

О РЕГУЛЯРНЫХ ПРЕЦЕССИЯХ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА

М. П. Гуляев

(Волгоград)

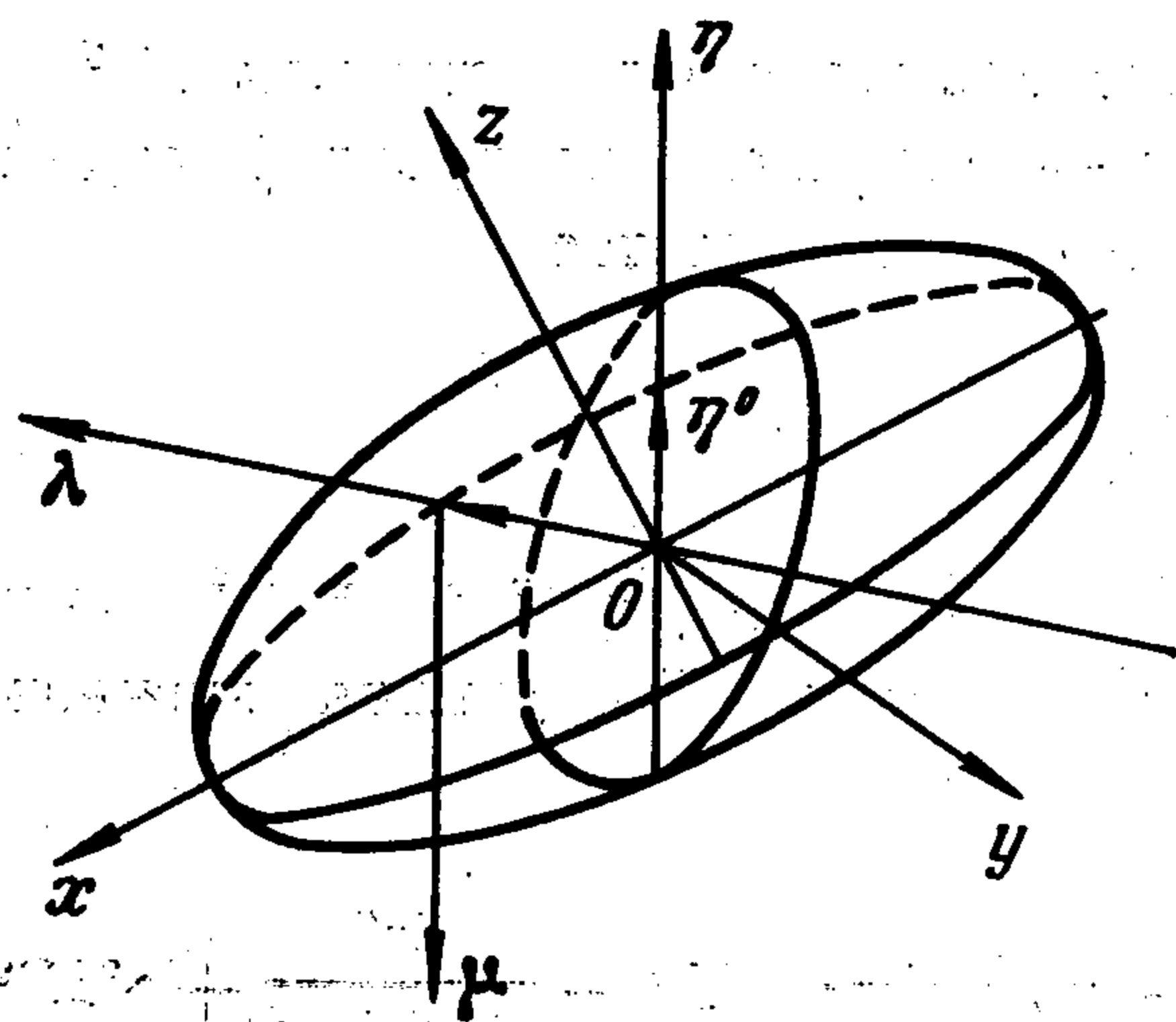
Регулярные прецессии тяжелого несимметричного гиростата находятся прямым интегрированием системы уравнений Н. Е. Жуковского, записанных в главных осях инерции. Исследуются свойства указанных движений; обнаруживается возможность управления ими. Исследуются силы, способные вызвать регулярную прецессию у гиростатов.

