УДК 539.3

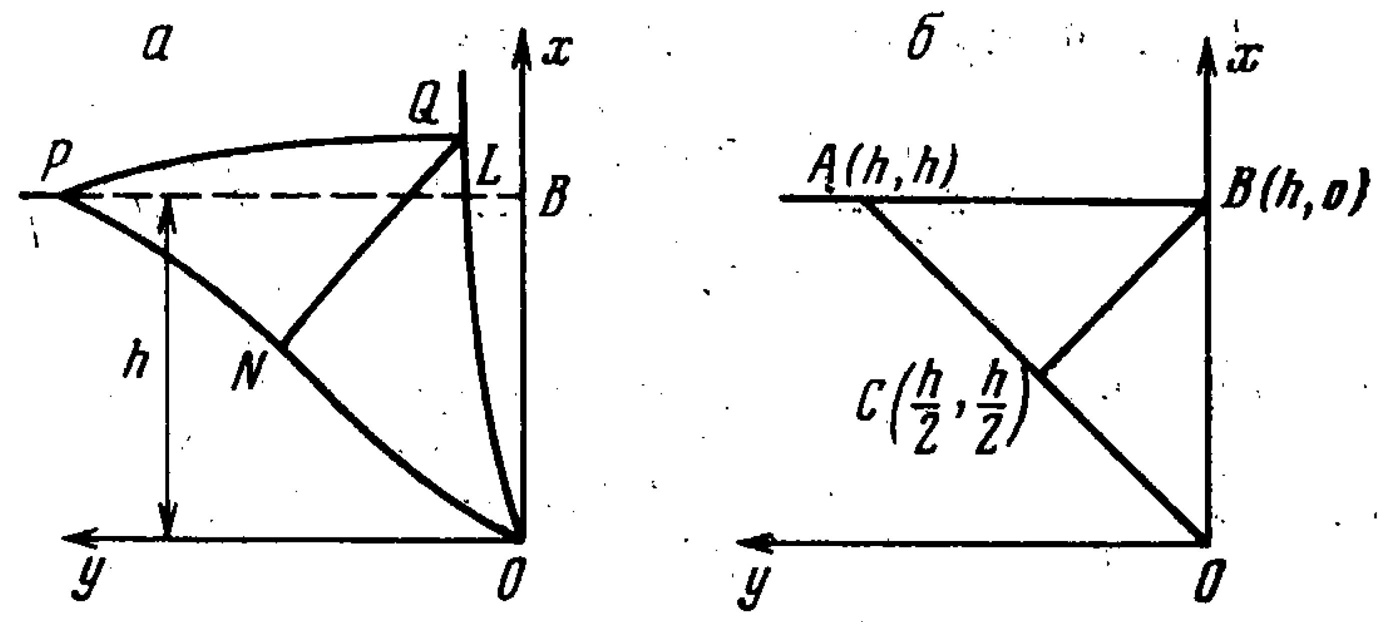
К ЗАДАЧЕ О ВДАВЛИВАНИИ ТОНКОГО ЖЕСТКОГО ТЕЛА В ПЛАСТИЧЕСКУЮ СРЕДУ С УПРОЧНЕНИЕМ

В. В. Дуров

(Москва)

На основании линеаризованного решения [1] задачи о вдавливании тонкого жесткого тела в пластическую среду, обладающую трансляционным упрочнением, определяется граница, отделяющая пластическую область от жесткой.

Рассматривается случай тела, имеющего форму клина. В частности, в пренебрежении упрочнением получено решение задачи о вдавливании тонкого клина в идеально пластическое полупространство; проводится сравнение с известным решением Хилла, Ли и Таппера [2].



