Согласно [7], для совпадения главного момента L_0 с линией углов необходимо, чтобы проекции L_x, L_y, L_z выражались через углы Эйлера следующим образом:

$$L_x = L_0 \cos\varphi, \quad L_y = -L_0 \sin\varphi, \quad L_z = L_0 \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Согласно (3.1) $L_z \neq 0$. Следовательно, главный момент в данном случае не располагается по линии узлов в горизонтальной плоскости. Но в случае прецессии гиростата при условиях Лагранжа это требование выполняется, так как $L_z = 0$.

Поступила 1 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела. Изд-во Новосибирск. ун-та, 1965.
2. Кейс И. А. О движении гиростата, закрепленного в одной точке. Вестн. МГУ, 1964, № 1.
3. Grioli G. Esistenza e determinazione delle precesioni regolari dinamicamente possibili per solido pesante asimmetrico. Annali di Matem., Ser. IV, vol. 24, 1947.
4. Харламова Е. И. Об одном движении тела, имеющего неподвижную точку. В сб.: Механика твердого тела, вып. 1, Киев, «Наукова думка», 1969.
5. Гуляев М. П. Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Вест. МГУ, 1955, № 3.
6. Гуляев М. П. О динамически возможных регулярных прецессиях твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Тр. сектора матем. и механ. АН КазССР, т. 1, 1958.
7. Розе Н. В. Динамика твердого тела, Л., «Кубуч», 1932.

УДК 531.36

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

А. П. Маркеев

(Москва)

Строится пример гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, положение равновесия которой, согласно теореме В. И. Арнольда, устойчиво для большинства начальных условий, но неустойчиво по Ляпунову. Исследуется задача о формальной устойчивости треугольных лагранжевых решений.

1. Рассмотрим движение тела P бесконечно малой массы под действием ньютоновского притяжения двух тел S и J с массами $1-\mu$ и μ. Предположим, что тела S и J движутся относительно их центра масс по круговым орбитам. Исследуем устойчивость такого движения тела P, при котором оно образует с телами S и J равносторонний треугольник, предполагая, что в своем возмущенном движении оно может выходить из плоскости вращения тел S и J.

Сформулированная задача рассматривалась в работе [1]. Исследование было основано на преобразовании функции Гамильтона к нормальной форме с последующим применением теоремы Четаева о неустойчивости [2] и теоремы Арнольда об устойчивости многомерных гамильтоновых систем [3]. Доказано, что в области устойчивости в линейном приближении

$$0 < \mu < \mu^* = 0.0385208 \tag{1.1}$$

треугольное движение в задаче трех тел устойчиво для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий при всех μ, кроме двух значений $\mu_1 = 0.0242938$ и $\mu_2 = 0.0135160$, при которых имеет место неустойчивость по Ляпунову.

Пусть ω_1 и ω_2 $(\omega_1 > \omega_2)$ — частоты плоских колебаний тела P в окрестности треугольного движения, которые удовлетворяют уравнению

$$\omega^4 - \omega^2 + {}^{27}/_4\, \mu (1 - \mu) = 0$$

В работе [1] показано, что если $\mu \neq \mu_1$ и $\mu \neq \mu_2$, то при подходящем выборе системы координат функция Гамильтона, описывающая движение в окрестности треугольного решения, может быть представлена в виде

$$H = L + N + H^* (q_i, p_i) \tag{1.2}$$

Здесь

$$L = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + r_3 \tag{1.3}$$

$$N = c_{200} r_1^2 + c_{110} r_1 r_2 + c_{101} r_1 r_3 + c_{020} r_2^2 + c_{011} r_2 r_3 + c_{002} r_3^2$$

$$q_i = \sqrt{2r_i} \sin \varphi_i, \qquad p_i = \sqrt{2r_i} \cos \varphi_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$c_{200} = \frac{\omega_2^2 (124\omega_1^4 - 696\omega_1^2 + 81)}{144 (1 - 2\omega_1^2)^2 (1 - 5\omega_1^2)}$$