В работах [1] проводилась идея о предпочтительности исследования движения тяжелого гиростата, закрепленного в одной точке, перед исследованием движений классического твердого тела¹. Еще ранее [2] была сделана попытка такого исследования для тяжелого несимметричного гиростата методом Гриоли [3] и доказана динамическая возможность регулярных прецессий у таких гиростатов. Позже в [4] было получено решение этой задачи в специальных, неглавных осях инерции, которое не было записано в функциях времени.

1. Рассмотрим тяжелый гиростат, который имеет, например, полости, заполненные идеальной несжимаемой жидкостью, циркулирующей с постоянным по модулю гиростатическим моментом λ . Допустим, что на положение центра масс гиростата и его главные моменты инерции наложены ограничения

$$(1.1) \quad x_0 \sqrt{B - C} = z_0 \sqrt{A - B}, \quad y_0 = 0, \quad (A - B)(B - C) > 0$$

Геометрически они означают расположение центра масс гиростата на перпендикуляре к одному из круговых сечений его эллипсоида инерции для неподвижной точки.



Фиг. 1

Кроме того, допустим, что гиростатический момент λ направлен по барицентрической оси, т. е. оси, несущей центр тяжести гиростата (фиг. 1). Тогда в проекциях на подвижные оси системы

$$(1.2) \quad \lambda = \lambda_1 i + \lambda_3 k$$

$$\lambda_1 = \lambda_x = \frac{x_0}{l} \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda_y = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_z = \frac{z_0}{l} \lambda$$

При принятых ограничениях (1.1) с учетом (1.2) система дифференциальных уравнений Жуковского запишется так:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C) qr - \frac{z_0}{l} \lambda q + \mu z \gamma_2 \quad (\mu = Mg) \\ B \frac{dq}{dt} &= -(A - C) pr + \frac{\lambda}{l} (z_0 p - x_0 r) + \mu (x \gamma_3 - z_0 \gamma_1) \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B) pq + \frac{x_0}{l} \lambda q - \mu x_0 \gamma_2 \end{aligned}$$

где M — масса тела носителя и жидкости. Система кинематических уравнений остается прежней.

Умножим первое уравнение (1.3) на x_0 , третье на z_0 и сложим их. Имея в виду равенства, получаемые из (1.1)

$$(1.4) \quad A - B = kx_0^2, \quad B - C = kz_0^2, \quad A - C = kl^2, \quad E = kx_0z_0 \quad (l = \sqrt{x_0^2 + z_0^2})$$

где k — постоянная, имеющая размерность массы, l — расстояние центра масс гиростата

¹ Харламова Е. И. Алгебраические инвариантные соотношения дифференциальных уравнений динамики твердого тела. Докторская диссертация, 1971.

та от неподвижной точки, получим

$$(1.5) \quad \frac{d}{dt} (Ax_0p + Cz_0r) = kx_0z_0 (x_0p + z_0r) q$$

Для нахождения регулярных прецессий тяжелого гиростата следует предположить [5,6]

$$(1.6) \quad (1 \cdot \omega) = x_0p + z_0r = \text{const} = m$$

Используя результат дифференцирования (1.6) по времени, из уравнения (1.5) получим

$$\frac{dp}{dt} = \frac{mz_0}{l^2} q, \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{mx_0}{l} q$$

Сравнивая эти линейные уравнения с первым и третьим уравнениями системы (1.3), найдем равенство

$$(1.7) \quad \mu l^2 \gamma_2 = (Ax_0p + Cz_0r + \lambda l) q$$

которое служит условием их эквивалентности. Это соотношение будет использовано ниже. Таким образом, в дальнейшем при соблюдении равенства (1.7) будет рассматриваться динамическая система вида

$$(1.8) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{mz_0}{l^2} q, \quad B \frac{dq}{dt} = (C - A) pr + \frac{\lambda}{l} (z_0p - x_0r) + \\ + \mu (x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1), \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{mx_0}{l^2} q$$

Для регулярных прецессий гиростата должен иметь место квадратичный интеграл

$$(1.9) \quad p^2 + q^2 + r^2 = \text{const} = \omega^2$$

Используя соотношение (1.6), выразим q из (1.9) и подставим в первое уравнение системы (1.8). Получим

$$\frac{dp}{dt} = \frac{m}{l^2} (z_0^2 \omega^2 - m^2 + 2mx_0p - l^2 p^2)^{1/2}$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$(1.10) \quad p = \frac{n}{l} (x_0 + z_0 a \sin n\tau) \\ a = \frac{1}{m} \sqrt{l^2 \omega^2 - m^2}, \quad n = \frac{m}{l}, \quad \tau = t - t_0$$

В дальнейшем будем предполагать $a = 1$. Компоненты угловой скорости q, r с учетом (1.10) находятся из соотношений (1.6), (1.9) без дальнейших интеграций.

