -\nabla_j A^{\alpha j} \tag{2.5}$$

Тогда из (2.1) и (2.5) следует, что в декартовой системе координат верны равенства

$$F_A{}^\alpha = F_M{}^\alpha - \frac{1}{2}\nabla_j h^{\alpha j} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} h^{\alpha 4}$$

где производная по времени взята относительно собственной системы координат. Эта формула дает связь между компонентами векторов объемной пондеромоторной силы, вычисленной в соответствии с гипотезами Абрагама и Минковского.

Как уже отмечалось выше, далее рассматриваются модели сред в случае, когда аргументами внутренней энергии служат

$$x_j^i,\ \pi^{ij},\ \rho,\ g_{ij},\ S,\ K_B$$

Если принять, что суммарный тензор энергии — импульса среды и поля симметричен

$$\mathbf{P}^{ik} = \mathbf{P}^{ki} \tag{2.6}$$

то указанное условие в этом случае равносильно тождественному удовлетворению четырехмерного уравнения моментов при условии отсутствия или постоянства вдоль мировой линии суммарных собственных внутренних моментов у электромагнитного поля и у среды. При этом, однако, не исключено взаимодействие между полем и средой посредством объемных четырехмерных пондеромоторных моментов, которые могут порождаться несимметрией тензоров энергии — импульса поля и среды. Если не требовать выполнения условия (2.6), которое, как будет видно ниже, накладывает ограничения на вид зависимости функции плотности внутренней энергии от указанных аргументов, то для данных аргументов внутренней энергии при произвольной зависимости функций плотности внутренней энергии от своих аргументов необходимо рассматривать уравнения моментов, которые могут служить для определения изменения внутренних моментов количеств движения для среды.

Рассмотрим следующие разложения суммарного тензора энергии импульса поля и среды на тензор энергии — импульса среды и тензор энергии — импульса поля по Минковскому и по Абрагаму соответственно

$$\mathbf{P}^{ik} = T_M{}^{ik} + S^{ik} = T_A{}^{ik} + A^{ik}$$

Здесь T_M^{ik} и $T_A^{ik} = T_A^{ki}$, согласно равенству (1.8),— известные тензоры энергии — импульса среды по Минковскому и по Абрагаму. На основании формулы (1.8) и соотношений (2.3) имеет соответственно

$$T_M{}^{ik} = -\frac{1}{4}F_{pq}P^{pq}g^{ik} + \frac{1}{2}F_{pq}P^{pq}g^{*ik} - \tag{2.7}$$

$$-\rho^2\frac{\partial U}{\partial \rho}g^{*ik} + \rho\frac{\partial U}{\partial x_j{}^p}x_j{}^k g^{ip} + \rho U u^i u^k$$

$$T_A{}^{ik} = \mathbf{P}^{ik} - A^{ik} = T_M{}^{ik} + \Omega^{ik} \qquad (\Omega^{ik} = S^{ik} - A^{ik}) \tag{2.8}$$

В общем случае для одного и того же суммарного тензора энергии — импульса электромагнитного поля и среды с компонентами P^{ik} из условия симметрии суммарного тензора энергии — импульса (2.6) и соотношений (2.3), (2.8) следует неравенство

$$T_M^{(ik)} + \Omega^{(ik)} = T_A{}^{ik} \neq T_M^{(ik)}$$

На основании (2.2), основного частного допущения (2.6) и (2.7) следует, что при указанных аргументах внутренней энергии в случае, когда электромагнитному полю приписывается тензор энергии — импульса Минковского, задаваемая функция плотности внутренней энергии должна удовлетворять соотношениям

$$\rho \frac{\partial U}{\partial x_j{}^p} (x_j{}^k g^{ip} - x_j{}^i g^{kp}) = h^{ik}$$

которые при помощи уравнений состояния (первое соотношение (1.6)) можно записать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial x_j{}^p} (x_j{}^k g^{ip} - x_j{}^i g^{kp}) = \frac{\partial U}{\partial \pi^{np}} (\pi^{ip} g^{nk} - \pi^{kp} g^{in}) \tag{2.9}$$

Если уравнение (2.9) не выполняется, то суммарный тензор энергии импульса электромагнитного поля и среды P^{ik} несимметричен, что влечет за собой в общем случае наличие переменных вдоль мировых линий собственных четырехмерных моментов количеств движения для системы электромагнитное поле — среда.