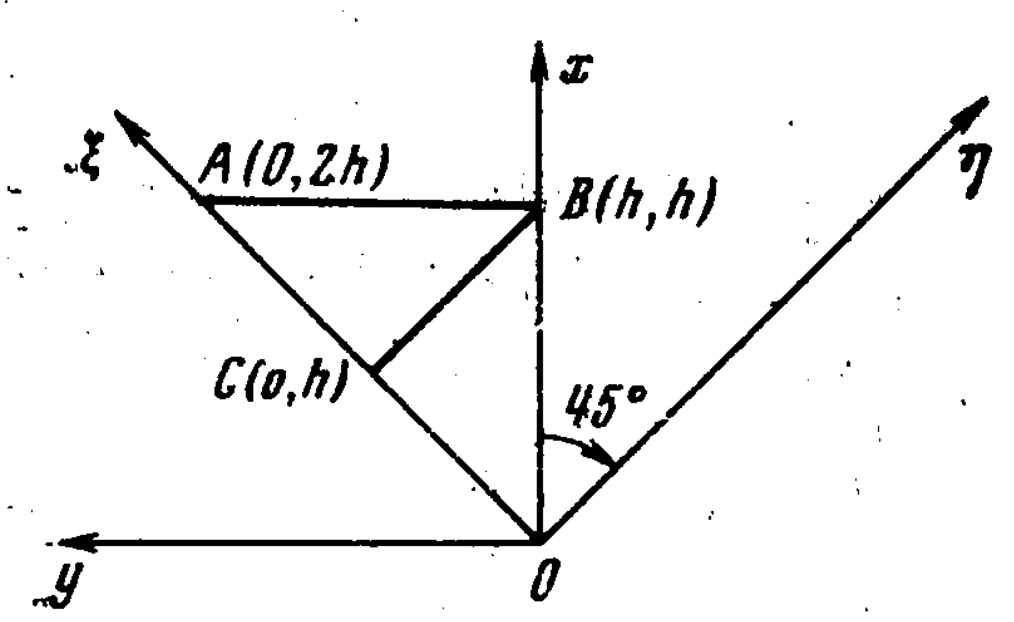
Фиг. 1

1. Считая, что пластический материал находится в условиях плоской деформации, и направляя оси координат, как показано на фиг. 1, *а*, запишем уравнение поверхности тела в виде

$$y = \delta f(x), \; f(0) = 0, \quad F_2(0) = 0 \; (F_i \equiv d^i f / dx^i) \tag{1.1}$$

где δ — малый безразмерный параметр, f — достаточно гладкая функция.

В начальный момент материал занимает полупространство $x \leqslant 0$. Обращая движение, будем считать, что тело неподвижно, а среда смещается поступательно вверх по оси x с некоторой постоянной скоростью.



Фиг. 2

В дальнейшем наряду с переменными x, y используем переменные

$$\eta = x - y, \quad \xi = x + y \tag{1.2}$$

Линеаризованное решение задач найдено в [1]. Из него следует, что пластическая область AOB (фиг. 2) состоит из двух зон: OBC $(0 \leqslant \xi \leqslant h)$ и ABC $(h \leqslant \xi \leqslant 2h)$. На прямой BC $(\xi = h)$ напряжения непрерывны. Уравнение выпучившейся поверхности пластического материала имеет вид [1]

$$x - h = \delta f(h - y) \tag{1.3}$$

Граница, отделяющая пластическую область от жесткой, в нулевом приближении определяется уравнением (фиг. 1, *б*) $x - y = 0$, которое в переменных η, ξ имеет вид

$$\eta(\xi) = 0 \tag{1.4}$$

Варьируя (1.4), получим уравнение жестко-пластической границы в первом приближении $\eta + \delta\gamma'(\xi) = 0$, или в переменных x, y

