УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ n-ГО ПОРЯДКА И СТЕПЕНЬ УСТОЙЧИВОСТИ

Р. Крыстев

(Болгария)

1. Рассмотрим систему

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

Здесь

$$y = (y_1, \ldots, y_k), \quad y' = (y_1', \ldots, y_k')$$

$$f(x, y) = (f(x, y), \ldots, f_k(x, y))$$

Определение 1. Пусть y — вектор-столбцы — устойчивое в смысле Ляпунова решение системы [1] при $x \to \infty$. Будем говорить, что y — устойчивое решение n-го порядка, если для каждого решения u системы (1.1), для которого

$$\| u - y \| < \varepsilon, \quad x_0 \leqslant x < \infty$$

имеется конечное положительное число A такое, что выполнены неравенства

$$\| u^{(m)} - y^{(m)} \| < A\varepsilon, \quad x_0 \leqslant x < \infty, \quad m = 1, \ldots, n \tag{1.2}$$

Определение 2. Будем говорить, что y — асимптотически устойчивое n-го порядка решение системы (1.1), когда оно устойчивое n-го порядка и выполнены условия

$$\lim_{x \to \infty} \| u^{(m)} - y^{(m)} \| = 0 \qquad (m = 0, 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

Пример. Рассмотрим прямолинейное движение частицы под действием сил притяжения к неподвижному центру прямо пропорционально расстоянию. Уравнение движения

$$mx^{\cdot\cdot} = -k^2 mx \tag{1.4}$$

Общий закон движения

$$x = A \cos kt + B \sin kt$$

Видно, что $x = 0$ — устойчивое решение (1.4). По данному ε и t_0 выберем $|A| < \varepsilon/2$ и $|B| < \varepsilon/2$. Тогда $|x^{\cdot}| \leqslant |k| (|A| + |B|) \leqslant |k| \varepsilon$, $t_0 \leqslant t$, $|x^{\cdot\cdot}| < k^2\varepsilon$ и т. д.

Таким образом, $x = 0$ — устойчивое решение n-го порядка.

Теорема 1. Пусть $y = 0$ — асимптотически устойчивое n-го порядка решение (1.1) при $f(x, 0) \equiv 0$. Пусть u — решение (1.1), удовлетворяющее условиям (1.3) и

$$\lim_{x \to \infty} u_{(x)}^{(m)} = u_{(\infty)}^{(m)} \qquad (m = 0, 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

При этих предположениях в точке $y = 0$ решения u имеют между собой и с решениями $y = 0$ касание n-го порядка.

Доказательство. Из условия асимптотической устойчивости n-го порядка и (1.5) имеем

$$u_{(\infty)}^{(m)} = 0 \quad (m = 0, 1, \ldots, n)$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы 1.

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$y' = f(x, y, z), \qquad z = \int_a^b K(x, t, y(t))\, dt \qquad (a \leqslant b) \tag{1.6}$$

Здесь вектор-столбцы

$$z = (z_1, \ldots, z_k), \quad K = (K_1, \ldots, K_k)$$

Теорема 2. Пусть f удовлетворяет условию Липшица по y с постоянной $B \geqslant 0$, а по z — с постоянной $C \geqslant 0$. Пусть K удовлетворяет условие Липшица по y с постоянной $D \geqslant 0$. Тогда, если y — устойчивое или асимптотически устойчивое решение (1.6), то оно устойчивое, соответственно асимптотически устойчивое первого порядка.

Доказательство. Пусть u — решение (1.6), для которого

$$\| u - y \| < \varepsilon, \quad x_0 \leqslant x < \infty$$

Видно, что

$$\| u' - y' \| = \left\| f \left[x, u, \int_a^b K(x, t, u(t))\, dt \right] - f \left[x, y, \int_a^b K(x, t, y(t))\, dt \right] \right\| \leqslant \tag{1.7}$$

$$\leqslant B \| u - y \| + C \int_a^b D \| u - y \| dt < [B + CD(b - a)]\, \varepsilon$$

Из определения 1 следует, что y — устойчивое решение первого порядка.

Если y — асимптотически устойчивое решение (1.6), то $\lim \| u - y \| = 0$ при $x \to \infty$ для каждого u, удовлетворяющего условию

$$\| u(x_0) - y(x_0) \| < \delta(x_0, \varepsilon)$$

Тогда из (1.7) получаем

$$\lim_{x\to\infty} \| u' - y' \| \leqslant \lim_{x\to\infty} \| u - y \| + CD \int_a^b \lim_{x\to\infty} \| u - y \| dt = 0$$

Отсюда следует, что y — асимптотически устойчивое решение первого порядка.