Таким образом, получаем следующее решение системы уравнений (1.8), определяющее компоненты угловой скорости гиростата (при $a = 1$):

$$(1.11) \quad p = \frac{n}{l} (x_0 + z_0 \sin n\tau) \quad q = n \cos n\tau \\ r = \frac{n}{l} (z_0 - x_0 \sin n\tau)$$

Эти формулы по виду ничем не отличаются от соответствующих формул, описывающих регулярную прецессию абсолютно твердого тела [5] при условиях (1.1).

Перейдем к определению переменных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Соотношение, определяющее γ_2 , уже имеется в виде (1.7). Получим соотношения, связывающие γ_1, γ_3 . Для этого продифференцируем по времени интеграл (1.9); имеем в силу системы (1.7)

$$(1.12) \quad \frac{d}{dt} (p^2 + q^2 + r^2) = \frac{1}{Bl^2} qQ \\ Q = (Bm + l\lambda) (z_0p - x_0r) - (A - C) l^2 pr + \mu l^2 (x_0\gamma_3 - z_0\gamma_1)$$

Правая часть равенства (1.12) обращается в нуль только при $Q = 0$; обращение в нуль переменной q невозможно из-за решения (1.11). Для получения второго соотношения, связывающего γ_1, γ_3 , воспользуемся интегралом энергии

$$(1.13) \quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2\mu(x_0\gamma_1 + z_0\gamma_3) = 2h$$

Отметим, что интеграл (1.13) явно не зависит от гиростатических членов, входящих в уравнения системы (1.3). Разрешая систему алгебраических уравнений $Q = 0$, (1.13) относительно γ_1, γ_3 , найдем

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{\mu l^4} \left\{ x_0 \left[hl^2 - \frac{1}{2} l^2 (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \right] + \right. \\ &+ z_0 \left[(Bm + \lambda l)(z_0 p - x_0 r) - (A - C) l^2 pr \right] \left. \right\} \\ \gamma_3 &= \frac{1}{\mu l^4} \left\{ z_0 \left[hl^2 - \frac{1}{2} l^2 (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \right] - \right. \\ &- x_0 \left[(Bm + \lambda l)(z_0 p - x_0 r) - (A - C) l^2 pr \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

Подставив в эти формулы и в (1.7) найденное решение (1.11), после ряда приведений получим

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{n^2}{\mu l^4} \left\{ \frac{x_0}{2} \left(\frac{2h}{n^2} - (A + C) \right) l^2 + z_0 l^2 \left(C + \frac{\lambda}{n} \right) \sin n\tau - (A - C) x_0 z_0 \cos^2 n\tau \right\} \\ \gamma_2 &= \frac{n^2}{\mu l^3} \left\{ \left(H + \frac{\lambda}{n} \right) l^2 \cos n\tau + (A - C) x_0 z_0 \sin n\tau \cos n\tau \right\} \\ \gamma_3 &= \frac{n^2}{\mu l^4} \left\{ \frac{z_0}{2} \left(\frac{2h}{n^2} - (A + C) \right) l^2 - x_0 l^2 \left(A + \frac{\lambda}{n} \right) \sin n\tau + (A - C) x_0^2 z_0 \cos^2 n\tau \right\} \end{aligned}$$

Из этих формул видно, что в их коэффициенты входят гиростатические члены, зависящие от модуля момента λ . Следовательно, динамические характеристики внутренних циклических движений в гиростате будут влиять на вращение гиростата относительно вертикальной оси.

