УДК 531:001.8

К ВОПРОСУ О СВЯЗИ МЕТРИК ШВАРЦШИЛЬДА И ТОЛМАНА

К. П. Станюкович, О. Ш. Шаршекеев

(Москва, Фрунзе)

Вопросу о связи метрик Шварцшильда и Толмана посвящено много работ. В работах [1—3] указаны решения, которые хотя и удовлетворяют уравнениям Общей теории относительности (ОТО), но противоречат принципу соответствия, т. е. при $G \to 0$ интервал не переходит в интервал Специальной теории относительности (СТО), а при $c \to \infty$ решения не переходят в ньютоновские. Это происходит, по-видимому, из-за неудачного выбора координат в системе отсчета Толмана. В работах [4, 5] указаны правильные частные случаи перехода от одной метрики к другой.]

В данной работе предлагается такой общий метод нахождения решений, который при переходе от одной системы отсчета к другой удовлетворяет принципу соответствия.

Интервал в сопутствующей системе отсчета и в центральной системе соответственно имеет вид

(1) $$-ds^2 = -c^2d\tau^2 + e^{\omega}dR^2 + r^2d\Omega^2$$

(2) $$-ds^2 = -e^{\nu}c^2dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2d\Omega^2$$

$$(d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Поскольку $r = r\,(c\tau,\ R)$, $ct = ct\,(c\tau,\ R)$, то

$$dr = r^{\cdot}cd\tau + r'dR,\ cdt = ct^{\cdot}cd\tau + ct'dR$$

$$(r^{\cdot} = \partial r/c\partial\tau,\ r' = \partial r\,/\,\partial R,\ ct^{\cdot} = c\partial t\,/\,c\partial\tau,\ ct' = c\partial t\,/\,\partial R)$$

Подставляя эти дифференциалы в (2) и сравнивая коэффициенты при $c^2d\tau^2$, dR^2, а также учитывая, что коэффициент при $2cd\tau dR$ равен нулю, найдем

(3) $$e^{\nu}c^2t^{\cdot 2} - r^{\cdot 2}e^{\lambda} = 1,\quad e^{\lambda}r'^2 - c^2t'^2e^{\nu} = e^{\omega},\quad e^{\lambda}r^{\cdot}r' - ct^{\cdot}ct'e^{\nu} = 0$$

Отсюда, исключая e^{λ} и e^{ν}, имеем

(4) $$e^{\lambda} = e^{\omega}\,/\,(r'^2 - r^{\cdot 2}e^{\omega}),\quad e^{\nu} = r'^2\,/\,[c^2t^{\cdot 2}\,(r'^2 - r^{\cdot 2}e^{\omega})]$$

$$(e^{\omega}ct^{\cdot}r^{\cdot} - ct^{\cdot}r')\,(ct^{\cdot}r' - ct'r^{\cdot}) = 0$$

Выражение

(5) $$\Delta_0 = r'ct^{\cdot} - r^{\cdot}ct' = \frac{\partial\,(r,\ ct)}{\partial\,(R,\ c\tau)} = \exp\frac{\omega - (\lambda + \nu)}{2}$$

является якобианом преобразования от системы координат (1) к системе (2). Для допустимого преобразования $\Delta_0 \neq 0$, поэтому из (4) имеем

(6) $$e^{\omega}ct^{\cdot}r^{\cdot} - ct'r' = 0$$

Для дальнейших вычислений удобно перейти к независимым переменным R, r. Тогда

$$r^{\cdot} = \frac{1}{c\tau_r},\qquad r' = -\frac{c\tau_R}{c\tau_r},\qquad ct^{\cdot} = \frac{ct_r}{c\tau_r},\qquad ct' = ct_R - \frac{c\tau_R}{c\tau_r}ct_r$$

В решении Толмана ($p = 0$) в метрике (1) имеем [2]

$$c\tau_r = \frac{1}{r^{\cdot}} = \left[f\,(R) + \frac{F\,(R)}{r}\right]^{-1/2},\qquad c\tau - c\tau_0\,(R) = \int\left(f + \frac{F}{r}\right)^{-1/2}dr$$