Рассмотрим нелинейную систему ($\mathbf{A}(x)$ — матрица)

$$y' = \mathbf{A}(x)\, y + f(x, y), \quad f(x, 0) \equiv 0 \tag{1.8}$$

Теорема 3. Пусть $\| \mathbf{A}(x) \| \leqslant A$. Пусть

$$\| f(x, y) \leqslant | \varphi(x) \| y \|^m, \quad | \varphi | \leqslant B \quad (m > 0, \ a \leqslant x < \infty)$$

где A и B — положительные постоянные. Тогда, если $y = 0$ — устойчивое или асимптотически устойчивое решение (1.8), то оно устойчивое, соответственно асимптотически устойчивое первого порядка.

Доказательство. Пусть y — решение, для которого $\| y \| < \varepsilon$ при $x_0 \leqslant x < \infty$. Тогда

$$\| y' \| \leqslant \| A(x) \| \| y \| + \| \varphi \| \| y \|^m < \varepsilon\, [A + B\varepsilon^{m-1}]$$

Отсюда следует, что $y = 0$ — устойчивое решение первого порядка.

Если $y = 0$ — асимптотически устойчивое решение (1.8), то $\lim y = 0$ при $x \to \infty$ и, следовательно, $\lim y' = 0$. Таким образом, $y = 0$ — асимптотически устойчивое решение первого порядка.

Рассмотрим линейную систему

$$y' = \mathbf{A}(x)\, y + \int_a^b \mathbf{K}(x, t)\, y(t)\, dt + f(x) \tag{1.9}$$

$$[f(x) = (f_1, \ldots, f_k)]$$

где $\mathbf{A}(x)$ и $\mathbf{K}(x, t)$ — матрицы, а $f(x)$ — вектор-столбец.

Теорема 4. Пусть система (1.9) имеет определенное и n раз дифференцируемое решение в интервале $a \leqslant x < \infty$. Пусть матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{K}$ и f будут $n - 1$ раз дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими n — 1-ми производными

(1.10) $\quad \| A^{(r)}\| \leqslant M_r, \quad \| K^{(r)} \| \leqslant N_r \quad (r = 0,1, \ldots, n-1)$

Тогда, если y — устойчивое или асимптотически устойчивое решение (1.9), то оно устойчивое, соответственно асимптотически устойчивое решение n-го порядка.

Доказательство. Пусть u — решение, для которого

$$\| u - y \| < \varepsilon, \quad x_0 \leqslant x < \infty$$

Видно, что

(1.11) $$\| u' - y' \| \leqslant \| \mathbf{A} \| \| u - y \| + \int_a^b \| \mathbf{K} \| \| u - y \| dt < \varepsilon [M_0 + N_0 (b - a)] = A_1\varepsilon$$

Дифференцируя (1.9) и имея в виду условия (1.10), получаем

(1.12) $\quad \| u^{(n)} - y^{(n)} \| < A_n\varepsilon$

Здесь $A_1, \ldots, A_n$ — положительные постоянные, происхождение которых очевидно. Из этого следует, что y — устойчивое решение n-го порядка.

Пусть y — асимптотически устойчивое решение (1.9). Тогда

$$\lim_{x \to 0} \| u - y \| = 0 \quad \text{при} \quad \| u (x_0) - y (x_0) \| < \delta (x_0, \varepsilon)$$

Из (1.11), (1.12) видно, что $\lim_{x \to \infty} \| u^{(r)} - y^{(r)} \| = 0, \quad r = 1, \ldots, n.$

Таким образом, y — асимптотически устойчивое решение n-го порядка.

Следствие. Если одна линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет n раз дифференцируемое устойчивое или асимптотически устойчивое решение в интервале $a \leqslant x \leqslant \infty$, то оно и устойчивое, соответственно асимптотически устойчивое решение n-го порядка.

Рассмотрим систему

(1.13) $\quad y' = f (x, y)$

Теорема 5. Пусть $f (x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y с постоянной A. Пусть f_x' и f_y' существует, $\| f_y' \| < B$, а f_x' удовлетворяет условию Липшица по y с постоянной C в области $D \{a \leqslant x < \infty, \| y \| < H\}$, в которой (1.13) имеет решение.