Уточним формулы (1.14). Для этого подставим их в кинематические уравнения системы (1.3). Эта подстановка приводит к необходимости принять, что полная механическая энергия гиростата

$$h = \frac{1}{2} (A + C) n^2$$

В окончательной форме решение (1.14) запишется в виде

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{n^2}{\mu l^3} \left[\left(C + \frac{\lambda}{n} \right) z_0 \sin n\tau - (B - C) x_0 \cos^2 n\tau \right] \\ \gamma_2 &= \frac{n^2}{\mu l^3} \left[\left(H + \frac{\lambda}{n} \right) l^2 \cos n\tau + (A - C) x_0 z_0 \sin n\tau \cos n\tau \right] \end{aligned}$$

$$(1.16) \quad \gamma_3 = \frac{n^2}{\mu l^2} \left[- \left(A + \frac{\lambda}{n} \right) x_0 \sin n\tau + (A - B) z_0 \cos^2 n\tau \right]$$

$$H = A - B + C, \quad Hl^2 = Ax_0^2 + Cz_0^2$$

Сделаем еще одно вычисление, связанное с определением положения неподвижной оси прецессии гиростата в пространстве. Если эту ось определять единичным вектором κ^0 с компонентами $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ относительно подвижных осей, то согласно [6] должно иметь место следующее соотношение:

$$(\omega \cdot \kappa^0) = \kappa_1 p + \kappa_2 q + \kappa_3 r = \text{const} = s$$

Система уравнений, описывающая вращение гиростата относительно неподвижной оси прецессии, имеет вид

$$d\kappa_1/dt = \kappa_2 r - \kappa_3 q, \quad \dots \quad (1, 2, 3) \quad (p, q, r)$$

Подставляя сюда формулы (1.11), представим эту систему в виде

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \frac{d\kappa_1}{dt} &= \frac{n}{l} (z_0 - x_0 \sin n\tau) \kappa_2 - n \cos n\tau \kappa_3 \\ \frac{d\kappa_2}{dt} &= \frac{n}{l} [(x_0 + z_0 \sin n\tau) \kappa_3 - (z_0 - x_0 \sin n\tau) \kappa_1] \\ \frac{d\kappa_3}{dt} &= n \cos n\tau - \frac{n}{l} (x_0 + z_0 \sin n\tau) \kappa_2 \end{aligned}$$

Подставляя формулы (1.11) в соотношение (1.16), получим

$$(1.18) \quad \frac{n}{l} \kappa_1 (x_0 + z_0 \sin n\tau) + n \kappa_2 \cos n\tau + \frac{n}{l} \kappa_3 (z_0 - x_0 \sin n\tau) = s$$

Дифференцируя (1.18) по времени в силу системы (1.17), получим

$$(1.19) \quad (z_0 \kappa_1 - x_0 \kappa_3) \cos n\tau - l \kappa_2 \sin n\tau = 0$$

Следовательно, чтобы соотношение (1.18) было интегралом системы (1.17), необходимо удовлетворить решением этой системы также уравнению (1.19).

Рассмотрим систему уравнений, которую легко получить из (1.18) и (1.19)

$$\begin{aligned} x_0 \kappa_1 + z_0 \kappa_3 &= l \left(\frac{s}{n} - \frac{\kappa_2}{\cos n\tau} \right) \\ z_0 \kappa_1 - x_0 \kappa_3 &= l \frac{\sin n\tau}{\cos n\tau} \kappa_2 \end{aligned}$$

Разрешая эту систему относительно κ_1, κ_2 , найдем

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{l} \left[\frac{s}{n} x_0 - \frac{x_0 - z_0 \sin n\tau}{\cos n\tau} \kappa_2 \right] \\ \kappa_3 &= \frac{1}{l} \left[\frac{s}{n} z_0 - \frac{z_0 + x_0 \sin n\tau}{\cos n\tau} \kappa_2 \right] \end{aligned}$$

Для исключения из этих формул κ_2 воспользуемся тривиальным интегралом системы (1.17) $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 = 1$. Подставляя (1.20) в этот интеграл, получим уравнение, корни которого

$$(1.21) \quad \kappa_2 = \left(\frac{s}{2n} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2 - \frac{s^2}{n^2}} \right) \cos n\tau$$

Произведя в формулах (1.20) замену κ_2 выражениями (1.21), имеем формулы для $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, подстановка которых в систему (1.17) показывает, что они будут решением этой системы тогда и только тогда, когда перед радикалами удержим знак плюс и положим $s = n$. Окончательно получим

$$(1.22) \quad \kappa_1 = \frac{z_0}{l} \sin n\tau, \quad \kappa_2 = \cos n\tau, \quad \kappa_3 = -\frac{x_0}{l} \sin n\tau$$

Отсюда следует, что относительно неподвижной оси прецессии гироскоп будет вращаться так же, как в классическом случае прецессии абсолютно твердого тела [5]. Сравнивая формулы (1.22) с формулами (1.15), приходим к выводу, что если вращение гироскопа относительно вертикальной неподвижной оси зависит от гироскопических членов, то вращение его относительно неподвижной оси прецессии, не совпадающей с вертикалью, явно не зависит от указанных членов и совершается точно так же, как если бы внутри гироскопа не содержалось частей, совершающих циклические движения.