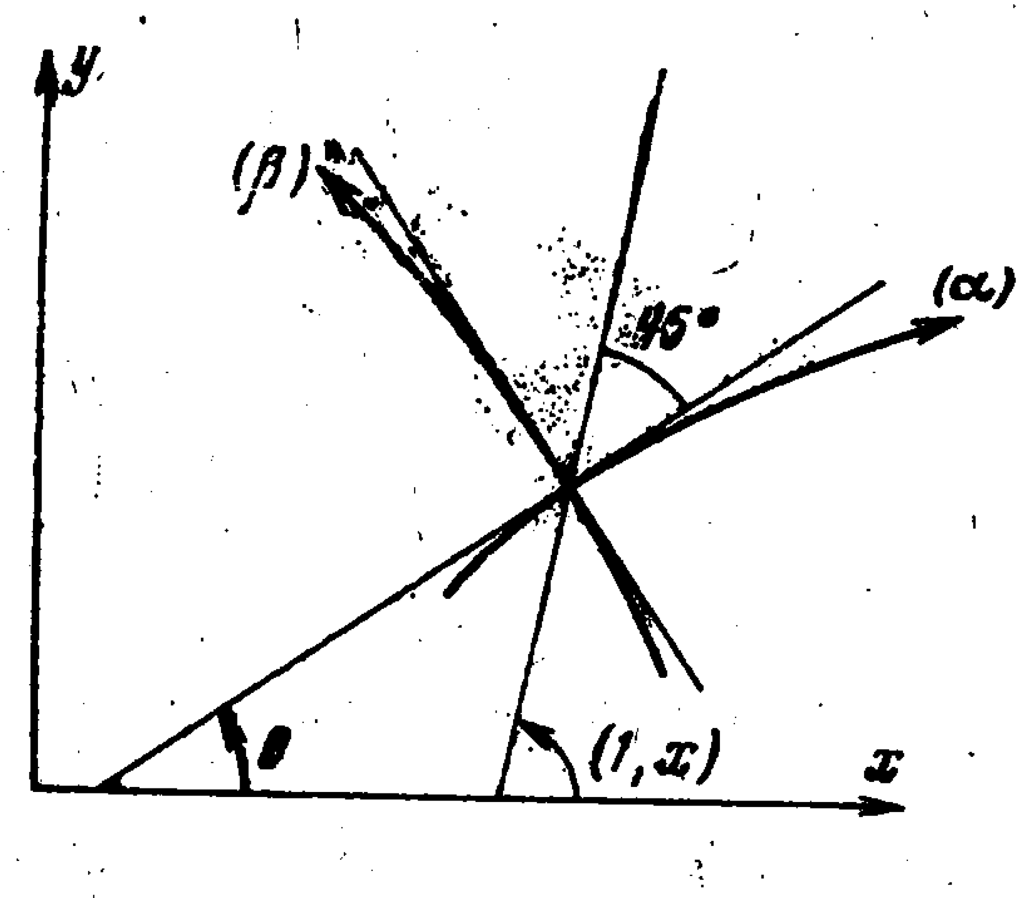
$$x - y + \delta\gamma'(x + y) = 0 \tag{1.5}$$

Здесь функция $\gamma'(x + y) = \gamma'(\xi)$ подлежит определению.

В рассматриваемой задаче жестко-пластическая граница будет линией скольжения второго семейства (β-линией). Поэтому ее дифференциальное уравнение

$$dy / dx = -\operatorname{ctg}\theta \tag{1.6}$$

где смысл угла θ виден из фиг. 3. Производную dy/dx вычислим по уравнению (1.5). Тогда уравнение (1.6) принимает вид



Фиг. 3

$$\operatorname{ctg}\theta = -[1 + 2\delta\Gamma'(\xi)] \tag{1.7}$$
$$\Gamma'(\xi) = d\gamma'(\xi)/d\xi$$

