Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 62—50

К ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ

И. Я. Кац, А. Б. Куржанский

(Свердловск)

Исследуются задачи о наблюдении для линейных систем, функционирующих в присутствии помех, недоступных измерению [1-3].

Рассматриваемые постановки охватывают единым образом как игровые минимаксные ситуации, так и некоторые случаи вероятностного описания наблюдаемых систем. Формирование искомой оптимальной операции наблюдения проводится двумя путями: или априорно, когда одна и та же операция выбирается для всех возможных реализаций наблюдаемого сигнала, или апостериорно, когда операция формируется по реализовавшемуся значению этого сигнала. Приведено сравнение и обсуждены различия в отмеченных двух способах наблюдения. Указаны в частности, такие классы функциональных ограничений на неизвестные помехи и класс оптимальных операций наблюдения, когда достигается оптимальный неулучшаемый результат. Рассмотрена связь указанного класса операций со множеством линейных операций наблюдения.

Работа примыкает к исследованиям [4-7].

1. Априорное и апостериорное наблюдение. Рассматривается n-векторная управляемая система

$$dx \,/\, dt = A(t)\, x + B(t) v + f(t), \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.1}$$

с r-векторной входной функцией $v(t)$. Доступная измерению m-мерная величина $y(t)$ реализуется в силу уравнения

$$dy \,/\, dt = G(t) x + F(t) y + C(t) v + H(t) \xi, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta_1 \leqslant \vartheta \tag{1.2}$$

где $\xi(t)$ — q-векторная помеха в канале измерения. Коэффициенты систем (1.1), (1.2) предполагаются непрерывными, интегрируемая по Лебегу функция $f(t)$ — известной. Функции $v(t)$, $\xi(t)$ принадлежат множествам $V(\cdot) = V(\mu(\cdot))$, $\Xi(\cdot) = \Xi(\nu(\cdot))$, зависящим известным образом от заданных на промежутке $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ случайных функций $\mu(t)$, $\nu(t)$ (элементов $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$). Сами значения $v(t)$, $\xi(t)$ при этом предполагаются неизвестными. Пусть $f(\cdot) = f(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Опишем множества $V(\cdot)$, $\Xi(\cdot)$ подробнее. Обозначим $\mu_1 P = \{p : \mu_1^{-1} p \in P\}$. Здесь $\mu_1 > 0$, P — выпуклое множество, содержащее нуль. Пусть P и Q — выпуклые компакты в $R^{(r)}$, $R^{(q)}$ $(0 \in P,\ 0 \in Q)$. Принимаем далее

$$V(\mu(\cdot)) = \{v(\cdot) : v(t) \in \mu(t)\, P\}, \quad \Xi(\nu(\cdot)) = \{\xi(\cdot) : \xi(t) \in \nu(t)\, Q\}$$

Здесь $\mu(t) = \varphi_1(\omega_1(t))$, $\nu(t) = \varphi_2(\omega_2(t))$, где $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$ — выпуклые неотрицательные функции, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$; $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ — независимые случайные процессы с известными распределениями. Заметим, что если функции $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ детерминированы, то и $V(\mu(\cdot))$, $\Xi(\nu(\cdot))$ определяют детерминированные классы функций. В стохастическом варианте будем предполагать, что распределения $\mu(t)$, $\nu(t)$ сосредоточены на отрезках $0 \leqslant \mu(t) \leqslant \mu_0(t)$, $0 \leqslant \nu(t) \leqslant \nu_0(t)$, где $\mu_0(t)$, $\nu_0(t)$ — детерминированные функции, ограниченные на $[t_0, \vartheta]$.

Обсудим способы построения отображения («операции наблюдения») $\psi(y(\cdot)) = \psi(\cdot) \in R^{(p)}$, оценивающей p-векторный параметр $\eta(\vartheta_1) = Nx(\vartheta_1)$ системы (1.1) (N — известная матрица). Точность оценки охарактеризуем неотрицательным выпуклым функционалом $\varphi(\chi)$, $\varphi(0) = 0$, где $\chi(\psi, y) = \eta(\vartheta_1) - \psi(\cdot)$.

Оценивать $\eta(\vartheta_1)$ можно двумя способами. Первый способ заключается в том, что отображение $\psi(\cdot)$ заранее выбирается одним и тем же для всех возможных реализаций $y(\cdot)$. Параметр $\eta(\vartheta_1)$ оценивается согласно критерию

$$
\begin{gathered}
\varepsilon^\circ = \max\nolimits_{y(\cdot)} M\,[\varepsilon(\mu(\cdot),\ \nu(\cdot),\ \psi(\cdot)) \,/\, y = y(\cdot)] = \min\nolimits_{\psi(\cdot)} \\
\varepsilon(\mu(\cdot), \nu(\cdot), \psi(\cdot)) = \max\nolimits_{v,\xi} \varphi(\chi) \\
v(\cdot) \in V(\mu(\cdot)),\ \ \xi(\cdot) \in \Xi(\nu(\cdot)),\ \ \psi(\cdot) \in \Psi
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

при условии

$$
\chi(\psi(\cdot), y(\cdot)) = (\psi(y(\cdot)) - \eta(\vartheta_1))|_{v\equiv 0,\ \xi\equiv 0 = 0}
\tag{1.4}
$$

Здесь в (1.3) берется условное математическое ожидание по всем $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$, совместимым с $y(\cdot)$ (данная операция подробнее пояснена ниже в п. 5), и далее вычисляется максимум по всем реализациям $y(\cdot)$, которые допускаются системой (1.1), (1.2) при всех возможных $0 \leqslant \mu(t) \leqslant \mu_0(t)$, $0 \leqslant \nu(t) \leqslant \nu_0(t)$. Назовем соотношения (1.3), (1.4) условиями задачи об априорном наблюдении параметра $\eta(\vartheta_1)$, системы (1.1) по сигналу $y(t)$ (1.2). Таким образом, в указанной постановке заранее «проигрываются» все возможные реализации $y(\cdot)$, после чего ψ° выбирается так, чтобы обеспечить некоторый гарантированный результат. В частности, если $\mu(\cdot)$ $\nu(\cdot)$ неслучайны, то (1.3) переходит в следующее условие:

$$
\varepsilon^\circ = \min\nolimits_{\psi(\cdot)} \varepsilon(\mu(\cdot), \nu(\cdot), \psi(\cdot)),\quad \psi(\cdot) \in \Psi
\tag{1.5}
$$

В работах [4-6] приведены принципы построения задач управления с ограничениями на параметры траекторий, связанные с обсуждаемыми задачами соотношениями двойственности (дуальности).

Остановимся на втором способе наблюдения. Пусть на промежутке $[t_0, \vartheta]$ реализовался сигнал $y(t) = y^*(t)$.