Выясним некоторые кинематические характеристики исследуемого движения. Рассмотрим произведение векторов (1.6). Подставляя сюда соответствующие формулы из (1.11), получим

$$(1.23) \quad (\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\omega}) = l\omega_l = ln = v = m = \text{const}$$

Отсюда видно, что постоянная n — это угловая скорость собственного вращения гироскопа, а v — линейная скорость центра масс гироскопа в его прецессионном движении вокруг неподвижной оси прецессии.

Величина скорости n , оказывается, будет произвольной величиной, связанной одним параметрическим соотношением с гиристатическим моментом λ . Это соотношение находится при подстановке формул (1.15) в тривиальный интеграл системы (1.3) $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$. Получим

$$n^2 \lambda^2 + 2Hn^3 \lambda + (H^2 + E^2) n^4 = \mu^2 l^2$$

Для гиристатического момента λ это уравнение дает

$$(1.24) \quad \lambda_{1,2} = -Hn \pm \sqrt{\frac{\mu^2 l^2}{n^2} - E^2 n^2}$$

При $\mu l \geq En^2$ корни действительны. Из (1.24) следует, что скорость собственного вращения гиристата в формулах (1.11), (1.15) оказывается произвольной постоянной. В классическом случае регулярной прецессии [5] это не имеет места.

Обратимся теперь к ранее принятому предположению $a = 1$; раскрывая его значение в (1.10), найдем $l^2 \omega^2 = 2m^2$. Так как $m = ln$, то $\omega = \sqrt{2}m/l = \sqrt{2}n$.

Определим далее угловую скорость вращения гиристата вокруг неподвижной оси прецессии. В силу соотношения (1.18) и формул (1.22), имеем $s = n = \omega_l$ в соответствии с формулой (1.23).

Определим угол α между осями собственного вращения и прецессии гиристата из равенства

$$(1 \cdot \kappa^0) = \cos \alpha = x_0 \kappa_1 + z_0 \kappa_3 = 0$$

Отсюда заключаем, что всегда $\alpha = \pi/2$.

Определим далее угол β отклонения неподвижной оси прецессии гиристата от вертикали из равенства

$$(\kappa \cdot \zeta^0) = \cos \beta = \gamma_1 \kappa_1 + \gamma_2 \kappa_2 + \gamma_3 \kappa_3$$

При подстановке сюда формул (1.15) и (1.22) получим

$$(1.25) \quad \cos \beta = \frac{n^2}{\mu l} \left(H + \frac{\lambda}{n} \right)$$

Находя отсюда λ и сравнивая полученное выражение с (1.24), имеем

$$(1.26) \quad n = \pm \sqrt{\frac{\mu l}{E} \sin \beta}$$

Из этой формулы видно, что нельзя выбирать углы отклонения β равными 0, π , иначе скорость n становится равной нулю.

Для углов отклонения β , при которых $\cos \beta > 0$ или $\cos \beta < 0$ (фиг. 2), согласно формуле (1.25) должны соответственно выполняться неравенства