$$c_{110} = -\frac{\omega_1 \omega_2 (64\omega_1^2 \omega_2^2 + 43)}{6 (1 - 2\omega_1^2)(1 - 2\omega_2^2)(1 - 5\omega_1^2)(1 - 5\omega_2^2)}$$

$$c_{101} = -\frac{8\omega_1 \omega_2^2}{3 (1 - 2\omega_1^2)(4 - \omega_1^2)}, \qquad c_{020} = \frac{\omega_1^2 (124\omega_2^4 - 696\omega_2^2 + 81)}{144 (1 - 2\omega_2^2)^2 (1 - 5\omega_2^2)}$$

$$c_{011} = \frac{8\omega_2 \omega_1^2}{3 (1 - 2\omega_2^2)(4 - \omega_2^2)}, \qquad c_{002} = -\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{3 (4 - \omega_1^2)(4 - \omega_2^2)}$$

Функция H^*— аналитическая в окрестности начала координат, имеющая пятый порядок малости относительно q_i, p_i.

В работе [1] доказано, что при $\mu \neq \mu_1$ и $\mu \neq \mu_2$ тело P будет вечно образовывать с телами S и J треугольник, близкий к равностороннему, для большинства достаточно малых отклонений от вершины треугольника и для достаточно малых относительных скоростей. И, согласно [3], для этих начальных условий движение тела P будет условно-периодическим с частотами $\Lambda_i = \partial (L + N) / \partial r_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Таким образом, с вероятностью, близкой к единице, треугольное решение будет устойчивым. Но каково движение для начальных условий, соответствующих соизмеримым (или почти соизмеримым) частотам Λ_i, неясно. Исследуемая система трехмерная. Поэтому из устойчиво сти для большинства начальных условий вовсе не обязательно следует устойчивость по Ляпунову. В статье В. И. Арнольда [4] показано, что в случае соизмеримых частот Λ_i многомерная гамильтонова система может быть неустойчивой. Ниже будет построен очень простой пример такого рода специально для случая положения равновесия автономной гамильтоновой системы с тремя степенями свободы.

2. Пусть изменение переменных r_i, φ_i $(i = 1, 2, 3)$ со временем описывается дифференциальными уравнениями с функцией Гамильтона

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + \omega_3 r_3 + r_1 r_3 - r_1 r_2 + r_2 r_3 + H^* (r_i, \varphi_i) \tag{2.1}$$

$$H^* = r_1 r_2 \sqrt{r_3} \sin (2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3)$$

а частоты линеаризованной системы ω_i положительны и связаны резонансным соотношением

$$2\omega_1 - 2\omega_2 + \omega_3 = 0 \tag{2.2}$$

Система с функцией Гамильтона (2.1) имеет начало координат $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ своим положением равновесия. При исследовании движения в малой окрестности начала координат функция H^* может рассматриваться как возмущение системы с функцией Гамильтона $H^\circ = H - H^*$.

Покажем, что для большинства достаточно малых начальных значений r_i положение равновесия возмущенной системы устойчиво. Согласно [3], для этого достаточно проверить отличие от нуля при $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ определителя четвертого порядка

$$D = \det \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 H^\circ}{\partial r_i \partial r_j}, & \dfrac{\partial H^\circ}{\partial r_i} \\ \dfrac{\partial H^\circ}{\partial r_j}, & 0 \end{Vmatrix}$$

Раскрывая этот определитель, получаем

$$D = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + 2\omega_1\omega_2 + 2\omega_1\omega_3 - 2\omega_2\omega_3$$

Подставляя вместо ω_3 его выражение через ω_1 и ω_2 из соотношения (2.2), имеем $D = (\omega_1 + \omega_2)^2 \neq 0$. Таким образом, для большинства начальных условий положение равновесия устойчиво, и движение в малой окрестности начала координат условно-периодическое с частотами

$$\Lambda_1 = \omega_1 + r_3 - r_2, \quad \Lambda_2 = -\omega_2 - r_1 + r_3, \quad \Lambda_3 = \omega_3 + r_2 + r_3$$