Отображение («операцию наблюдения») будем теперь конструировать с учетом того, что реализация $y^*(\cdot)$ уже известна. Поэтому в число аргументов ψ включим и функцию $y^*(\cdot)$. Будем оценивать $\eta(\vartheta_1)$ согласно критерию ($\psi^*(\cdot) = \psi(y(\cdot), y^*(\cdot))$)

$$\text{(1.6)} \qquad \begin{gathered} \varepsilon^* = M[\varepsilon^*(\mu(\cdot), \nu(\cdot), \psi^*(\cdot)) / y = y^*(\cdot)] = \min_{\psi^*} \\ \varepsilon^*(\mu(\cdot), \nu(\cdot), \psi^*(\cdot)) = \max_{v,\xi} \varphi(\chi) \\ \psi^* \in \Psi^*, \qquad \{v(\cdot), \xi(\cdot)\} \in W(y^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)) \end{gathered}$$

Здесь Ψ^* — класс допустимых функционалов, реализующих операцию наблюдения; $W^*(y^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ состоят соответственно из всех тех и только тех функций $v(\cdot)$, $\xi(\cdot)$ со значениями в $V(\mu, (\cdot))$, $\Xi(\nu(\cdot))$, которые совместимы с сигналом $y^*(\cdot)$ (т. е. тех, которые могут совместно с вектором $y^*(\vartheta)$ и некоторым $x(\vartheta)$ порождать в силу (1.1), (1.2) реализацию $y^*(\cdot)$). Условное математическое ожидание в (1.6) вычисляется по апостериорному распределению функций $\mu(\cdot)\,\nu(\cdot)$ при $y = y^*(\cdot)$. Назовем соотношения (1.6) условиями задачи об апостериорном наблюдении параметра $\eta(\vartheta_1)$ системы (1.1) по сигналу $y^*(t)$, (1.2).

В частности, если $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ неслучайны, то (1.6) переходят в следующие условия:

$$\text{(1.7)} \qquad \varepsilon^* = \min_{\psi^*} \varepsilon^*(\mu(\cdot), \nu(\cdot), \psi^*), \qquad \psi^* \in \Psi^*$$

Ниже класс Ψ отображений $\psi(\cdot)$ будет состоять из линейных операций $\psi(y(\cdot)) = \langle w(\cdot), y(\cdot)\rangle$, непрерывных на некотором банаховом пространстве B, содержащем множество всех возможных реализаций $y(\cdot)$. Здесь строки $m \times p$-матрицы $w(\cdot)$ принадлежат пространству B^*. Пространства B конкретизируем ниже.

Класс Ψ^* отображений $\psi(y(\cdot), y^*(\cdot))$ определим при помощи линейных операций вида

$$\psi^*(\cdot) = \psi(y(\cdot), y^*(\cdot)) = \langle w(\cdot \,/\, y^*(\cdot)), y(\cdot)\rangle$$

где $y(\cdot) \in B$ и элемент $w(\cdot \,/\, y^*(\cdot)) \in B^*$ зависит от реализации $y^*(\cdot)$. Заметим, что отображение $\psi(y(\cdot), y(\cdot))$ из B в $R^{(p)}$ уже не обязательно линейное. Дополнительные ограничения на $\psi(y(\cdot), y^*(\cdot))$ могут, как и в априорной задаче, заключаться в требовании $w(\cdot \,/\, y^*(\cdot)) \in W$.

Далее будет показано, что рассмотрение лишь описанных выше классов Ψ и Ψ^* оправдывается тем, что уже в этих классах могут быть достигнуты (при надлежащем выборе пространства B и множества W) неулучшаемые оценки параметра $\eta(\vartheta_1)$.

Всюду ниже предполагается $\vartheta_1 = \vartheta$. Распространение результатов на случай $\vartheta_1 < \vartheta$ является стандартным.

Примечание 1.1. «Условие несмещенности» (1.4), означающее, что при $v \equiv 0$, $\xi \equiv 0$ в точности $\psi(y(\cdot)) = x(\vartheta)$ является, как будет показано ниже, необходимым для оптимальности в смысле критерия (1.3), (1.6) операции $\psi(y(\cdot))$, ($\psi(y(\cdot), y^*(\cdot))$).

Примечание 1.2. По смыслу рассматриваемых задач множество $W^*(y^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ возможных помех $\{v(\cdot), \xi(\cdot)\}$, согласующихся с реализовавшимся сигналом $y^*(\cdot)$, обязательно непустое.

2. Решение задачи априорного наблюдения. Пусть $X(t, \tau)$, $Y(t, \tau)$ — нормированные фундаментальные матрицы систем $\dot{x} = Ax$, $\dot{y} = Fy$

соответственно. Имеем

$$y(t) - Y(t, \vartheta) y(\vartheta) + g(t) = \int_t^{\vartheta} Y(t, \tau)(H(\tau)\xi(\tau) + \tag{2.1}$$

$$+ C(\tau) v(\tau)) d\tau + \int_t^{\vartheta} Z(t, \xi) B(\xi) v(\xi) d\xi - Z(t, \vartheta) x(\vartheta), \quad t \in [t_0, \vartheta]$$

$$Z(t, \vartheta) = \int_t^{\vartheta} Y(t, \xi) G(\xi) X(\xi, \vartheta) d\xi, \quad g(t) = \int_t^{\vartheta} Z(t, \xi) f(\xi) d\xi$$

Обозначим $z(t) = y(t) - Y(t, \vartheta) y(\vartheta) + g(t)$.

Учитывая (1.4), после стандартных выкладок имеем

$$\chi(\psi(\cdot), y(\cdot)) = \chi(w(\cdot), v(\cdot), \xi(\cdot)) = \langle w(\cdot), z(\cdot)\rangle = \tag{2.2}$$

$$= \left\langle \int_{t_0}^{t} w(\tau)(Z(\tau, t) B(t) - Y(\tau, t) C(t)) d\tau, v(t) \right\rangle -$$

$$- \left\langle \int_{t_0}^{t} w(\tau) Y(\tau, t) H(t) d\tau, \xi(t) \right\rangle$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} w(t) Z(t, \vartheta) dt = -N \tag{2.3}$$

Множество решений (2.3) в классе B^* будем обозначать как W_H. Следуя далее, получаем

$$\varepsilon(\mu(\cdot), \nu(\cdot), \psi(\cdot)) = \varepsilon(\mu(\cdot), \nu(\cdot), w(\cdot)) = \max_{v, \xi} \varphi(\chi(w(\cdot), \tag{2.4}$$

$$\nu(\cdot), \xi(\cdot))) = \sup_\alpha \max_{v, \xi} \{\langle \alpha, \chi(w(\cdot), v(\cdot), \xi(\cdot))\rangle - \varphi^*(\alpha)\}$$

$$\alpha \in R^{(p)}$$

$$\varphi^*(\alpha) = \sup_p \{\langle \alpha, p\rangle - \varphi(p)\}$$

$$v(\cdot) \in V(\mu(\cdot)), \quad \xi(\cdot) \in \Xi(\nu(\cdot))$$

Здесь $\varphi^*(\alpha)$ — выпуклая функция, сопряженная к $\varphi(p)$, $p \in R^{(p)}$ [8]. В частности, если $\varphi(p) = \max_\alpha \langle p, \alpha\rangle$, $\alpha \in A^*$, т. е. $\varphi(p) = \rho(p, A^*)$ — опорная функция выпуклого множества A^*, то (2.4) трансформируется в равенство

$$\varepsilon(\mu(\cdot), \nu(\cdot), w(\cdot)) = \max_\alpha \max_{v, \xi} \{\langle \alpha, \chi(w(\cdot), v(\cdot), \xi(\cdot))\rangle\} \tag{2.5}$$

$$\alpha \in A^*, \; v(\cdot) \in V(\mu(\cdot)), \; \xi(\cdot) \in \Xi(\nu(\cdot))$$

В общем случае имеем

$$\varepsilon(\mu(\cdot), \nu(\cdot), w(\cdot)) = \sup_\alpha \{\rho(q(t; \alpha w(\cdot)) H(t); \Xi(\nu(\cdot))) + \tag{2.6}$$

$$+ \rho(s(t, \alpha w(\cdot)) B(t) - q(t, \alpha w(\cdot)) C(t); V(\mu(\cdot)) - \varphi^*(\alpha)\}$$

$$\alpha \in R^{(p)}$$

Здесь $s(t, \alpha w(\cdot))$, $q(t, \alpha w(\cdot))$ — соответственно n- и m-векторные решения системы

$$(2.7)\qquad \begin{gathered} s^{\cdot} = -sA(t) + qG(t), \quad q^{\cdot} = -qF(t) + \alpha w(t) \\ s(t_0) = 0, \quad q(t_0) = 0 \end{gathered}$$