Тогда, если y — устойчивое или асимптотически устойчивое решение (1.13), то оно устойчивое, соответственно асимптотически устойчивое второго порядка.

Доказательство. Пусть u — решение, для которого $\| u - y \| < \varepsilon, \ x_0 \leqslant x < \infty$. Тогда

(1.14) $$\begin{aligned} &\| u' - y' \| \leqslant \| f (x, u) - f(x, y) \| < A\varepsilon \\ &\| u'' - y'' \| \leqslant \| f_x' (x, u) - f_x' (x, y) \| + \\ &+ \| f_y' (x, u) u' - f_y' (x, y) y' \| < \varepsilon [C + AB] \end{aligned}$$

Из (1.14) видно, что y — устойчивое решение второго порядка.

Пусть y — асимптотически устойчивое решение (1.13). Тогда

$$\lim \| u - y \| = 0 \ \text{при} \ x \to \infty$$

и из (1.14) следует

$$\lim \| u' - y' \| = 0, \quad \lim \| u'' - y'' \| = 0$$

т. е. y — асимптотически устойчивое решение второго порядка.

2. Пусть $\varphi (t)$ — непрерывная, монотонно возрастающая и дифференцируемая функция в интервале (a, ∞), для которой выполнены условия

(2.1) $\quad \varphi \geqslant 1, \quad a \leqslant t < \infty, \quad \lim_{t \to \infty} \varphi = b \geqslant 1$

Определение 3. Будем говорить, что решение $\eta(t)$ системы (1.1) — устойчивое степени $n \geqslant 0$ по отношению к функции φ, обладающей свойствами (2.1), при $t \to \infty$, если для произвольных $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in (a, \infty)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ такое, что каждое решение системы (1.1), определенное для $a \leqslant t < \infty$ и удовлетворяющее условию

$$\| \varphi^n(t_0)\, y(t_0) - \eta(t_0) \| < \delta$$

удовлетворяет и условию

$$\| \varphi^n(t)\, y(t) - \eta(t) \| < \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t < \infty \tag{2.2}$$

Число $n \geqslant 0$ будем называть степенью устойчивости решения η по отношению к φ.

Если, кроме того, $\lim_{t\to\infty} \| \varphi_y{}^n - \eta \| = 0$, то решение η будем называть асимптотически устойчивым степени n по отношению к φ.

Если $\delta = \delta(\varepsilon)$, то устойчивость будем называть равномерной.

Следствия. Если $\varphi \equiv 1$ в (a, ∞), то $y = 0$ — устойчивое по Ляпунову.

Если $y = 0$ — устойчивое степени $n \geqslant 0$ решение (1.1) по отношению к φ, то оно устойчивое по Ляпунову.

Если $y = 0$ — устойчивое решение (1.1) степени $n > 0$ по отношению к φ и $\lim_{t\to\infty} \varphi = \infty$, $n = k + r$, $k \geqslant 0$, $r > 0$, то $y = 0$ — асимптотически устойчивое решение по отношению к φ степени k.

Теорема 6. Пусть в системе (1.1)

$$f(t, y) \in C^{(0.1)}_{t,y}(z), \quad z = \{a \leqslant t < \infty, \ \| y \| < H\}$$

$$\{z_0 = [a \leqslant t < \infty, \ \| y \| < h < H] \subset z\}, \quad f(t, 0) \equiv 0$$

Если для системы (1.1) существует положительно определенная скалярная функция

$$V(t, \varphi^n y) \in C^{(1.1)}_{t,y}(z_0 \subset z), \quad n \geqslant 0$$

допускающая отрицательную производную по времени (когда в V' заменим y' равным ему значением согласно (1.1)), и отрицательная непрерывная в z_0 функция $W(\varphi^n y) \in \in z_0$, для которых

$$V(t, \varphi^n y) \geqslant W(\varphi^n y) > 0 \tag{2.3}$$

$$V(t, 0) = W(0) = 0 \text{ при } y \neq 0$$

то решение $y \equiv 0$ $(a \leqslant t < \infty)$ будет устойчивым степени n по отношению к φ при $t \to \infty$, где φ обладает свойствами (2.1).