Далее, легко вычислить с τ_R. В самом деле

$$c\tau_{Rr} = -\frac{1}{2}\left(f' + \frac{F'}{r}\right)\left(f + \frac{F}{r}\right)^{-3/2}$$

$$c\tau_R - c\tau_{0R} = -\frac{1}{2}\int\left[\left(f' + \frac{F'}{r}\right)\left(f + \frac{F}{r}\right)^{-3/2}\right]dr$$

Имеют место соотношения

$$\int\left(f+\frac{F}{r}\right)^{-1/2}dr=\left(f+\frac{F}{r}\right)^{-1/2}r-\frac{F}{2}\int\left(f+\frac{F}{r}\right)^{-3/2}\frac{dr}{r}$$

$$\int\left(f+\frac{F}{r}\right)^{-3/2}\frac{dr}{r}=\frac{2}{F}\left[\left(f+\frac{F}{2}\right)^{-1/2}r-(c\tau-c\tau_0)\right]$$

$$\int\left(f+\frac{F}{r}\right)^{-3/2}f\,dr=\int\left(f+\frac{F}{r}\right)^{-1/2}dr-F\int\left(f+\frac{F}{r}\right)^{-3/2}\frac{dr}{r}$$

Следовательно

$$\int\left(f+\frac{F}{r}\right)^{-3/2}dr=\frac{1}{f}\left\{(c\tau-c\tau_0)-2\left[\left(f+\frac{F}{2}\right)^{-1/2}r-(c\tau-c\tau_0)\right]\right\}=$$
$$=\frac{1}{f}\left[3(c\tau-c\tau_0)-\left(f+\frac{F}{2}\right)^{-1/2}2r\right]$$

Поэтому

$$c\tau_R-c\tau_{0R}=\frac{f'}{f}\left[-\frac{3}{2}(c\tau-c\tau_0)+\left(f+\frac{F}{r}\right)^{-1/2}r\right]+$$
$$+\frac{F'}{F}\left[-\left(f+\frac{F}{r}\right)^{-1/2}r+(c\tau-c\tau_0)\right]$$

При $F=r_g=\mathrm{const}$

$$c\tau_R-c\tau_{0R}=\frac{f'}{f}\left[-\frac{3}{2}(c\tau-c\tau_0)+\left(f+\frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}r\right]\tag{7}$$

Из (6) имеем

$$e^{\omega}=(c\dot{\tau}_R ct_r-ct_R c\tau_r)\frac{c\tau_R}{ct_r}=\frac{c\tau_R}{ct_r}\,\frac{\partial(c\tau,ct)}{\partial(R,r)}$$

при этом

$$\Delta_0=ct_R\,/\,ct_r=-r'\,(ct_R\,/\,c\tau_R)$$

Далее, из (3) находим

$$ct_r=(c^2\tau_r^{\,2}+e^{\lambda})^{1/2}e^{-1/2\nu},\quad ct_R\,/\,c\tau_R=c\tau_r\,[e^{\nu}\,(e^{\lambda}+c^2\tau_r^{\,2})]^{-1/2}$$

что окончательно определяет

$$e^{\omega}=c^2\tau_R^{\,2}\,(c^2\tau_r^{\,2})^{-1}\left(e^{-\lambda}+\frac{1}{c^2\tau_r^{\,2}}\right)^{-1}=c^2\tau_R^{\,2}e^{\lambda}\,(c^2\tau_r^{\,2}+e^{\lambda})^{-1}$$

При $e^{\nu}=e^{-\lambda}=1-r_g\,/\,r$, $F=r_g$ имеем

$$ct_r=(1+f)^{1/2}\left(1+\frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1},\quad ct_R=c\tau_R\,(1+f)^{-1/2}$$
$$e^{\omega}=r'^2\,(1+f)^{-1}=\Delta_0^{\,2}$$

Легко решается и обратная задача. Зная

$$r_{c\tau}=\left(f+\frac{F}{r}\right)^{1/2},\qquad e^{\omega}=r'^2\,(1+f)^{-1}$$