Теперь покажем, что положение равновесия неустойчиво по Ляпунову. Доказательство основано на отыскании неограниченно возрастающего частного решения системы дифференциальных уравнений, соответствующей функции Гамильтона (2.1)

$$\begin{aligned} &dr_1 / dt = dr_2 / dt = 2dr_3 / dt = -2r_1 r_2 \sqrt{r_3} \cos\psi \\ &d\varphi_1 / dt = \Lambda_1 + r_2 \sqrt{r_3} \sin\psi, \quad d\varphi_2 / dt = \Lambda_2 + r_1 \sqrt{r_3} \sin\psi, \\ &d\varphi_3/dt = \Lambda_3 + {}^1/_2\, r_1 r_2 r_3^{-1/2} \sin\psi \\ &\psi = 2\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Можно проверить, что система уравнений (2.3) допускает такие частные решения, для которых $r_1 = r_2 = 2r_3$. При этом r_3 и ψ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$dr_3 / dt = -4r_3^{5/2} \cos\psi, \quad d\psi / dt = 10 r_3^{3/2} \sin\psi \tag{2.4}$$

Для выбранного таким образом решения частоты Λ_i удовлетворяют резонансному соотношению $2\Lambda_1 + 2\Lambda_2 + \Lambda_3 = 0$. Из системы (2.4) получаем такое частное решение:

$$r_3(t) = r_3(0)\,[1 - 6r_3^{3/2}(0)\,t]^{-2/3}, \quad \psi = \pi$$

Из полученного решения видно, что сколь угодно близко к началу координат существуют начальные условия, для которых траектория системы (2.3) с течением времени уходит сколь угодно далеко от начала координат, причем на это потребуется время порядка $r_3^{-3/2}(0)$.

3. К задаче об устойчивости треугольных решений можно также подойти с формальной точки зрения. Положение равновесия $q_i = p_i = 0$ называется формально устойчивым [5], если существует формальный (т. е., возможно, расходящийся) степенной ряд $G = G_n + G_{n+1} + \ldots$, который служит знакоопределенным интегралом. Это означает, что коэффициенты ряда

$$\sum_{i=1}^{3} G_{q_i} H_{p_i} - G_{p_i} H_{q_i} + G_t$$

тождественно равны нулю, а функция $G_n \geqslant 0$ и обращается в нуль только в начале координат $q_i = p_i = 0$.

Построим формальный интеграл для системы с функцией Гамильтона (1.2). При помощи преобразования Биркгофа [6] в функции Гамильтона можно нормализовать члены пятого, шестого и т. д. порядков. Если μ удовлетворяет условию (1.1) устойчивости в линейном приближении и не равняется μ_1 и μ_2, то нормализованная во всех порядках функция Гамильтона (1.2) запишется в виде

$$H = L + N + R(r_i, \varphi_i) \tag{3.1}$$

где L и N определены равенствами (1.3), а формальный ряд R начинается с членов пятого порядка относительно $r_i^{1/2}$. Угловые переменные φ_i будут содержаться в R в виде комбинаций

$$k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2 + k_3\varphi_3 \tag{3.2}$$

где k_1 — целые числа, для которых выполнено равенство

$$k_1\omega_1 - k_2\omega_2 + k_3 = 0 \qquad (|k_1| + |k_2| + |k_3| \geqslant 5)) \tag{3.3}$$

Система с гамильтонианом (3.1) имеет очевидный интеграл $H = \text{const}$, так как H не зависит от времени. Кроме того, учитывая (3.2) и (3.3), нетрудно проверить, что выражение L тоже будет интегралом.