$\rho(h(\cdot); Q)$ — опорный функционал множества $Q(\cdot)$, т. е.

$$\rho(h(\cdot); Q) = \sup_q \langle h(\cdot), q(\cdot)\rangle, \quad q(\cdot) \in Q$$

Окончательно имеем

$$(2.8)\qquad \begin{aligned} f(\mu(\cdot), \nu(\cdot), w(\cdot), \alpha) = \Big\{\int_{t_0}^{\vartheta} [\nu(t)\rho(q(t, \alpha w(\cdot))H(t); Q) + \\ + \mu(t)\rho(s(t, \alpha w(\cdot))B(t) - q(t, \alpha w(\cdot))C(t); P)]\,dt - \varphi^*(\alpha)\Big\} \end{aligned}$$

$$(2.9)\qquad \begin{gathered} \varepsilon(\mu(\cdot), \nu(\cdot) w(\cdot)) = \sup_\alpha f(\mu(\cdot), \nu(\cdot), w(\cdot), \alpha), \quad \alpha \in R^{(p)} \\ \varepsilon^\circ = \inf_w \max_{y(\cdot)} M\varepsilon(\mu((\cdot), \nu(\cdot), w(\cdot)), \quad w(\cdot) \in W_0 = W \cap W_H \end{gathered}$$

Здесь W_H определяется по (2.3), а W задается условиями задачи. Если A^* — единичная сфера конечномерного пространства X ($A^* = \{\alpha: :\|\alpha\| \leqslant 1\}$ и, следовательно, $\varphi(p) = \|p\|^*$ (норме p в метрике X^*), получим, используя (2.8) и результаты [8], ч. 3

$$(2.10)\qquad \begin{aligned} \varepsilon^\circ(\mu(\cdot), \nu(\cdot), w(\cdot)) = \max_\alpha \Big\{\int_{t_0}^{\vartheta} [\nu(t)\rho(q(t, \alpha w(\cdot))H(t); Q(\cdot)) + \\ + \mu(t)\rho(s(t, \alpha w(\cdot))B(t) - q(t, \alpha w(\cdot))C(t); P]\,dt\Big\} \quad (\|\alpha\| = 1) \end{aligned}$$

Отметим три частных случая задачи

1) Пусть $p = 1$, $\varphi(l) = |l|$. Тогда

$$\begin{gathered} \Phi(w(\cdot)) = \max_{y(\cdot)} \quad M\varepsilon(\mu(\cdot), \quad \nu(\cdot), \quad w(\cdot)) = \\ = f(\mu_0(\cdot), \nu_0(\cdot), w(\cdot), 1), \quad \varphi^*(1) = 0 \end{gathered}$$

2) Пусть $\varphi(l) = \|l\|$, $\nu(t) \equiv 0$, $\mu(t) = \mu$ — случайная величина. Тогда

$$\Phi(w(\cdot)) = \max_\alpha f(\mu_0, 0, w(\cdot), \alpha), \qquad \|\alpha\|^* = 1$$

Аналогично, если $\mu(t) \equiv 0$, $\nu(t) = \nu$ — случайная величина, то

$$\Phi(w(\cdot)) = \max_\alpha f(0, \nu_0, w(\cdot), \alpha), \quad \|\alpha\|^* = 1$$

3) Пусть $\mu(t)$, $\nu(t)$ не случайны. Тогда

$$\Phi(w(\cdot)) = \varepsilon(\mu(\cdot), \nu(\cdot), w(\cdot))$$

Пространство B m-векторных функций $z^*(\cdot)$ будем выбирать или в виде $B = C_k{}^m[t_0, \vartheta]$, где показатель k зависит от конкретной структуры системы (1.1), (1.2), или в виде $B = L_q^{(m)}$, $q \geqslant 1$. Заметим, что нижняя грань (2.9) будет заведомо достигаться, если множество W — слабо компактное в B.

3. Точная апостериорная оценка. Пусть известна реализация $y^*(\cdot)$ наблюдаемого в силу системы (1.1), (1.2) сигнала $y(t)$. Приведем точное описание области $X(y^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ тех векторов x, которые совместимы с $y^*(\cdot)$ при $v(\cdot) \in V(\mu(\cdot))$, $\xi(\cdot) \in \Xi(\nu(\cdot))$, полагая что функции $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ детерминированы. Иначе говоря, найдем все те векторы x^*, для каждого из которых найдется пара $v^1(\cdot) \in V(\mu(\cdot))$, $\xi^1(\cdot) \in \Xi(\nu(\cdot))$, такая, что (1.1), (1.2) имеет своим решением (при $x(\vartheta) = x^*$, $y(\vartheta) = y^*(\vartheta)$, $v = v^1(\cdot)$, $\xi = \xi^1(\cdot)$) функцию $y(t) = y^*(t)$. Обозначим

$$T_1 x = f^{(1)}(\cdot), \qquad f^{(1)}(t) = (t)\, Z(t, \vartheta)\, x$$

$$T_2 v(\cdot) = f^{(2)}(\cdot), \quad f^{(2)}(t) = \int_t^{\vartheta} (-Y(t, \sigma) C(\sigma) + Z(t, \sigma) B(\sigma))\, v(\sigma)\, d\sigma$$

$$T_3 \xi(\cdot) = f^{3}(\cdot), \quad f^{(3)}(t) = \int_t^{\vartheta} (-Y(t, \sigma) H(\sigma))\, \xi(\sigma)\, d\sigma$$

Здесь T_1, T_2, T_3 — непрерывные линейные операторы соответственно из $R^{(n)}$, $L_2^{(r)}$, $L_2^{(q)}$ в $C^{(m)}$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$. Согласно (2.1), имеем

$$z^*(\cdot) = -T_1 x + T_2 v(\cdot) + T_3\, \xi(\cdot) \tag{3.1}$$

Здесь $z^*(\cdot)$ связано с $y^*(\cdot)$ так же, как $z(t)$ с $y(t)$, и полностью определяется заданием пары $\{y^*(\cdot), f(\cdot)\}$. В соответствии с этим в дальнейшем во всех функциональных соотношениях будем рассматривать вместо $y^*(\cdot)$ величину $z^*(\cdot)$. Обратный переход от $z^*(\cdot)$ к $y^*(\cdot)$ осуществляется стандартным образом. Поэтому пояснять его в дальнейшем не будем.

Множество $X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ будет состоять из тех и только тех векторов x, для которых (3.1) разрешимо в классе $V(\mu(\cdot))$, $\Xi(\nu(\cdot))$. Следуя работам [7,9], получаем утверждение ($\langle \lambda(\cdot), h(\cdot)\rangle$ — линейный непрерывный функционал над B, $h \in B$, $\lambda(\cdot) \in B^*$, T^* — оператор, сопряженный к T).

Лемма 3.1. Для того, чтобы $x \in X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\lambda(\cdot) \in B^*$ выполнялось неравенство

$$\langle T^*\lambda(\cdot), x\rangle \leqslant \sup_{v,\xi} \psi(\lambda(\cdot), v(\cdot)\, \xi(\cdot)) \tag{3.2}$$

$$v(\cdot) \in V(\mu(\cdot)), \quad \xi(\cdot) \in \Xi(\nu(\cdot))$$

$$\psi(\lambda(\cdot), v(\cdot), \xi(\cdot)) = \langle T_2^*\lambda(\cdot), v(\cdot)\rangle + \langle T_3^*\lambda(\cdot), \xi(\cdot)\rangle + \langle \lambda(\cdot), z^*(\cdot)\rangle$$

Лемма 3.2. Множество $X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ — выпуклое и замкнутое. Эти свойства вытекают из формулы (3.2).