находим из (4)

$$e^{\lambda}=\left(1-\frac{F}{r}\right)^{-1},\quad e^{\nu}=(1+f)\left[c^2t'^2\left(1-\frac{F}{r}\right)\right]^{-1}=$$
$$=(1+f)\left(1-\frac{F}{r}\right)^{-1}\left[c^2t_{\tau}^{\,2}\left(f+\frac{F}{r}\right)\right]^{-1}$$

Отсюда следует, что

$$ct^{\bullet} = (1+f)^{1/2} \exp \frac{\lambda - \nu}{2}$$

или что

$$ct_r = (1+f')^{1/2} \left(\exp \frac{\lambda-\nu}{2}\right) c\tau_r$$

причем

$$(8) \qquad ct_r \left(f + \frac{F}{r}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{F}{r}\right)(1+f)^{-1} = \frac{ct_R}{c\tau_R}$$

$$\frac{u}{c} = r_{ct} \exp \frac{\lambda-\nu}{2} = r_{c\tau}(1+f')^{-1/2} = \left(f + \frac{F}{r}\right)^{1/2} (1+f)^{-1/2}$$

Это определяет

$$ct = ct(r, R), \; e^{\nu} = \left(1 - \frac{F}{r}\right) c^2 \tau_R{}^2 \left[(1+f)\, c^2 t_R{}^2\right]^{-1}$$

$$ct^{\bullet} = \frac{ct_R}{c\tau_R}(1+f)\left(f + \frac{F}{r}\right)^{-1}$$

При $F = r_g$ имеем

$$e^{\lambda} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \quad e^{\nu} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad c\tau_R = (1+f)^{1/2} ct_R,$$

$$ct^{\bullet} = (1+f)^{1/2}\left(1 + \frac{r_g}{r}\right)^{-1}$$

Если решается задача Фридмана, то, например, для закрытой модели при $p = 0$

$$e^{\omega} = a^2/4a_0{}^2, \; r = a \sin X, \; R = 2a_0 X, \; F = 2a_0 \sin^3 X$$

$$e^{\lambda} = \left(1 - \frac{2a_0}{a} \sin^2 X\right)^{-1}$$

и уравнения (8) определяет $ct = ct(r, R)$, после чего определяется e^{ν}.

Решим теперь задачу Шварцшильда в метрике Толмана, используя следующие важные принципы.

1) Поскольку уравнение Эйнштейна имеют предельные переходы к СТО и к законам Ньютона, а затем к механике Галилея, причем последовательность этих переходов безразлична, то и в метрике Толмана эти требования (принцип соответствия) должны выполняться.

2) Якобиан преобразования $\Delta_0 \neq 0$ не стремится к бесконечности во всей рассматриваемой области (за исключением особых точек) и при предельных переходах к СТО, теории Ньютона и преобразованиям Галилея.

3) Если данная область покрывается в одной системе отсчета n «картами», то и в другой системе число карт сохраняется. При этом используются только допустимые системы координат, что сохраняет класс функций при переходе от одной системы к другой. Обычно считают, что преобразование координат X^i относится к классу функций $c^{(2)}$, а преобразования — g_{ik} — к классу $c^{(1)}$.

Поскольку $c\tau_r = (f + r_g/r)^{-1/2}$, где $1 + f > 0$, то

$$f(c\tau - c\tau_0) = (fr^2 + r_g r)^{1/2} - r_g(-f)^{-1/2} \arcsin(-rf/rq)^{1/2}, \quad f < 0$$

$$(9) \qquad {}^3/_2 r_g{}^{1/2}(c\tau - c\tau_0) = r^{3/2}, \; f = 0$$

$$f(c\tau - c\tau_0) = (fr^2 + r_g r)^{1/2} - r_g(f)^{-1/2} \operatorname{arcsh}(r_f/r_g)^{1/2}, \; f > 0$$

Рассмотрим эти три режима движения раздельно.