Первое главное направление образует с осью x угол (фиг. 3)

$$\operatorname{tg}2(1,\ x) = 2\tau/\sigma_x - \sigma_y \tag{1.8}$$

Из фиг. 3 видно, что $(1, x) = \theta + \pi/4$, отсюда $\operatorname{tg}2(1,x) = -\operatorname{ctg}2\theta$. Сравнивая с (1.8), находим

$$2\tau/\sigma_x - \sigma_y = -\operatorname{ctg}2\theta \tag{1.9}$$

Величину $\operatorname{ctg}2\theta$ вычислим по (1.7) и внесем результат в (1.9). Имеем соотношение

$$\frac{\delta\tau'}{2k + \delta(\sigma_x' - \sigma_y')} = \delta\Gamma'(\xi)$$

линеаризуя которое, получим

$$\Gamma'(\xi) = \tau'/2k \quad \text{при} \quad \eta = 0 \tag{1.10}$$

В зоне OBC интегрирование уравнения (1.10), согласно [1], дает

$$\gamma'(\xi) = \frac{1}{2k}\left\{\left(k - \frac{c}{2}\right)\xi F_1(0) + \left(k + \frac{c}{2}\right) f(\xi) - \operatorname{ch} F_1(\xi) + {} \right. \tag{1.11}$$
$$\left. + c\,[\xi F_1(\xi) - f(\xi)]\right\} + a$$
$$a = c\frac{h}{2k}F_1(0)$$

Постоянная интегрирования a находится из условия прохождения жестко-пластической границы через начало координат. Внося (1.11) в (1.5), окончательно получим для зоны OBC

$$x - y + \delta/2k\ \{(k - \frac{c}{2})\,[f(x+y) + (x+y)\,F_1(0)] + c\,[hF_1(0) + {} \tag{1.12}$$
$$+ (x + y - h)\,F_1(x+y)] = 0$$

Интегрируя соотношение (1.10) в зоне ABC, получим

$$\gamma'(\xi) = \frac{1}{2k}\left[\left(k - \frac{c}{2}\right)\xi F_1(0) - \left(k + \frac{c}{2}\right) f(2h - \xi)\right] + b \tag{1.13}$$

Здесь постоянная интегрирования b не может быть определена из условия прохождения жестко-пластической границы через точку P, в которой материал среды начинает выпучиваться (фиг. 1, a), так как известна лишь абсцисса этой точки $x_p = h$, но не ее ордината. Действительно, уравнению (1.3) выпучившейся поверхности среды удовлетворяет всякая точка с координатами $(h,\ h + \delta\lambda)$, где λ — произвольное вещественное число.

Поэтому постоянную интегрирования b будем искать из условия прохождения жестко-пластической границы через точку N пересечения этой границы с линией QN, разделяющей пластические зоны в физической плоскости (фиг. 1, a).

Уравнение линии QN найдем следующим образом. В нулевом приближении QN совпадает с прямой BC (фиг. 2) и описывается уравнением $\xi - h = 0$. Варьируя и переходя к координатам x, y, получаем уравнение линии QN

$$x + y - h + \delta\omega(x - y) = 0 \tag{1.14}$$

Линия QN представляет собой линию скольжения первого семейства (α-линией), поэтому ее дифференциальное уравнение

$$dy \,/\, dx = \operatorname{tg}\theta \tag{1.15}$$

Вычисляя производную $dy \,/\, dx$ по (1.14) и подставляя результат в уравнение (1.15), перепишем его в виде

$$\operatorname{tg}\theta = -\,(1 + 2\delta d\omega \,/\, d\eta) \tag{1.16}$$

С учетом (1.16) соотношение (1.9) принимает вид

$$\frac{\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = -\,\delta\,\frac{d\omega}{d\eta} \tag{1.17}$$

Внося в (1.17) напряжения и линеаризуя, получим

$$\frac{d\omega}{d\eta} = -\,\frac{\tau'}{2k} \quad \text{при } \xi = h \tag{1.18}$$

Интегрирование этого соотношения дает (A — постоянная интегрирования)

$$\omega(\eta) = -\,\frac{1}{2k}\left[kf(\eta)\left(k + \frac{c}{2}\right)\eta F_1(h) + \frac{c}{2}(h - \eta)\,F_1(\eta)\right] + A \tag{1.19}$$