Пусть $L = \{l$: существует $\lambda(\cdot) \in B^*$, $T_1^*\lambda(\cdot) = l$, $l \in R^{(n)}\}$. Множество L есть подпространство $R^{(n)}$. Из (3.2) теперь заключаем, что справедливо утверждение.

Лемма 3.3. $x \in X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ тогда и только тогда, когда для любого $l \in L$

$$\langle l, x\rangle \leqslant \varphi_0(l) \tag{3.3}$$

$$\varphi_0(l) = \inf\{\rho(T_2^*\lambda(\cdot); V(\mu(\cdot))) + \rho(T_3^*\lambda(\cdot); \Xi(\nu(\cdot))) + \langle\lambda(\cdot), z^*(\cdot)\rangle\} \tag{3.4}$$

по всем $\lambda(\cdot) \in \Lambda(l) = \{\lambda(\cdot): T_1^*\lambda(\cdot) = l\}$.∎

Доопределим функцию $\varphi_0(l)$ на множестве $L_1 = R^{(n)} \setminus L$, полагая $\varphi_0(l) = \infty$, если $l \in L_1$.

Лемма 3.4. Функция $\varphi_0(l)$, $l \in R^{(n)}$ — выпуклая, положительно однородная.

Эти свойства вытекают из определения $\varphi_0(l)$. Применяя результаты ([8], § 13), из формулы (3.3) и леммы 3.4 заключаем.

Лемма 3.5. Справедлива формула

$$\varphi_0(l) = \rho(l; X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))), \quad l \in R^{(n)}$$

Функция $\rho(l; X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)))$ равноограничена по всем

$$l \in S_1(L) = \{l \in L : \langle l, l\rangle = 1\}$$∎

Равноограниченность $\rho(l; X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)))$ на $S_1(L)$ вытекает из аналогичного свойства для $\varphi_0(l)$.∎

Заметим, что из леммы 3.5 вытекает следующее представление векторов: $x = x^\circ + x^1$, причем

$$X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)) = \{x : x^\circ \in X_L(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)), x^1 \in L_1\}$$

$$X_L(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)) = X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)) \cap L$$

$$L^1 = \{x : \langle x, l\rangle = 0, \ l \in L\}$$

Множество $X_L(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ есть выпуклый компакт в $R^{(n)}$ размерности $n_1 = n - n_2$, где $n_2 = \dim L^1$ — размерность L^1, $n_1 = \dim L$ — размерность L. Заметим, что если $G = \text{const}$, то $\rho(l; X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))) = 0$, когда $l'G = 0$ (штрих означает транспонирование).

Интересен частный случай, когда $L = R^{(n)}$. Он имеет место тогда и только тогда, когда уравнение $T_1^*\lambda(\cdot) = l$ разрешимо относительно $\lambda(\cdot)$ при всех l. Но последнее условие как раз выражает требование полной наблюдаемости на промежутке $[t_0, \vartheta]$ [1-3,10] системы (1.1), (1.2) (при $v \equiv 0$, $\xi \equiv 0$ (или, иными словами, требование, чтобы выполнялось условие (1.4), если считать $\psi(y(\cdot)) = \langle\lambda(\cdot), z(\cdot)\rangle|_{\xi\equiv 0, v\equiv 0}$, см. примечание 1.1). Стандартными методами теории управления (см. например [1,10]) получаем утверждение.

Лемма 3.6. Для того, чтобы уравнение $T_1^*\lambda(\cdot) = l$ было разрешимо при любом $l \in R^{(n)}$ (т. е. чтобы система (1.1) (1.2), $\xi \equiv 0$, $v \equiv 0$ была вполне наблюдаема на промежутке $[t_0, \vartheta]$), необходимо и достаточно, чтобы форма

$$(3.5)\qquad l'\left(\int_{t_0}^{\vartheta} Z'(t,\vartheta)Z(t,\vartheta)\,dt\right)l = l'Hl$$

была положительно определена. В стационарном случае система (1.1), (1.2) вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда числу $n+m$ равен ранг матрицы $Q_1=[D, DA_1, \ldots, DA_1^{n-1}]$, где

$$D=(0, E^{(m)}),\qquad A_1=\begin{pmatrix} A & 0\\ G & F\end{pmatrix}$$

Следствие 3.1. Для того, чтобы выпуклое и замкнутое множество $X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы форма $l'Hl$ была положительно определена.

Векторы $l\in L$ будем называть наблюдаемыми направлениями.

Пусть $Z(\cdot)=z^*(\cdot)+T_1X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$, где T_1X — образ множества X при отображении T_1. Обозначим символом $W(\cdot)=\{v(\cdot), \xi(\cdot)\}$ прообраз множества $Z(\cdot)$ в $L_2^{(r)}\times L_2^{(q)}$ при отображении $T\{v(\cdot), \xi(\cdot)\}=T_2v(\cdot)+T_3\xi(\cdot)$. Пусть $W^*(\cdot)=W(\cdot)\cap\{V(\mu(\cdot))\times \Xi(\nu(\cdot))\}$. Проекции $W^*(\cdot)=W^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ на $L_2^{(r)}$ и $L_2^{(q)}$ обозначим соответственно как $V^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ и $\Xi^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$. Из выпуклости и замкнутости $X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$, а также из ограниченности множеств $V(\mu(\cdot))$, $\Xi(\nu(\cdot))$ вытекает утверждение.

Лемма 3.7. Множество $W^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ — выпуклое, слабо компактное в $L_2^{(r)}\times L_2^{(q)}$.

По теореме о минимаксе работы [11] получим

$$\varphi_0(l)=\max_{v,\xi}\inf_\lambda \psi(\lambda(\cdot), v(\cdot), \xi(\cdot))$$
$$\lambda(\cdot)\in\Lambda(l),\ v(\cdot)\in V(\mu(\cdot)),\quad \xi(\cdot)\in\Xi(\cdot)$$

Лемма 3.8. Пусть задана пара $\{v^1(\cdot), \xi^1(\cdot)\}\in W^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), v(\cdot))$ и наблюдаемое направление l; тогда $\psi(\lambda(\cdot), v^1(\cdot), \xi^1(\cdot))\equiv k>-\infty$ на множестве $\lambda(\cdot)\in\Lambda(l)$.

Ограниченность $\psi(\lambda(\cdot), v^1(\cdot), \xi^1(\cdot))$ по всем $\lambda(\cdot)\in\Lambda(l)$ вытекает из наблюдаемости направления l и проверяется прямым счетом. Постоянство функционала $\psi(\lambda(\cdot), v^1(\cdot), \xi^1(\cdot))$ на аффинном множестве $\{\lambda(\cdot)\in\Lambda(l)\}$ следует из того, что он линеен по $\lambda(\cdot)$. Из леммы 3.5, 3.7, 3.8 и того обстоятельства, что при $\{v^1(\cdot), \xi^1(\cdot)\}\in W^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ имеем $\inf_{\lambda(\cdot)}\psi(\lambda(\cdot), v^1(\cdot), \xi^1(\cdot))=\varphi_0(l)=-\infty$, $\lambda(\cdot)\in\Lambda(l)$ для любого $l\in L$ (доказательство этого факта аналогично [7]), заключаем, пользуясь обозначениями (2.7), что справедливо утверждение.