$$(1.27) \quad H + \lambda/n > 0, \quad H + \lambda/n < 0$$

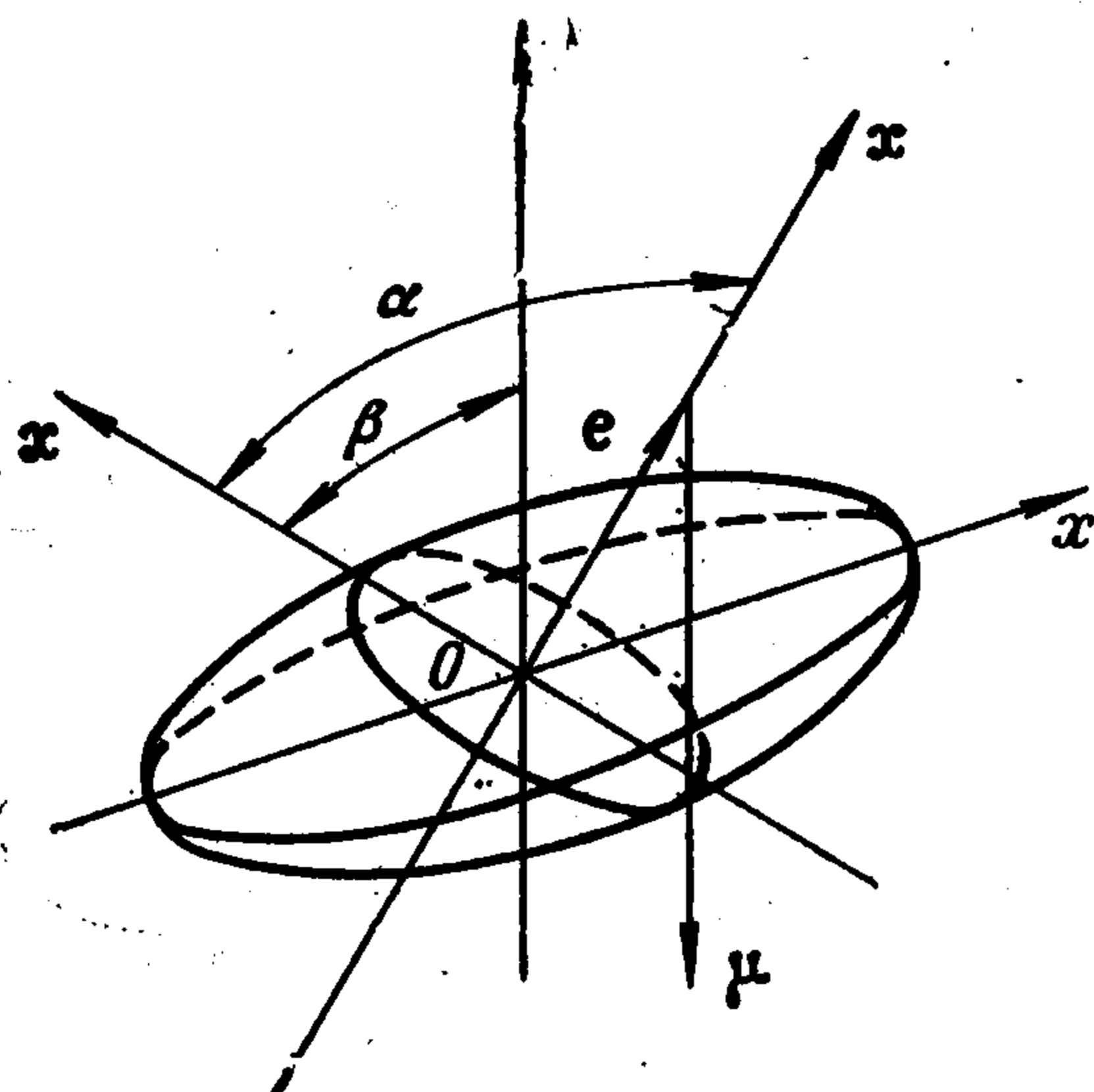
Выполнение их накладывает ограничение на выбор знака перед радикалом (1.26).

Перепишем равенство (1.25) с учетом формулы (1.26) в виде

$$\lambda/n = -H + E \operatorname{ctg} \beta$$

Если $n > 0$, $\operatorname{ctg} \beta > 0$, $H < E \operatorname{ctg} \beta$, то $\lambda/n > 0$ и первое неравенство из (1.27) выполняется. Если $n < 0$, $\operatorname{ctg} \beta > 0$, $H > E \operatorname{ctg} \beta$, то $\lambda/n < 0$ и первое неравенство также выполняется.

Второе неравенство из (1.27) будет выполняться, если $n < 0$, $\operatorname{ctg} \beta < 0$, тогда $\lambda/n < 0$. Отсюда следует, что в данном случае циклическое движение в гиристате должно совершаться только в противоположном направлении собственному вращению гиристата.