1°. При $f < 0$ имеем «эллиптическое» движение. При $c\tau = 0$ необходимо и достаточно положить $r = R$ (координаты Эйлера и Лагранжа совпадают) и

$$dr / cd\tau = (v / c) = (f + r_g / r)^{1/2} = 0$$

что позволяет найти все возможные движения. Из этих условий имеем

$$f = -\frac{r_g}{R}, \quad c\tau_0 = -\frac{R^{3/2}}{r_g^{1/2}}\frac{\pi}{2}, \quad v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)} \tag{10}$$

$$\sqrt{r_g}\, c\tau = \sqrt{2GM}\,\tau = R^{3/2}\left[\arcsin\sqrt{\frac{r}{R}} - \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{r}{R}\left(1 - \frac{r}{R}\right)}\right]$$

Заметим, что R определяется с точностью до постоянной, поэтому можно, например, положить $r = R + r_g$ при $c\tau = 0$. Тогда в формулах (10) следует заменить R на $R + r_g$. В рассматриваемом случае $\lambda + \nu = 0$; поэтому из (5) следует

$$\Delta_0 = \exp\frac{\omega}{2} = \frac{r'}{\sqrt{1+f}} = -c\tau_R\left(\frac{1 + r_g / r}{1 + f}\right)^{1/2} \tag{11}$$

где $c\tau_R$ определяется формулой (7).

Поскольку

$$f = -r_g (R + r_g)^{-1}, \quad c\tau_0 = -(R + r_g)^{3/2} r_g^{-1/2}\frac{\pi}{2}$$

то

$$\frac{f'}{f} = -(R + r_g)^{-1}, \qquad c\tau_{0R} = -\frac{3\pi}{4}(R + r_g)^{1/2} r_g^{-1/2} \tag{12}$$

$$\Delta_0 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{R + r_g - r}{rR}}\left[\sqrt{R + r_g}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{r}{R + r_g}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{r\left(1 - \frac{r}{R + r_g}\right)}\right] + r\,[R\,(R + r_g)]^{-1/2}$$

Легко проверить, что соотношение (12) определяет якобиан Δ_0, который удовлетворяет всем выше сформулированным требованиям. Таким образом, указанное здесь решение вполне корректно. Якобиан Δ_0 всюду конечен, за исключением центра $R = 0$, который является, естественно, особой точкой, при $r_g = 0$ ($G = 0$ или $c \to \infty$), $R = r$, $\Delta_0 = 1$.

Обратим теперь внимание на решение этой задачи, данное И. Д. Новиковым [1]. В его решении выбран другой масштаб лагранжевой координаты. А именно, $f = -r_g^2(\overline{R}^2 + \tau_g^2)^{-1}$. Его лагранжева координата $\overline{R}$ связана с выбранной здесь соотношением $\overline{R}^2 = Rr_g$, $dR / d\overline{R} = 2\overline{R} / r_g$; при этом

$$c\tau_0 = -\frac{\pi}{2}\frac{(\overline{R}^2 + r_g^2)^{3/2}}{r_g^2}, \qquad \frac{f'}{f} = -\frac{2\overline{R}}{\overline{R}^2 + r_g^2}$$

$$c\tau_0\overline{R} = -\frac{3\pi}{2}(\overline{R}^2 + r_g^2)^{1/2}\frac{\overline{R}}{r_g^2}$$

Подобным выбором лагранжевой координаты И. Д. Новиков добивался того, чтобы найденное решение обладало так называемой полнотой, при которой мировые линии всякой движущейся в поле Шварцшильда частицы или лежат на центральной особой точке ($r = 0$), или уходят в бесконечность. Кроме того, найденное решение с максимальной полнотой служит аналогом решения Крускала, что, по мнению автора, существенное достижение. Однако, как можно показать, эта полнота решения противоречит принципу соответствия. Система координат И. Д. Новикова в этом смысле не является допустимой из-за двузначности выбора лагранжевой координаты: при $r_g \to 0$