Лемма 3.9. Пусть $l\in L$ (l — наблюдаемое направление). Тогда каково бы ни было $\lambda(\cdot)\in\Lambda(l)$

$$(3.6)\qquad \begin{aligned}&\rho(l;\, X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)))=\langle\lambda(\cdot), z^*(\cdot)\rangle+\\ &+\rho(s(t;\lambda(\cdot))\cdot B(t)-q(t,\lambda(\cdot))\,C(t),\ -q(t,\lambda(\cdot))\,H(t);\\ &W^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)))\end{aligned}$$

Найдем точную оценку параметра $\eta(\vartheta)$ при фиксированных $\mu(\cdot)$ $\nu(\cdot)$. Рассмотрим множество $N^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)) = NX(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$. Здесь $N^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)) = N^*(\cdot)$ — область значений $\eta(\vartheta)$, совместимых с сигналом $z^*(\cdot)$. Найдем точку $\eta^\circ(\vartheta)$ — «чебышевский центр» множества $N^*(\cdot)$. По определению имеем ($\eta \in N^*(\cdot)$)

$$\varepsilon^* = \max_\eta \|\eta - \eta_0\| = \min_\zeta \max_\eta \|\eta - \zeta\|, \quad \zeta \in R^{(p)}$$

Тогда для детерминированных $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ получим, что ε^* — решение задачи (1.7) при $\varphi(\chi) = \|\chi\|$. Ясно, что $\eta^\circ = \eta^\circ(N^*(\cdot)) = \eta^\circ(N^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)))$. Теперь стоит положить $\psi^\circ(z^*(\cdot), z^*(\cdot)) = \eta^\circ(N^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)))$. Как убеждаемся (коль скоро при рассматриваемых условиях ε^* — неулучшаемая апостериорная оценка ошибки определения параметра $\eta(\vartheta)$ — по построению!), $\psi^\circ(z^*(\cdot), z^*(\cdot))$ и есть решение задачи (1.7). Если $\varphi(\chi)$ — произвольный неотрицательный выпуклый функционал, то η° — так называемый «φ-центр» множества $N^*(\cdot)$, т. е ($\eta \in N^*(\cdot)$)

$$\varepsilon^* = \max_\eta \varphi(\eta - \eta^\circ) = \min_\zeta \max_\eta \varphi(\eta - \zeta), \quad \zeta \in R^{(n)} \tag{3.7}$$

Заметив, что справедлива формула

$$\rho(\alpha; N^*(\cdot)) = \rho(\alpha N; X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))) \tag{3.8}$$

находим (α, $\zeta \in R^{(p)}$)

$$\varepsilon^* = \min_\zeta \sup_\alpha \{\rho(\alpha; N^*(\cdot)) - \langle\alpha, \zeta\rangle - \varphi^*(\alpha)\} \tag{3.9}$$

В частности, если $\varphi(\chi) = \|\chi\|$, из (3.7) получаем

$$\varepsilon^* = \min_\zeta \max_\alpha \{\rho(\alpha; N^*(\cdot)) - \langle\alpha, \zeta\rangle\}, \quad \zeta \in R^{(p)}, \|\alpha\|^* \leqslant 1 \tag{3.10}$$

Суммируя сказанное, получаем утверждение.

Теорема 3.1. Пусть $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ — заданные функции. Тогда решение детерминированной задачи (1.7) доставляет операция $\psi(z^*(\cdot), z^*(\cdot)) = \eta^\circ(N^*(\cdot))$, где η° — экстремальный по ζ элемент функционала (3.9), (3.10), вычисляемый по реализации $z^*(\cdot)$, согласно формулам (3.7) — (3.10), (3.4). Число ε^* есть неулучшаемая по функционалу $\varphi(\chi) = \|\chi\|$ оценка отклонения $\chi = \eta(\vartheta) - \eta^\circ$ реализовавшегося значения $\eta(\vartheta)$ от η°.

Следствие 3.2. Пусть $\eta(\vartheta) = n'x(\vartheta)$ — скалярная величина и $\varphi(\chi) = |\chi|$. Тогда

$$\eta^\circ = {}^1/_2 [\rho(1; N^*(\cdot)) - \rho(-1; N^*(\cdot))] \tag{3.11}$$

Действительно, если $N = n'$-вектор, то множество $N^*(\cdot)$ — отрезок, концы которого — числа $a = -\rho(-1; N^*(\cdot))$, $b = \rho(1; N^*(\cdot))$. Тогда по (3.10) находим $\varepsilon^* = (b - a) / 2 = \min_\eta \max \{b - \eta, -a + \eta\}$.

Здесь минимум достигается при $b - \eta = \eta - a$, т. е. $\eta^\circ = (a + b) / 2$. Правая часть (3.11) теперь получается по формуле (3.8).

Предположим, что функции $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ — случайные. Распределения величин $\mu(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ теперь будут апостериорными и будут зависеть от $z^*(\cdot)$. Не останавливаясь на вычислении этих распределений, заметим, что решение (1.6) будет определяться формулой

$$\varepsilon^* = \min_\zeta M[\{\max_\eta \varphi(\eta - \zeta);\ \eta \in N^*(\cdot)\} / z = z^*(\cdot)] \tag{3.12}$$
$$\zeta \in R^{(p)}$$

т. е.

$$\varepsilon^* = \min_\zeta M[\sup_\alpha (\rho(\alpha;\ N^*(\cdot)) - \langle\alpha,\ \zeta\rangle - \varphi^*(\alpha)) / z = z^*(\cdot)]$$

причем $\psi^\circ(z^*(\cdot),\ z^*(\cdot)) = \eta^\circ(z^*(\cdot))$, где $\eta^\circ(z^*(\cdot))$ — экстремальный по $\zeta \in R^{(p)}$ элемент (3.12).

Теорема 3.2. Пусть $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ — случайные процессы, апостериорные распределения которых при заданном $z^*(\cdot)$ известны. Тогда операция $\psi^\circ(z^*(\cdot), z^*(\cdot))$, решающая задачу (1.5), определяется равенством $\psi^\circ(z^*(\cdot),\ z^*(\cdot)) = \eta^\circ(z^*(\cdot))$, где $\eta^\circ(z^*(\cdot))$ — экстремальный по ζ элемент (3.11). Оптимальная ошибка ε^* находится по формулам (3.11), (3.8), (3.6), (3.4).

Следствие 3.3. Пусть $\varphi(\chi) = \|\chi\|$. Тогда условие (3.12) примет вид

$$\varepsilon^* = \min_\zeta M[\sup_\alpha (\rho(\alpha;\ N^*(\cdot)) - \langle\alpha,\ \zeta\rangle) / z = z^*(\cdot)] \tag{3.13}$$
$$\zeta \in R^{(p)}, \qquad \|\alpha\|^* \leqslant 1$$

Следствие 3.4. Пусть $\eta(\vartheta) = n' x(\vartheta)$ скалярная величина и $\varphi(\chi) = |\chi|$. Тогда

$$\psi^\circ(z^*(\cdot),\ z^*(\cdot)) = {}^1/_2 M[\{\rho(n;\ X(z^*(\cdot),\ \mu(\cdot),\ \nu(\cdot))) - \rho(-n;\ X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)))\} / z = z^*(\cdot)]$$

$$\varepsilon^* = {}^1/_2 M[\{\rho(n;\ X(z^*(\cdot),\ \mu(\cdot),\ \nu(\cdot))) - \rho(-n;\ X(z^*(\cdot),\ \mu(\cdot), \nu(\cdot)))\} / z = z^*(\cdot)]$$

Действительно, векторы $\{a(\xi) = \rho(-1;\ N^*(\cdot)),\ \ b = \rho(1;\ N^*(\cdot))\}$ случайны с апостериорной функцией распределения $F(\xi)$. По формуле (3.13) получаем

$$\varepsilon^* = \min_\eta \int_{-\infty}^{\infty} [\max\{b(\xi) - \eta,\ \eta - a(\xi)\}]\, dF(\xi), \qquad \eta \in R^{(1)}$$

Обозначим

$$b^* = \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi)\, dF(\xi), \qquad a^* = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi)\, dF(\xi)$$

Утверждение следствия тогда вытекает из очевидного неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\max\{b(\xi)-\eta,\ \eta-a(\xi)\}-\frac{b(\xi)-a(\xi)}{2}\right]dF(\xi)\geqslant 0$$

справедливого для любых η.