Фиг. 2

Если, в частности, угол отклонения $\beta = \pi / 2$, то прецессионное движение гиростата будет совершаться вокруг горизонтальной оси. При этом из формул (1.25), (1.26) следует

$$(1.28) \quad \lambda = -Hn, \quad n = \pm \sqrt{\mu l / E}$$

Таким образом, в этом случае циклическое движение в гиростате возможно как в одном, так и в противоположном направлениях к собственному вращению гиростата вокруг бариецентрической оси. Формулы (1.15) с учетом равенств (1.28) будут иметь вид

$$\gamma_1 = - \frac{h^2}{\mu l^2} [(A - B) z_0 \sin n\tau + (B - C) x_0 \cos^2 n\tau]$$

$$\gamma_2 = \frac{n^2}{\mu l^3} (A - C) x_0 z_0 \sin n\tau \cos n\tau$$

$$\gamma_3 = \frac{n^2}{\mu l^2} [-(B - C) x_0 \sin n\tau + (A - B) z_0 \cos^2 n\tau]$$

При таком движении гиростата его центр тяжести будет описывать окружность в вертикальной плоскости, проходящей через неподвижную точку тела. Линейная скорость этого движения с учетом (1.28)

$$v = ln = \pm l \sqrt{\mu l / E}$$

Это движение на первый взгляд кажется странным, так как здесь фактически исключается ускоряющее и замедляющее действие силы тяжести на гиростат. Можно было бы показать, что такое действие силы тяжести на гиростат должно компенсироваться гироскопическими моментами вследствие относительных циклических движений и собственного переносного вращения гиростата. Эти моменты могут создаваться только силами инерции Кориолиса и переносного движения. Поэтому регулярная прецессия гиростата оказывается более интересной для возможности управления ею. Действительно, если для абсолютно твердого тела она может происходить [5] только при угле $0 < \beta < \pi / 2$, который определяется равенством

$$\cos \beta = \frac{n^2}{\mu l} H < 1$$

то для гиростата она происходит при углах β , определяемых равенством (1.25), т. е. в пределах $0 < \beta < \pi$. Управляющей функцией при этом будет функция (1.24).

В результате проведенного анализа обнаруживается следующий результат: форма движения гиростата в пространстве, определяемая решениями (1.11), (1.22), оказывается инвариантной, как в классическом случае (Гриоли).

2. Исследуем регулярную прецессию гиростата при условиях Лагранжа: $A = B \neq C$, $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = l$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda$. Тогда решения (1.11), (1.15) и (1.22) запишутся так:

$$(2.1) \quad p = n \sin n\tau, \quad q = n \cos n\tau, \quad r = n = \text{const}$$

$$\gamma_1 = \frac{n}{\mu l} \left(C + \frac{\lambda}{n} \right) \sin n\tau, \quad \gamma_2 = \frac{n^2}{\mu l} \left(C + \frac{\lambda}{n} \right) \cos n\tau, \quad \gamma_3 = 0$$

$$\kappa_1 = \sin n\tau, \quad \kappa_2 = \cos n\tau, \quad \kappa_3 = 0$$

где согласно (1.24) и ввиду $E = 0$

$$(2.2) \quad \lambda = -Cn \pm \frac{\mu l}{n}$$

В рассматриваемом случае угол отклонения β оси прецессии гиростата от вертикали определится равенством

$$\cos \beta = \gamma_1 \kappa_2 + \gamma_2 \kappa_1 = \frac{n^2}{\mu l} (C + \lambda / n)$$

Находя отсюда λ и сравнивая с (2.2), убеждаемся, что $\cos \beta = \pm 1$, $\beta = 0, \pi$. Следовательно, регулярная прецессия гиростата, описываемая формулами (2.1), может совершаться только вокруг вертикальной оси. В этом случае выполняются равенства

$$\gamma_1 = \kappa_1, \quad \gamma_2 = \kappa_2, \quad \gamma_3 = \kappa_3$$

С учетом формул (2.1) из них получаем одно уравнение

$$Cn^2 + \lambda n - \mu l = 0$$

уточняющее значение $\cos \beta$ до единицы. Разрешая его относительно скорости n , получим

$$(2.3) \quad n = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4C\mu l}}{2C}$$

При $\lambda = 0$ формулы (2.1), (2.3) описывают регулярную прецессию в классическом случае [5].

3. Исследуем внешние силы, способные вызвать регулярную прецессию гиростата. Известно [7], что тело, закрепленное в одной точке и обладающее осью кинетической симметрии, тогда и только тогда может совершать регулярную прецессию, когда главный момент внешних сил L_0 относительно неподвижной точки O , будет постоянен по модулю и направлен по линии узлов. Выясним, будет ли выполняться это условие для случая тяжелого несимметричного гиростата.