Подставляя (1.19) в уравнение (1.14) линии QN, имеем

$$x + y - h - \frac{\delta}{2k}\left\{-2kA + \left[kf(x - y) + \left(k + \frac{c}{2}\right)(x - y)\,F_1(h) - \right.\right.$$
$$\left.\left. -\,\frac{c}{2}(x - y - h)\,F_1(x - y)\right]\right\} = 0 \tag{1.20}$$

Решая совместно уравнения (1.1) и (1.3), находим координаты точки Q (фиг. 1, a)

$$x_Q = h + \delta f(h), \quad y_Q = y_L = \delta f(h) \tag{1.21}$$

Подставляя координаты точки Q по (1.21) в уравнение (1.20) линии QN, находим значение постоянной A. Тогда уравнение (1.20) линии QN принимает вид

$$x + y - h - \frac{\delta}{2k}\left[kf(x - y) + 3kf(h) + \left(k + \frac{c}{2}\right)(x - y - h)\,F_1(h) - \right.$$
$$\left. -\,\frac{c}{2}(x - y - h)\,F_1(x - y)\right] = 0 \tag{1.22}$$

Координаты точки N находим, решая совместно уравнения (1.22) линии QN и (1.12) линии ON (фиг. 1, a)

$$x_N = \frac{h}{2} + \frac{\delta}{4k}\left\{2kf(h) - kh\,[F_1(0) + F_1(h)] + \frac{c}{2}\,[f(h) - hF_1(h)]\right\}$$
$$y_N = \frac{h}{2} + \frac{\delta}{4k}\left\{4kf(h) + (k + c)\,h\,[F_1(0) - F_1(h)] - \frac{c}{2}\,[f(h) - hF_1(h)]\right\} \tag{1.23}$$

Теперь можно найти оставшийся участок NP жестко-пластической границы. Его уравнение согласно (1.5) и (1.13)

$$x - y + \frac{\delta}{2k}\left[\left(k - \frac{c}{2}\right)(x + y)\,F_1(0) - \left(k + \frac{c}{2}\right)f(2h - x - y) + 2kb\right] = 0 \tag{1.24}$$

Подставляя в (1.24) координаты точки N по (1.23), найдем значение постоянной b. Тогда уравнение (1.24) линии NP принимает вид

$$x - y + \frac{\delta}{2k}\left[2kf(h) + \left(k - \frac{c}{2}\right)(x + y)\,F_1(0) - \right.$$
$$\left. -\left(k + \frac{c}{2}\right)f(2h - x - y) + \mathrm{ch}\;F_1(0)\right] = 0 \tag{1.25}$$