Отметим, что тензорное уравнение (2.9) можно записать в виде системы шести независимых уравнений, если пара свободных индексов (i, k) пробегает значения: (1,2); (1,3); (2,3); (1,4); (2,4); (3,4), причем эта система уравнений в частных производных инволюционна.

3. Некоторые следствия допущения о симметрии суммарного тензора энергии — импульса электромагнитного поля и среды. Тензорное уравнение (2.9), полученное как следствие допущения о симметрии суммарного тензора энергии — импульса электромагнитного поля и сплошной среды (2.6), накладывает ограничения на вид зависимости функции плотности внутренней энергии от своих аргументов, т. е. ограничения на вид и число постоянных K_B (ξ^μ), задающих геометрические и физические свойства среды. Ниже рассмотрены модели некоторых сплошных сред, удовлетворяющие уравнению (2.9).

3.1. Рассмотрим модель среды, определяемую заданием вида внутренней энергии, причем среди констант внутренней энергии K_B (ξ^μ) присутствует только один тензор G^0 с ковариантными компонентами $g_{ij}{}^\circ = g_{ij}^\circ$ (ξ^k) — метрический тензор начального состояния, который, в частности, может совпадать с метрическим тензором системы координат наблюдателя, а все остальные постоянные K_B — скаляры (такую среду можно назвать изотропной).

В силу предположений относительно констант внутренней энергии K_B для данного набора аргументов внутренней энергии из компонент антисимметричного тензора π^{ij} можно образовать только два функционально независимых инварианта, которые являются решениями уравнения (2.9)

$$\pi^{ij}\pi^{kn}g_{ik}g_{jn}$$
$$\pi^{ik}\pi^{gm}\pi^{rs}\pi^{np}g_{ir}g_{kn}g_{qs}g_{mp}$$

Вводя четырехмерный симметрический тензор «деформаций» E, рассмотренный в работе [2], с ковариантными компонентами, задаваемыми равенствами

$$E_{ij} = {}^1/_2\,(x_i{}^m x_j{}^n g_{mn} - g_{ij}{}^\circ)$$

непосредственной проверкой можно убедиться, что произвольная скалярная функция от компонент тензора E_{ij} — решение уравнения (2.9).

Также непосредственной проверкой можно убедиться, что произвольная скалярная функция от тензора второго ранга R, симметричного по индексам p, q

$$R_{ap}] = R_{pq} = \pi^{ij}\pi^{ks}x_p{}^m x_q{}^n g_{im}g_{kn}g_{js}$$

является решением тензорного уравнения (2.9). При сделанных предположениях относительно постоянных K_B (ξ^μ) из компонент тензоров E и R, можно образовать двенадцать независимых инвариантов, которые можно использовать в качестве аргументов внутренней энергии. Таким образом, функция плотности внутренней энергии, удовлетворяющая уравнению (2.9), представляет собой произвольную функцию от двух инвариантов тензора поляризации — намагниченности, инвариантов тензоров E и R, а также плотности ρ и энтропии S.]

Если ограничиться следующим набором аргументов плотности внутренней энергии: E_{ij}, π^{ij}, ρ, g_{ij}, S, K_B, то из уравнения (2.9) непосредственно следует равенство $h^{ij} = 0$.

3.2. Как частный случай общей модели упругого тела с учетом эффектов поляризации и намагниченности, рассмотрим модель сплошной среды, плотность внутренней энергии которой зависит от следующих аргументов:

$$u^j,\ \pi^{ij},\ \rho,\ S,\ g_{ij},\ K_B$$

Для данного набора аргументов выражение для суммарного тензора энергии — импульса системы электромагнитное поле — среда имеет вид

$$\mathrm{P}^{ik} = S^{ik} - \frac{1}{4}F_{pq}P^{pq}g^{ik} + \frac{1}{2}F_{pq}P^{pq}g^{*ik} + \\ + \rho\frac{\partial U}{\partial u^j}u^k g^{*ij} - \rho^2\frac{\partial U}{\partial \rho}g^{*ik} + \rho U u^i u^k \tag{3.1}$$

В этом случае предположение о симметрии суммарного тензора энергии —импульса (3.1) приводит к следующему тензорномуу дифференциальному уравнению для функции плотности внутренней энергии:

$$\frac{\partial U}{\partial u^j}(u^k g^{ij} - u^i g^{jk}) = \frac{\partial U}{\partial \pi^{np}}(\pi^{ip}g^{nk} - \pi^{kp}g^{ni})$$