4. Апостериорная оценка при помощи ограниченных операций. Рассмотрим систему (1.1), (1.2) и задачу (1.7), предполагая теперь, что $m\times\times p$ — матричные функции $w(\cdot\,/\,z^*(\cdot))\in W$, где W — выпуклое множество $m\times p$-векторного пространства B^* (сопряженного к банахову пространству B), замкнутое в слабой* топологии. Функции $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ считаем фиксированными. Пусть вначале задана $m\times p$-матричная функция $w(\cdot)\in W\cap\Lambda(l)=W(l)$, где l — наблюдаемое направление. Из уравнения (3.1) получаем равенство

$$\langle T_1{}^*w(\cdot),\ x\rangle=\langle T_2{}^*\,w(\cdot),v(\cdot)\rangle+\langle T_3{}^*\,w(\cdot),\xi(\cdot)\rangle-\langle w(\cdot),\ z^*(\cdot)\rangle \tag{4.1}$$

справедливое для любых $\{x,\ v(\cdot),\ \xi(\cdot)\}$, совместимых с $z^*(\cdot)$, т. е.

$$x\in X(z^*(\cdot),\ \mu(\cdot),\ \nu(\cdot)),\quad v(\cdot)\in V(\mu(\cdot)),\quad \xi(\cdot)\in\Xi(\nu(\cdot))$$

В результате имеем

$$\langle l,\ x\rangle\leqslant\rho\,(T_2{}^*w(\cdot);\quad V(\mu(\cdot)))+\rho\,(T_3{}^*\,w(\cdot);\quad \Xi(\nu(\cdot)))-$$
$$-\langle w(\cdot),\ z^*(\cdot)\rangle=\Phi_+(w(\cdot),\ \mu(\cdot),\ \nu(\cdot),\ z^*(\cdot))$$

Отсюда находим

$$\langle l,\ x\rangle\leqslant\inf\nolimits_w\Phi_+(w(\cdot),\ \mu(\cdot),\nu(\cdot),\ z^*(\cdot)),\quad w(\cdot)\in W(l) \tag{4.2}$$

и аналогично

$$\langle l,\ x\rangle\geqslant\sup\nolimits_{w(\cdot)}\Phi_-(w(\cdot),\ \mu(\cdot),\ \nu(\cdot),\ z^*(\cdot)),\quad w(\cdot)\in W(l) \tag{4.3}$$
$$\Phi_-(w(\cdot),\ \mu(\cdot),\ \nu(\cdot),\ z^*(\cdot))=\langle w(\cdot),\ z^*(\cdot)\rangle+$$
$$+\rho\,(-T_2{}^*\,w(\cdot);\ V(\mu(\cdot)))+\rho\,(-T_3{}^*\,w(\cdot);\ \Xi(\nu(\cdot)))$$

т. е.

$$\langle l,\ x\rangle\geqslant-\inf\nolimits_{w(\cdot)}\ \Phi_-(w(\cdot),\ \mu(\cdot),\ \nu(\cdot),\ z^*(\cdot)),\quad w(\cdot)\in W(l)$$

Пусть множество $W(l)$ ограничено. Тогда операции inf условий (4.2), (4.3) могут быть заменены на min. Важно подчеркнуть, что здесь для получения апостериорной оценки не требуется знать заранее множество $W^*(z^*(\cdot),\ \mu(\cdot),\ \nu(\cdot))$, поскольку в (4.2) оценки осуществляются по помехам $v(\cdot)\in V(\mu(\cdot))$, $\xi(\cdot)\in\Xi(\lambda(\cdot))$.

5. Сравнение априорных и апостериорных оценок. Рассмотрим вначале чисто детерминированный случай. Итак, пусть $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ неслучайны. Сравним числа $\varepsilon^\circ=\min\varepsilon(\mu(\cdot),\ \nu(\cdot),\ w(\cdot))$ по $w(\cdot)\in W_H$ и $\varepsilon^*=$ $=\varepsilon^*(z^*(\cdot))=\min\varepsilon^*(\mu(\cdot),\ \nu(\cdot),\ w(\cdot\,/\,z^*(\cdot)))$ по $w(\cdot\,/\,z^*(\cdot))\in W_H$ —

ошибки наблюдения, полученные соответственно при априорном и при апостериорном наблюдении.

Принимая во внимание выражение для $f(\mu(\cdot), \nu(\cdot), w(\cdot), \alpha)$, формулы (2.8), (2.9), (3.4), (3.6) и лемму 3.4, заключаем

$$\varepsilon^\circ = \inf_{w\in W_H} \sup_\alpha \Big\{ \int_{t_0}^{\vartheta} \nu(t)\rho(q(t, \alpha w(\cdot))H(t); Q)\,dt + \tag{5.1}$$
$$+ \int_{t_0}^{\vartheta} \mu(t)\rho(s(t, \alpha w(\cdot))B(t) - q(t, \alpha w(\cdot))C(t); P)\,dt - \varphi^*(\alpha)\Big\} \geqslant$$
$$\geqslant \sup_\alpha \{\rho(\alpha N; X(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot))) - \varphi^*(\alpha)\} = \varepsilon^*(0), \quad \alpha \in R^{(p)}$$

Заметим, что множество $X(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ симметрично относительно начала координат (последнее вытекает из соответствующего определения и симметрии множеств P, Q). Поэтому (5.1) допускает следующую интерпретацию.

Лемма 5.1. Пусть $\mu(\cdot), \nu(\cdot)$ — заданные детерминированные функции. Ошибка ε° априорного наблюдения параметра $\eta(\vartheta)$ по сигналу $y(\cdot)$ (1.1), (1.2) не меньше числа $\varepsilon^*(0)$ — неулучшаемой оценки ошибки апостериорного наблюдения параметра $\eta(\vartheta)$ по сигналу $z^*(\cdot) \equiv 0$ (1.1), (1.2).

Прямым счетом убеждаемся в том, что если α — скаляр и $\varphi(\chi) = |\chi|$, то $\varepsilon^\circ = \varepsilon^*(0)$.

Учитывая, что ошибка ε° априорного наблюдения достигается на линейной операции $\langle w(\cdot), z(\cdot)\rangle$, а на основании леммы 5.1 она не может быть улучшена, приходим к следующему результату.

Следствие 5.1. Если α — скаляр и $\varphi(\chi) = |\chi|$, то неулучшаемая априорная оценка достигается на линейной операции $\langle w(\cdot), z(\cdot)\rangle$, удовлетворяющей условиям (2.6), (2.7) и моментным равенствам (2.3).