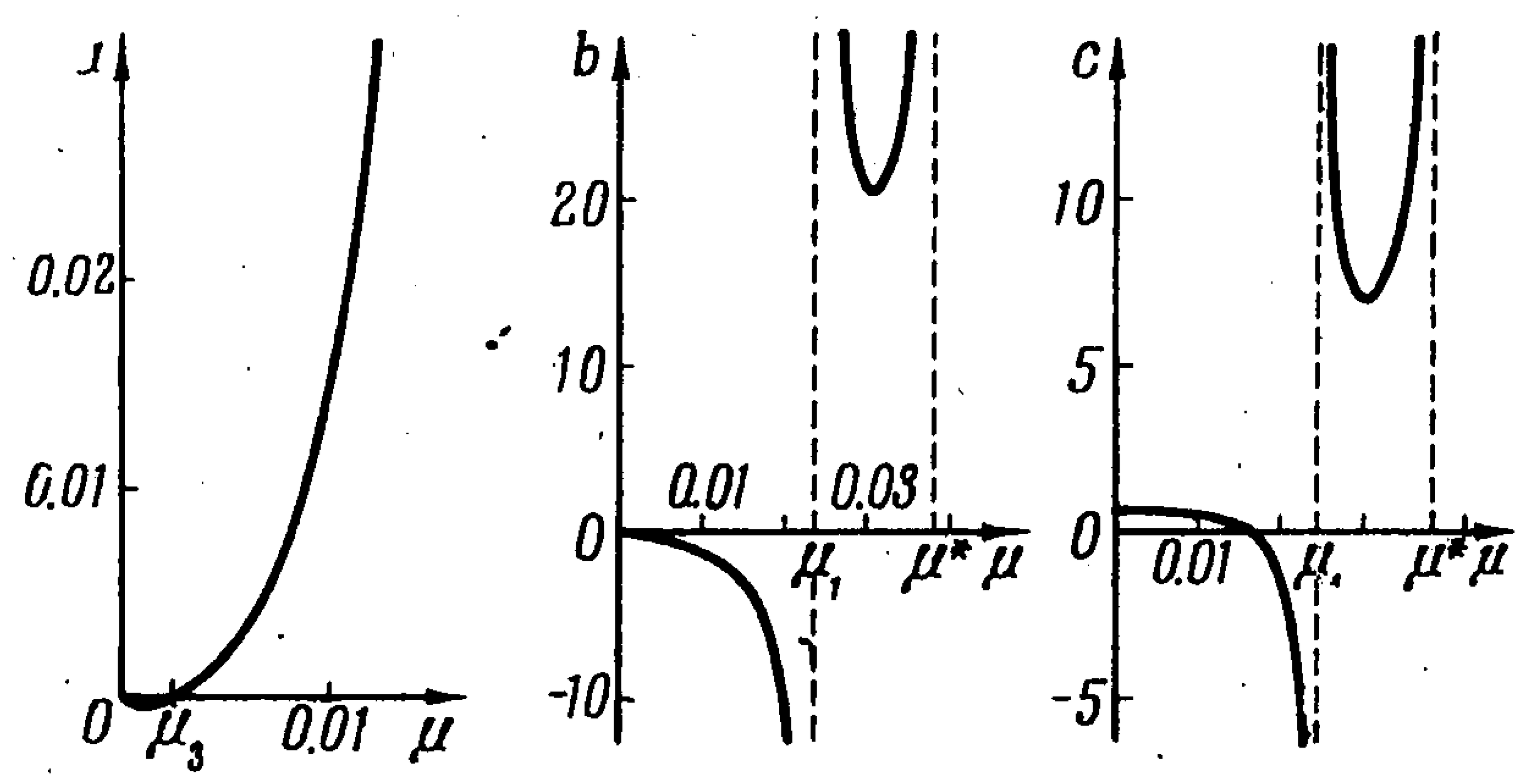
Составим формальный интеграл G в виде

$$G = L^4 + (H - L)^2 \tag{3.4}$$

В разложении $G = G_8 + G_9 + \ldots$ функция G_8 имеет вид $G_8 = L^4 + N^2$. Оба слагаемых в правой части этого равенства неотрицательны. Поэтому функция G_8 будет знакоопределенной в окрестности начала координат, если в области $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $r_3 \geqslant 0$ система уравнений

$$L = 0, \quad N = 0 \tag{3.5}$$

имеет только нулевое решение $r_1 = r_2 = r_3 = 0$.