Теорема 7. Пусть для системы (1.1) существуют положительно определенные функции

$$V(t, \varphi^n y) \in C^{(1.1)}_{t,y}(z_0), \ W(\varphi_y{}^n) \in C_{t,y}(z_0), \quad n \geqslant 0$$

для которых выполнены условия (2.3). Пусть V имеет бесконечно малую верхнюю грань при $y \to 0$ и производная по времени от функции V отрицательна (когда в V' заменим y' равным ему значением согласно (1.1)). Пусть $W_1(\varphi^n y)$ — функция положительная и непрерывная в z_0, — $V' > W_1(\varphi^n y)$ и функция φ обладает свойствами (2.1). Тогда $y = 0$ — асимптотически устойчивое решение (1.1) степени n по отношению к φ.

Теоремы 6 и 7 представляют собой следствия теорем Ляпунова [2].

Теорема 8. Если $u = 0$ — устойчивое или асимптотически устойчивое по Ляпунову решение системы

$$\left(\frac{u}{\varphi^n(t)}\right)' = f\left(t, \frac{u}{\varphi^n(t)}\right), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad n \geqslant 0 \tag{2.4}$$

то $y = 0$ — устойчивое, соответственно асимптотически устойчивое решение системы

$$y' = f(t, y) \tag{2.5}$$

степени n по отношению к φ. Напротив, если $y = 0$ — устойчивое или асимптотически устойчивое степени n по отношению к φ решение (2.5), то $u = 0$ — устойчивое, соответственно асимптотически устойчивое решение (2.4) по Ляпунову.

Доказательство. Пусть $u = 0$ — устойчивое решение (2.4). Тогда $\| u \| < \varepsilon$ при $t_0 \leqslant t$, если $\| u(t_0) \| < \delta < \varepsilon$. Но $u = \varphi^n y$ и, следовательно, $\| u \| = \| \varphi^n(t)\, y(t) \| < \delta$ при $t_0 < t$, $\| \varphi^n(t_0)\, y(t_0) \| < \delta < \varepsilon$. Таким образом, $y = 0$ — устойчивое решение системы (2.5) степени n по отношению к φ.

Если $\lim \| u \| = 0$ при $t \to \infty$, то и $\lim \| \varphi^n y \| = 0$, т. е., если $u = 0$ — асимптотически устойчивое решение (2.4), то $y = 0$ — асимптотически устойчивое степени n по отношению к φ решению (2.5).

Видно, что верно и обратное утверждение.

Теорема 9. Из экспоненциальной устойчивости решения $y = 0$ системы (1.1), т. е. из

$$\| y \| \leqslant N \| y(t_0) \| e^{-n(t-t_0)}$$

(N и n — положительные постоянные) следует, что $y = 0$ — устойчивое решение степени n по отношению к e^{t-t_0}.

Доказательство. Видно, что

$$e^{n(t-t_0)} \| y \| \leqslant N \| (t_0) \| < \varepsilon \quad (t_0 \leqslant t < \infty)$$

если выбрать $\| y(t_0) \| < \varepsilon / N$. Это и доказывает утверждение.

Видно, также, что если $\beta > 0$, $\beta < n$, то $y = 0$ — асимптотически устойчивое решение степени β по отношению к e^{t-t_0}.

Можно показать, что если $y = 0$ — экспоненциально устойчивое решение (1.1), то оно асимптотически устойчивое произвольной степени по отношению t.

Определение 4. Решение $\eta(t)$ $(t_0 \leqslant t < \infty)$ системы (1.1) будем называть орбитально устойчивым степени n по отношению к функции $\varphi(t)$, обладающей свойствами (2.1) при $t \to \infty$, если для произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что если $\| \varphi^n(t_0)\, y(t_0) - \eta(t_0) \| < \delta$, то

$$\rho(\varphi^n(t)\, y(t),\ L_0^+) < \varepsilon, \quad t_0 \leqslant t \tag{2.6}$$

Если еще

$$\lim_{t \to \infty} \rho(\varphi^n(t)\, y(t),\ L_0^+) = 0$$

то решение η будем называть орбитально асимптотически устойчивым степени n по отношению к φ. Здесь L_0^+ — положительная полутраектория решения η (см. [3], стр. 295).

Для орбитальной устойчивости остается верной теорема 8, которая доказывается тем же способом; в ней достаточно заменить понятие устойчивости на понятие орбитальной устойчивости и (2.2) заменить на (2.6).

Определение устойчивости можно обобщить, а именно — свойство (2.2) отнести к производным, т. е.

$$\| \varphi^n(t)\, u^{(m)} - y^{(m)} \| < A\varepsilon, \quad m = 0, 1, \ldots, p$$

При таком более общем определении можно доказать ряд теорем.

Поступила 5 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1964.
2. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.