Перейдем к сравнению $\varepsilon^*(0)$ и $\varepsilon^*(z^*(\cdot))$, для чего сопоставим $W^*(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ с $W(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$. Обозначим m-мерное пространство, натянутое на векторы строки матрицы $Z(t, \vartheta)$, символом H^m. ($H^m = \{h(t){:}\ h(t) = Z(t, \vartheta)\,l$ при некотором $l \in R^{(n)}\}$). Тогда из формулы (3.1) заключаем

$$W^*(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot)) = \{v(\cdot), \xi(\cdot){:}\ T_2 v(\cdot) + T_3\xi(\cdot) \in H^m\} \tag{5.2}$$
$$v(\cdot) \in V(\mu(\cdot)), \qquad \xi(\cdot) \in \Xi(\nu(\cdot))$$

и аналогично, в общем виде, для тех же классов

$$W^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)) = \{v(\cdot), \xi(\cdot){:}\ T_2 v(\cdot) + T_3 \xi(\cdot) - z^*(\cdot) \in H^m\} \tag{5.3}$$

Будем рассматривать функции $z^*(\cdot)$ как элементы пространства $L_2^{(m)}$, т. е. будем полагать $B = L_2^{(m)}$ (см. п. 3). Тогда и $H^m \in L_2^{(m)}$. Пусть H_1^m означает ортогональное дополнение H^m в $L_2^{(m)}$.

Любой элемент $h(\cdot) \in L_2^{(m)}$ теперь может быть представлен в виде $h(\cdot) = (h(\cdot))_0 + (h(\cdot))_1$, где $(h(\cdot))_0 \in H^m$, $(h(\cdot))_1 \in H_1^m$. Можно проверить, что любая пара $\{v(\cdot), \xi(\cdot)\} \in W^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ представима в виде

(5.4) $$v(\cdot) = v^\circ(\cdot) + v^*(\cdot), \qquad \xi(\cdot) = \xi^\circ(\cdot) + \xi^*(\cdot)$$

где элемент $\{v^\circ(\cdot), \xi^\circ(\cdot)\} \in W^*(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ зависит, вообще говоря, от $\{v(\cdot), \xi(\cdot)\}$, и элемент $\{v^*(\cdot), \xi^*(\cdot)\} \in W^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ зафиксирован, (т. е. от $\{v(\cdot), \xi(\cdot)\}$ уже не зависит). Тогда

(5.5) $$W^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)) = W^\circ(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot) / z^*(\cdot)) + \\ + w^*(z^*(\cdot), \mu(\ ), \nu(\cdot))$$

Здесь $W^\circ(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot) / z^*(\cdot)) = \{\{v^\circ(\cdot), \xi^\circ(\cdot)\}\}$ — множество элементов $\{v^\circ(\cdot), \xi^\circ(\cdot)\}$, полученных из (5.4), $w^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)) = \{v^*(\cdot), \xi^*(\cdot)\}$. Ясно, что $W^\circ(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot) | z^*(\cdot)) \subset W^*(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ Обозначим

(5.6) $$T_2 v^*(\cdot) + T_3 \xi^*(\cdot) = f^*(\cdot), \qquad f^*(\cdot) = (f^*(\cdot))_0 + (f^*(\cdot))_1$$

Учитывая структуру множества $W^\circ(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot) / z^*(\cdot))$ элемента $f^*(\cdot)$ (5.6) и формулы (3.6) леммы 3.9 прямым счетом убеждаемся в справедливости равенства

(5.7) $$\rho(l; X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))) = \langle \lambda^\circ(\cdot), (z^*(\cdot) + f^*(\cdot))_0 \rangle + \\ + \rho(s(t, \lambda^\circ(\cdot)) B(t) - q(t, \lambda^\circ(\cdot)) C(t), q(t, \lambda^\circ(\cdot)) H(t); \\ W^\circ(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot) / z^*(\cdot)))$$

Здесь $\lambda^\circ(\cdot) \in H^m$ — единственное решение уравнения $T_1^* \lambda(\cdot) = l$ при условии $\langle \lambda^\circ(\cdot), \lambda^\circ(\cdot) \rangle = \min$. Из формул (5.7), (3.8), (3.9), (2.6) заключаем ($\zeta, \alpha \in R^{(p)}$)

(5.8) $$\varepsilon^*(z^*(\cdot)) = \min_\zeta \sup_\alpha \{\rho(\alpha N; X(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))) - \langle \alpha, \zeta \rangle - \\ - \varphi^*(\alpha)\} \leqslant \sup_\alpha \{\rho(s(t; \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha N}(\cdot)) B(t) - q(t, \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha N}(\cdot)) \cdot C(t) \\ q(t, \overset{\circ}{\lambda}_{\alpha N}(\cdot)) H(t); W^\circ(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot) / z^*(\cdot)) - \varphi^*(\alpha)\} \leqslant \varepsilon^*(0)$$

Неравенство (5.8) и лемма 5.1 приводят к утверждению.

Теорема 5.1. Пусть $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ — заданные детерминированные функции. Тогда ошибка ε° априорного наблюдения параметра $\eta(\vartheta)$ по любому сигналу $y(\cdot)$ (1.1), (1.2) не меньше числа $\varepsilon^*(z^*(\cdot))$ — неулучшаемой оценки ошибки апостериорного наблюдения параметра $\eta(\vartheta)$ по сигналу $y^*(\cdot)$.

Примечание 5.1. Если сигнал $z^*(\cdot) \in H^m$, то множество $w^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ содержит нулевой элемент. Из (5.2), (5.3) тогда следует, что $W^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)) = W^*(0, \mu(\cdot), \nu(\cdot))$. Таким образом, наблюдение сигнала $z^*(\cdot) \in H^m$ не доставляет дополнительной информации, позволяющей уменьшить ошибку $\varepsilon^*(z^*(\cdot))$ по сравнению с оценкой $\varepsilon^*(0)$ (а при $\varepsilon^*(0) = \varepsilon^\circ$ — даже по сравнению с оценкой ε° априорного наблюдения).

Покажем теперь, что неулучшаемая операция $\psi(z^*(\cdot), z^*(\cdot))$, реализующая «φ-центр» множества $N^*(\cdot)$ (см. п. 3) достигается на операциях вида

(5.9) $$\psi(z^*(\cdot), z^*(\cdot)) = \langle w(\cdot / z^*(\cdot)), z^*(\cdot) \rangle$$

В самом деле, искомая операция должна удовлетворять следующим моментным равенствам:

$$\langle w(\cdot\,/\,z^*(\cdot)),\ z^*(\cdot)\rangle = \eta^\circ,\ \langle w(\cdot\,/\,z^*(\cdot)),\ Z(\cdot,\ \vartheta)\rangle = -N \tag{5.10}$$

Если строки n_i' матрицы N — наблюдаемые направления, а $(z^*(\cdot))_1 \neq 0$, то на основании известных результатов теории управления [1] заключаем, что задача (5.10) разрешима в B^* при любых η°, N.

Пусть $z^*(\cdot) \in H^m$, т. е. $z^*(t) = Z(t,\ \vartheta)\,c$, где $c \in R^m$. Множество $W^*(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot))$ тогда симметрично относительно начала координат. Отсюда прямым счетом убеждаемся, что множество $N^*(\cdot) = NX(z^*(\cdot), \mu(\cdot), \nu(\cdot)) \in R^{(p)}$ симметрично относительно точки $\eta^\circ = Nc$, которая и доставляет в данном случае «чебышевский центр» множества $N^*(\cdot)$. Следовательно, любая операция $w(\cdot\,/\,z^*(\cdot))$, удовлетворяющая условию несмещенности (5.10), доставляет при этом условии неулучшаемую оценку $\eta^\circ(N^*(\cdot))$.

Отметим, что неулучшаемая оценка $\eta^\circ(N^*(\cdot))$ достигается в общем случае на операции (5.9), которая, вообще говоря, не линейна по $z^*(\cdot) \in$ $\in B$.