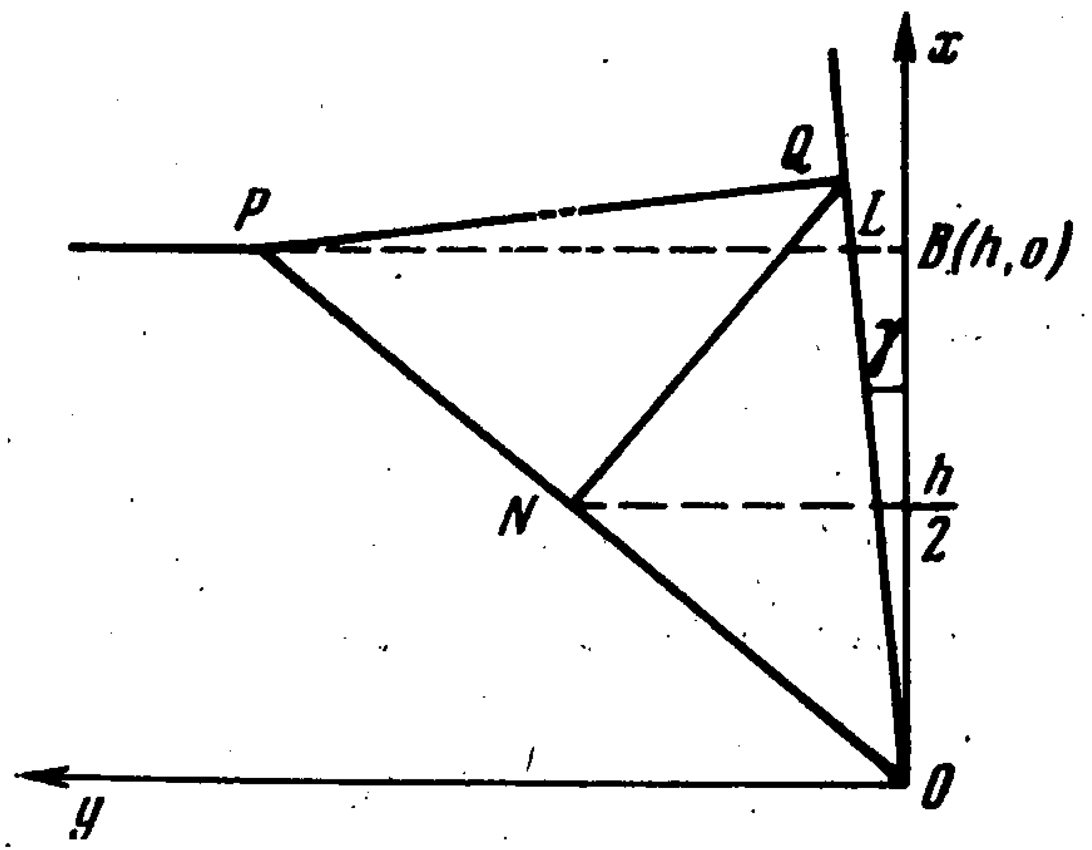
Таким образом, жестко-пластическая граница полностью определена соотношениями (1.12) и (1.25) соответственно для зон OBC и ABC.

Полагая в (1.25) $x = h$, находим ординату точки P

$$y_P = h + \delta\,[f(h) + hF_1(0)] \tag{1.26}$$

Заметим, что в силу несжимаемости материала среды площади криволинейных фигур OLB и PQL (фиг. 1, *а*) должны быть равны. Видно, что это интегральное соотношение выполняется тождественно; общее же значение указанных площадей оказывается равным

$$\delta\left[\frac{F_1(0)}{2!}h^2 + \frac{F_3(0)}{4!}h^4 + \frac{F_4(0)}{5!}h^5 + \ldots\right]$$



Фиг. 4

2. Рассмотрим тело, имеющее форму клина. В этом частном случае функция f в уравнении (1.1) линейна, и оно принимает вид

$$y = (\operatorname{tg}\alpha)x \quad (\operatorname{tg}\alpha = \delta F_1(0)) \tag{2.1}$$

Здесь α — полуугол раствора клина (фиг. 4). Полное линеаризованное решение согласно [1]

$$\begin{gathered} u = u^\circ + \delta u^\circ F_1(0), \quad v = \delta u^\circ F_1(0) \\ s_x = h + \delta F_1(0)(x - y), \quad s_y = \delta F_1(0)(x - y) \\ e_x = -e_y = \delta F_1(0), \quad e_{xy} = 0 \\ \sigma_x = 0, \quad \tau = 2\delta k F_1(0), \quad \sigma_y = -2k - 2\delta c F_1(0) \end{gathered} \tag{2.2}$$

Отметим, что каждое из напряжений дается одной формулой во всей пластической области. Кроме того, напряжения постоянны; следовательно, всюду в пластической области напряженное состояние однородно.

Уравнение выпучившейся поверхности среды в силу (1.3) и (2.1) имеет вид

$$x - h = \delta F_1(0)(h - y) \tag{2.3}$$

Жестко-пластическая граница согласно (1.12), (1.25) и (2.1) дается уравнением

$$x - y + \delta F_1(0)(x + y) = 0 \tag{2.4}$$

Соотношения (2.3) и (2.4) показывают, что граница выпучившегося материала и жестко-пластическая граница прямолинейны (фиг. 4).