Полагая, что среди постоянных K_B нет ни одного тензора можно показать, что плотность внутренней энергии — произвольная функция от следующих инвариантов, образованных из тензорных аргументов π^{ij} и u^j:

$$u^i u^j g_{ij}, \qquad \pi^{ij}\pi^{kn} g_{ik} g_{in}$$

$$\pi^{ik}\pi^{qm}\pi^{rs}\pi^{np} g_{ir} g_{kn} g_{qs} g_{mp}$$

$$\pi^{ij}\pi^{kp} u^m u^n g_{im} g_{kn} g_{jp}$$

а также плотности среды ρ и энтропии S. Далее предположим, что функция плотности внутренней энергии U является квадратичной формой относительно тензора поляризации — намагниченности π (т. е. членами порядка малости выше второго можно пренебречь)

$$U = \rho \frac{4\pi\mu}{\mu - 1} \pi^{ij}\pi^{qk} g_{iq} g_{jk} + \\ + \rho \frac{2\pi(1 - \varepsilon\mu)}{(\varepsilon - 1)(\mu - 1)} \pi^{ij}\pi^{ql} u^m u^n g_{im} g_{qn} g_{jl} + f(\rho, u^i u^j g_{ij}, S, K_B)$$

Здесь μ — коэффициент магнитной проницаемости, ε — диэлектрическая проницаемость, могут быть как постоянными, так и физическими характеристиками среды, зависящими, например, от температуры T и плотности среды ρ; f — некоторая произвольная функция указанных аргументов.

Наличие в первых двух слагаемых множителя ρ связано с выбором обычных обозначений для аргументов внутренней энергии, среди которых имеется тензор поляризации — намагниченности π, рассчитанный на единицу массы среды.

При данном выборе функции внутренней энергии уравнения состояния для электромагнитного поля и среде принимают вид

$$F_{ij} = \frac{1}{2}\rho \left\{ \frac{4\pi\mu}{\mu - 1} (g_{ik}{}^* g_{jp}{}^* - g_{ip}{}^* g_{jk}{}^*) + \right. \\ \left. + \frac{4\pi}{1 - \varepsilon} (g_{ik} u_j u_p - g_{jk} u_i u_p + g_{jp} u_i u_k - g_{ip} u_j u_k) \right\} \pi^{kp}$$

В «собственной» системе координат эти соотношения приводятся к виду

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

Здесь **B** и **D** — трехмерные векторы магнитной и электрической индукции соответственно, **H** и **E** — векторы напряженности магнитного и электрического полей, вычисленные в собственной системе координат.

3.3. Рассмотрим модели сплошных сред, для которых в набор постоянных параметров K_B входят тензоры, описывающие анизотропные свойства материала. В качестве примера рассмотрим сплошные среды, обладающие пьезоэлектрическими свойствами, которые определяются смешанными квадратичными членами тензора деформаций и тензора поляризации — намагниченности внутренней энергии, т. е. членами вида

$$D^{ij}_{mn} E_{ij} \pi^{mn} \tag{3.2}$$

Здесь принято, что аргументами внутренней энергии являются величины

$$E_{ij},\ \pi^{ij},\ \rho,\ g_{ij},\ S,\ K_B$$

Предварительно рассмотрим тензорное уравнение (2.9), верное в любой инерциальной системе координат. В частности, уравнение (2.9) справедливо в собственной системе координат с аргументами внутренней энергии, определенными относительно собственной системы координат, которую, не нарушая общности, можно выбрать декартовой. При таком выборе инерциальной системы координат для сред, обладающих только пьезоэлектрическими свойствами, в собственной системе координаты имеем $\pi^{\alpha\beta} = 0$.

Выясним, какое число линейно независимых тензорных коэффициентов

$$K_{ij} = -K_{ji} = D_{ij}{}^{mn}E_{mn}$$

допускается уравнением (2.9). Подставив функцию (3.2) в уравнение (2.9), получим систему шести линейных однородных уравнений относительно шести компонент антисимметричного тензора K_{ij}. Ранг матрицы главного определителя такой системы равен четырем, и следовательно, среди компонент тензора K_{ij} всего две линейно независимые компоненты.

Аналогичным образом можно получить число линейно независимых компонент тензорных коэффициентов при членах более высокого порядка относительно тензора поляризации — намагниченности.

Работа выполнена под руководством Л. И. Седова, которому автор приносит глубокую благодарность.

Поступила 28 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1970.
2. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, № 5.
3. *Паули В.* Теория относительности. М., Гостехиздат, 1947.