Согласно (1.3), имеем]

$$L_x = A \frac{dp}{dt} - (B - C) qr + \frac{z_0}{l} \lambda q$$

$$L_y = B \frac{dq}{dt} + (A - C) pr - \frac{\lambda}{l} (z_0 p - x_0 r)$$

$$L_z = C \frac{dr}{dt} - (A - B) pq - \frac{x_0}{l} \lambda q$$

Подставляя сюда значения p, q, r из (1.11), с учетом (1.4) получим

$$(3.1) \quad L_x = \frac{n^2}{l} z_0 \left[\left(H + \frac{\lambda}{n} \right) \cos n\tau + E \sin n\tau \cos n\tau \right]$$

$$L_y = -n^2 \left[\left(H + \frac{\lambda}{n} \right) \sin n\tau - E \cos^2 n\tau \right]$$

$$L_z = -\frac{n^2}{l} x_0 \left[\left(H + \frac{\lambda}{n} \right) \cos n\tau + E \sin n\tau \cos n\tau \right]$$

При помощи (3.1) найдем модуль момента внешних сил

$$L_0 = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = n^2 \sqrt{\left(H + \frac{\lambda}{n} \right)^2 + E^2 \cos^2 n\tau}$$

Как видим, момент L_0 непостоянный. Но при условиях Лагранжа он оказывается постоянным. Главный момент L_0 должен лежать в горизонтальной плоскости, так как он создается единственной силой — силой тяжести, приложенной к телу

$$(L_0 \cdot \zeta^0) = L_x \gamma_1 + L_y \gamma_2 + L_z \gamma_3 = 0$$

Вследствие вращения гиростата вокруг неподвижной оси прецессии со скоростью $n = \omega_l$ главный момент L_0 будет прецессировать в горизонтальной плоскости со скоростью

$$\omega_l \cos \beta = \frac{n^3}{\mu l} \left(H + \frac{\lambda}{n} \right)$$

Согласно [7], для совпадения главного момента L_0 с линией углов необходимо, чтобы проекции L_x , L_y , L_z выражались через углы Эйлера следующим образом:

$$L_x = L_0 \cos \varphi, \quad L_y = -L_0 \sin \varphi, \quad L_z = L_0 \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Согласно (3.1) $L_z \neq 0$. Следовательно, главный момент в данном случае не располагается по линии узлов в горизонтальной плоскости. Но в случае прецессии гиростата при условиях Лагранжа это требование выполняется, так как $L_z = 0$.

Поступила 1 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Х а р л а м о в П. В. Лекции по динамике твердого тела. Изд-во Новосибирск. ун-та, 1965.
2. К е й с И. А. О движении гиростата, закрепленного в одной точке. Вестн. МГУ, 1964, № 1.
3. G r i o l i G. Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per solido pesante asimmetrico. Annali di Matem., Ser. IV, vol. 24, 1947.
4. Х а р л а м о в а Е. И. Об одном движении тела, имеющего неподвижную точку. В сб.: Механика твердого тела, вып. 1, Киев, «Наукова думка», 1969.
5. Г у л я е в М. П. Об одном новом частном решении уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Вест. МГУ, 1955, № 3.
6. Г у л я е в М. П. О динамически возможных регулярных прецессиях твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Тр. сектора матем. и механ. АН КазССР, т. 1, 1958.
7. Р о з е Н. В. Динамика твердого тела, Л., «Кубуч», 1932.

УДК 531.36

К ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

А. П. Маркеев

(Москва)

Строится пример гамильтоновой системы с тремя степенями свободы, положение равновесия которой, согласно теореме В. И. Арнольда, устойчиво для большинства начальных условий, но неустойчиво по Ляпунову. Исследуется задача о формальной устойчивости треугольных лагранжевых решений.

1. Рассмотрим движение тела P бесконечно малой массы под действием ньютоновского притяжения двух тел S и J с массами $1 - \mu$ и μ . Предположим, что тела S и J движутся относительно их центра масс по круговым орбитам. Исследуем устойчивость такого движения тела P , при котором оно образует с телами S и J равносторонний треугольник, предполагая, что в своем возмущенном движении оно может выходить из плоскости вращения тел S и J .

Сформулированная задача рассматривалась в работе [1]. Исследование было основано на преобразовании функции Гамильтона к нормальной форме с последующим применением теоремы Четаева о неустойчивости [2] и теоремы Арнольда об устойчивости многомерных гамильтоновых систем [3]. Доказано, что в области устойчивости в линейном приближении

$$(1.1) \quad 0 < \mu < \mu^* = 0.0385208$$