Координаты точек N и P найдутся по (1.23), (1.26) и (2.1). Точка Q имеет по (1.21) и (2.1) координаты

$$x_Q = h + \delta h F_1(0), \quad y_Q = y_L = \delta h F_1(0)$$

Линия QN согласно (1.22) и (2.1) будет прямой

$$x + y - h - \delta F_1(0)(x - y + h) = 0$$

В случае идеально пластической среды $c = 0$ во всех формулах п. 1. Если, кроме того, граница тела прямолинейна, то все формулы п. 2, за исключением последней формулы (2.2) для напряжения σ_y, будут справедливы для идеально пластической среды, так как не содержат параметра c. Напряжение σ_y принимает вид

$$\sigma_y = -2k \tag{2.5}$$

Интересно сравнить полученное решение с известным решением Хилла, Ли и Таппера задачи о вдавливании клина в идеально пластическое полупространство [2]. Видно, в частности, что между треугольниками PQN и OQN (фиг. 4) располагается центрированный веер с углом раствора β, определяемым формулой

$$2\alpha = \beta + \operatorname{arccostg}(\pi/4 - \beta/2) \tag{2.6}$$

Если, как и в рассматриваемом здесь случае, угол 2α раствора клина мал, то будет малым и угол β раствора веера. Тогда из соотношения (2.6) следует, что с точностью до малых высшего порядка выполняется равенство $\beta = 2\alpha^2$, которое перепишем в виде

$$\beta = 2\delta^2 F^2{}_1(0) \tag{2.7}$$

Как видно из (2.7), веер появляется лишь во втором приближении; в первом же приближении он вырождается в прямую QN (фиг. 4).

Таким образом, геометрическая картина вдавливания клина по Хиллу совпадает с изображенной на фиг. 4. Совпадают также в обоих случаях поля напряжений; что же касается полей скоростей, то они одинаковы с точностью до обращения движения.

Поступила 14 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дуров В. В., Ивлев Д. Д.* О вдавливании тонкого жесткого тела в пластическую среду с упрочнением. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
2. *Прагер В., Ходж Ф.* Теория идеально пластических тел. М., Изд-во иностр. лит., 1956.

УДК 531.55

К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕГРАЛАХ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПО МАССЕ ЧАСТИЦ

В. С. Новоселов

(Ленинград)

В работе А. П. Мачильского [1] утверждается, что задача трех и более тел с равными массами может быть решена в конечном виде с помощью разделения уравнений движения в относительных координатах. В указанной заметке имеется явная ошибка, на что было указано автору в беседе. Однако работа оказалась опубликованной, и в ней выражена мне признательность «за полезные обсуждения». Реферативный журнал «Механика», 1973, № 2 поместил автореферат с утверждением, что задача многих тел одинаковой массы не охватывается теоремой Брунса. Поэтому возникла острая необходимость публикации заметки с разбором ошибочных допущений обсуждаемой работы.

Используя формализованные обозначения, автор работы [1] приходит к следующему утверждению. Для трех векторов η_1, η_2 и η_3, образующих замкнутый векторный треугольник

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \equiv 0 \tag{1}$$

будет выполняться тождество $\nabla_{\eta_1} + \nabla_{\eta_2} + \nabla_{\eta_3} \equiv 0$. Если обозначать через η_{ix}, η_{iy}, η_{iz} проекции вектора η_i на декартовы оси, то утверждение автора равносильно следующему утверждению. Для любой функции $\varphi(\eta_{ix}, \eta_{iy}, \eta_{iz})$ при условии $\eta_{1x} + \eta_{2x} + \eta_{3x} = 0$ имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{1x}} + \frac{\partial}{\partial\eta_{2x}} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_{3x}} = 0$$

Утверждение не верно, например при $\varphi = \eta_{1x}$.

Разделение уравнений и, следовательно, положительное решение поставленной задачи автор сводит к обращению в нуль правой части формулы (1.12) работы [1] вида

$$\nabla_{\eta_1} V_1 + \nabla_{\eta_2} V_2 + \nabla_{\eta_3} V_3 \equiv 0 \tag{2}$$