Пусть теперь ограничения $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ — вероятностные процессы с известными априорными распределениями. Тогда из (3.11), (1.3) имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon^*(z^*(\cdot)) = \min_\zeta M\{\sup_\alpha[\rho(\alpha;\ N^*(\cdot)) - \langle\alpha,\ \zeta\rangle - \\ - \varphi^*(\alpha)]/\,z = z^*(\cdot)\} \leqslant \min_\zeta \max_{y(\cdot)} M\{\sup_\alpha[\rho(\alpha;\ N^*(\cdot)) - \\ - \langle\alpha,\ \zeta\rangle - \varphi^*(\alpha)]\,/\,y = y(\cdot)\} \leqslant \varepsilon^\circ\end{aligned} \tag{5.11}$$

Отсюда и из теоремы 5.1 следует справедливость утверждения.

Теорема 5.2. Пусть $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ — заданные случайные процессы. Тогда ошибка (3.11) в задаче об апостериорном наблюдении векторного параметра $\eta(\vartheta)$ по любому сигналу $y^*(\cdot)$ (1.1), (1.2) не превосходит ошибки ε° в соответствующей задаче априорного наблюдения.

Отметим, что рассмотрение именно апостериорных операций наблюдения важно для описания задач конфликтного управления при неполной информации о положении системы, примыкающих к задачам, изученным в монографии [12].

Примечание 5.2. Математическое ожидание в (5.11) вычисляется по апостериорному распределению $(\mu(\cdot),\ \nu(\cdot))$ [13]. Это распределение строится таким образом, чтобы исключить реализации $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$, при которых не может наблюдаться сигнал $z^*(\cdot)$.

Примечание 5.3. В данной работе предполагалось, что возможно непрерывное измерение сигнала $z^*(\cdot)$, однако рассуждения проходят и для более общих линейных «операторов измерения» $Mx(\cdot) = z^*(\cdot)$. Оптимальному выбору способов измерения сигнала $x(\cdot)$ посвящены исследования [14, 15].

6. Примеры. 1) Рассмотрим задачу о наблюдении величины $\eta = x_2(\vartheta)$ в силу системы

$$x_1^{\boldsymbol\cdot} = x_2,\quad x_2^{\boldsymbol\cdot} = v \tag{6.1}$$

по сигналу $y(t)$, $t \in [0,\ \vartheta]$, связанному с системой (6.1) уравнением

$$y^{\boldsymbol\cdot} = x_2 + v \tag{6.2}$$

Здесь помеха $v(t)$ стеснена ограничением $|v(t)| \leqslant \mu$ (μ — случайная величина с априорным распределением $F(u)$), сосредоточенным на $[0, \mu_0]$.

Оценим сначала ошибку ε° априорного наблюдения. Для этого в соответствии с результатами п. 5 достаточно рассмотреть сигнал $y^*(t) \equiv 0$ и вычислить величину $\varepsilon^*(0, \mu) = \varepsilon^\circ(\mu)$. Из (6.2) следует, что множество $W^*(0, \mu)$ (при фиксированном μ) состоит из решений уравнения $v^\cdot + v = 0$, стесненных условием $|v| \leqslant \mu$. Таким образом, $W^*(0, \mu) = \{v(t) : v(t) = ce^{-t}, |c| \leqslant \mu\}$. Для величины $x_2(\vartheta)$ имеем тогда оценку

$$\min_{v(\cdot) \in W^*(0,\mu)} [-v(\vartheta)] \leqslant x_2(\vartheta) \leqslant \max_{v(\cdot) \in W^*(0,\mu)} [-v(\vartheta)]$$

или $-\mu e^{-\vartheta} \leqslant x_2(\vartheta) \leqslant \mu e^{-\vartheta}$, следовательно

$$\varepsilon^\circ(\mu) = \mu e^{-\vartheta} = \varepsilon^*(0, \mu)$$

Если μ – случайная величина, то априорная оценка $\varepsilon^\circ = \max M\{\varepsilon^\circ(\mu) / y = y(\cdot)\}$ по $y(\cdot)$. Этот максимум достигается, например, на сигнале $y(t) = \alpha t^2 / 2$, где $\alpha = \mu_0 \operatorname{cth}(\vartheta / 2)$, поскольку при таком сигнале условное распределение вырождается и дает постоянную μ_0.

2) Рассмотрим задачу (6.1), (6.2) об апостериорном наблюдении величины $\eta = x_2(\vartheta)$ по сигналу $y^*(t) = t^2 / 2$. Множество $W^*(y^*(\cdot), \mu)$ (μ фиксировано) определяется теперь условиями

$$v(t) = ce^{-t} + 1, \quad -(1 + \mu) \leqslant c \leqslant (\mu - 1) e^{\vartheta} \quad \text{при} \quad \mu^* \leqslant \mu \leqslant \mu_0$$

При $\mu < \mu^* = \operatorname{th}(\vartheta / 2)$ множество $W(y^*(\cdot), \mu)$ пусто. Для оценки η величины $x_2(\vartheta)$ имеем

$$\eta(y^*(\cdot), \mu) = \vartheta + (\mu + 1)(e^{-\vartheta} + 1) / 2 \quad \text{при} \quad \mu^* \leqslant \mu \leqslant \mu_0$$

Ошибка оценки определяется равенством

$$\varepsilon^*(y^*(\cdot), \mu) = (1 + e^{-\vartheta})(\mu - \mu^*) / 2 \quad \text{при} \quad \mu^* \leqslant \mu \leqslant \mu_0$$

Непосредственно проверяется, что $\varepsilon^*(y^*(\cdot), \mu) < \varepsilon^*(0, \mu)$. Если μ — случайная величина, то ошибка ε^* определяется соотношениями

$$\varepsilon^* = M\left\{\varepsilon^*(y^*(\cdot), \mu) / y^*(t) = \frac{t^2}{2}\right\} = \int_{\mu^*}^{\mu_0} \beta(u - \mu^*)\, dF\left(u / y^*(t) = \frac{t^2}{2}\right) =$$

$$= p^{-1} \int_{\mu^*}^{\mu_0} \beta(u - \mu^*)\, dF(u) \leqslant \beta(\mu_0 - \mu^*) < \varepsilon^\circ$$

$$\beta = \frac{1 + e^{-\vartheta}}{2}, \qquad p = \int_{\mu^*}^{\mu_0} dF(u)$$

Здесь $F(u / y^* = t^2 / 2)$ — апостериорное распределение величины μ.

Поступила 21 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
2. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. М., «Мир», 1971.
3. *Брайсон А., Хо Ю — Ши.* Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. М., «Мир», 1972.

4. *Куржанский А. Б.* О двойственности задач оптимального управления и наблюдения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
5. *Кац И. Я., Куржанский А. Б.* О некоторых задачах наблюдения и управления в случайных обстоятельствах. Автоматика и телемеханика, 1970, № 12.
6. *Кац И. Я., Куржанский А. Б.* О двойственности статистических задач оптимального управления и наблюдения. Автоматика и телемеханика. 1971, № 3.
7. *Куржанский А. Б.* Дифференциальные игры наблюдения. Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 3.
8. *Fan Ky.* Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations. Math. Z., 1957, Bd 68, No 2.
9. *Rockafellar R. T.* Convex Analysis. Princeton, Univ. Press, 1970.
10. *Красовский Н. Н.* О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи. ПММ, 1963, т. 27, вып. 4.
11. *Fan Ky.* Minimax theorems. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1953, vol. 39, No. 1.
12. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
13. *Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р. Г.* Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
14. *Черноусько Ф. Л.* Об оптимизации процесса наблюдения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
15. *Колмановский В. Б.* Оптимальное сочетание управления и наблюдения. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.