Исследуем систему уравнений (3.5). Из первого уравнения $L = 0$ найдем выражение r_3 через r_1 и r_2 и подставим его во второе уравнение. Тогда система (3.5) перепишется так:

$$r_3 = \omega_2 r_2 - \omega_1 r_1, \quad a r_1^2 + b r_1 r_2 + c r_2^2 = 0 \tag{3.6}$$

Здесь

$$a = c_{200} - c_{101}\omega_1 + c_{002}\omega_1^2, \quad b = c_{110} + c_{101}\omega_2 - c_{011}\omega_1 - 2\, c_{002}\omega_1\omega_2$$
$$c = c_{020} + c_{011}\omega_2 + c_{002}\omega_2^2$$

Графики коэффициентов a, b, c представлены на фигуре. Коэффициент a при значении $\mu = \mu_3 = 0.00278$ обращается в нуль. При этом значении μ коэффициенты системы уравнений (3.6) таковы:

$$\omega_1 = 0.99042, \quad \omega_2 = 0.13811, \quad b = -0.39924, \quad c = 0.56461$$

и система (3.6) имеет такие решения:

1) r_1 — произвольно, $r_2 = 0$, $r_3 = -\omega_1 r_1$

2) $r_1 = 1{,}4142\ r_2$, r_2 — произвольно, $r_3 = -1.26253\ r_2$.

Эти решения не лежат внутри области $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $r_3 \geqslant 0$. Поэтому при $\mu = \mu_3$ система уравнений (3.6) в этой области имеет только нулевое решение.

При значениях μ, не равных μ_i ($i = 1, 2, 3$) и лежащих в интервале (1.1), решения могут быть описаны таким образом: $r_1 = \alpha_j r_2$, $r_3 = \beta_j r_2$, r_2 — произвольно ($j = 1, 2$), $\alpha_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$, $\alpha_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$, $\beta_j = \omega_2 - \alpha_j \omega_1$.

Система уравнений (3.6) тогда и только тогда имеет решение в области $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, $r_3 \geqslant 0$, когда величины $b^2 - 4ac$, α_j, β_j одновременно неотрицательны. Расчеты показывают, что $b^2 - 4ac > 0$ при всех μ из интервала (1.1), α_1 и β_1 всегда имеет противоположные знаки, а величины α_2 и β_2 одновременно положительны только при выполнении неравенств

$$0.010913\ldots < \mu < 0.016376\ldots \tag{3.7}$$

Таким образом, формальный интеграл (3.4) будет знакоопределенным при всех μ из интервала (1.1), кроме тех значений, которые лежат в интервале (3.7) и, конечно, значения $\mu = \mu_1$, которое с самого начала исключено из рассмотрения. Значение же $\mu = \mu_2$ попадает в интервал (3.7). Поэтому полученный результат можно сформулировать так: треугольные лагранжевы решения круговой ограниченной пространственной задачи трех тел формально устойчивы при всех μ в области устойчивости в линейном приближении, кроме $\mu = \mu_1$ и, быть может, значений μ, лежащих в интервалах

$$0{,}010913\ldots < \mu < \mu_2, \quad \mu_2 < \mu < 0{,}016376\ldots \tag{3.8}$$

Следует отметить, что значение $\mu = 0.00095388$, соответствующее системе Солнце — Юпитер, не попадает в интервалы (3.8), а значение $\mu = 0{,}0121506$ для системы Земля — Луна принадлежат первому из этих интервалов.

Формальная устойчивость позволяет утверждать, что неустойчивость по Ляпунову не обнаруживается при учете в разложении функции Гамильтона членов до сколь угодно высокого (но конечного) порядка. А если и существуют траектории, по которым тело P уходит от вершины треугольника, то движение по ним происходит очень медленно.

В заключение отметим, что исследование формальной устойчивости при значениях μ из интервалов (3.8) можно было бы провести, применив критерий, полученный в работе А. Д. Брюно [7].

Поступила 26 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркеев А. П. Об устойчивости лагранжевых решений пространственной круговой ограниченной задачи трех тел. Астрон. ж., 1971, т. 48, № 4.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
3. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, вып. 6.
4. Арнольд В. И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы. Докл. АН СССР, 1964, т. 156, № 1.
5. Moser I. New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems. Communs Pure and Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 1, p. 81.
6. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.—Л., Гостехиздат, 1941.
7. Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона. Матем. заметки, 1967, т. 1, вып. 3.