($G = 0$ или $c \to \infty$) $\Delta_0 \to \infty$. В самом деле, у И. Д. Новикова

$$\Delta_0 = \frac{3}{2\overline{R}} \sqrt{\frac{\overline{R}^2 + r_g^2 - rr_g}{r}} \left[\sqrt{\frac{\overline{R}^2 + r_g^2}{r_g}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{\frac{rr_g}{\overline{R}^2 + r_g^2}} \right) + \sqrt{r \left(1 - \frac{rr_g}{\overline{R}^2 + r_g^2} \right)} \right] + \frac{rr_g}{\overline{R} \sqrt{\overline{R}^2 + r_g^2}}$$

При $r_g \to 0$

$$\Delta_0 = \frac{3\pi}{4} \frac{\overline{R}}{\sqrt{rr_g}} \to \infty, \qquad \overline{\Delta} = \frac{\partial (r, ct)}{\partial (\overline{R}, c\tau)} = \Delta_0 \frac{dR}{d\overline{R}} = \frac{3\pi}{4} \frac{\overline{R}}{\sqrt{rr_g}} \times$$

$$\times \frac{2\overline{R}}{r_g} = \frac{3}{2} \pi \frac{\overline{R}^2}{r^{1/2} r_g^{3/2}} \to \infty$$

В книге [2] утверждается, что координаты (r, t или любые другие) могут быть подвергнуты любому преобразованию. Этим замечанием, по сути дела, и воспользовался И. Д. Новиков. Известно, однако, что преобразования координат не могут быть произвольными, а только такими, которые сохраняют класс функций. У И. Д. Новикова получаются два пространства: одно при $\overline{R} > 0$ и другое — при $\overline{R} < 0$, которое сопрягается с первым на линии $\overline{R} = 0$. Но при этом $dR/d\overline{R} \to 0$, как легко убедиться, нарушается однозначность, и «второе» пространство оказывается просто математическим дубликатом «первого». В нашем формализме нет второго пространства.

Далее, при $c \to \infty$ или $G = 0$ у И. Д. Новикова не выполняется принцип соответствия, и $v^2 = 2GM\,[(1 / r) - r_g / (\overline{R}^2 + \tau^2)]$. При $c \to \infty$, $v^2 = 2GM / r$, так что в отличие от нашего формализма при переходе к теории Шварцшильда исчезают все эллиптические движения. Казалось бы, можно примирить требования И. Д. Новикова о физическом смысле двух (или четырех) пространств в метрике типа Крускала с соблюдением принципа соответствия, если положить $f = -r_g\,(R^{*2} + r_g)^{-1/2}$. Тогда

$$R = -r_g \pm (R^{*2} + r_g^2)^{1/2}$$

$$c\tau_0 = -\frac{\pi}{2} r_g^{-1/2} (R^{*2} + r_g^2)^{3/4}, \qquad v^2 = 2GM\,[r^{-1} - (R^{*2} + r_g^2)^{-1/2}]$$

и все принципы соответствия выполняются. Но

$$\frac{f_{R^*}}{f} = -\frac{R^*}{(R^{*2} + r_g^2)^{1/2}}, \qquad c\tau_{0R^*} = -\frac{3\pi}{4} \frac{R^*}{r_g^{1/2} (R^{*2} + r_g^2)^{3/4}}$$

Поэтому при $R^* = 0$

$$\Delta_0^* = \frac{\partial (r, ct)}{\partial (R^*, c\tau)} = \Delta_0 \frac{dR}{dR^*} = \Delta_0 \frac{R^*}{(R^* + r_g^2)^{1/2}} = 0$$

Таким образом, второе пространство опять оказывается математическим дубликатом первого.

2°. При $f = 0$ положим, что при $c\tau = 0$ $r = R + r_g$ (или $r = R$, что безразлично), тогда получаем

$$r^{3/2} = (R + r_g)^{3/2} \pm {}^3/_2 r_g^{1/2} c\tau, \qquad c\tau_0 = \frac{2}{3} \frac{(R + r_g)^{3/2}}{r_g^{-1/2}}$$

$$v^2 = 2GM / r, \qquad r' = (R + r_g)^{1/2} r^{-1/2} = \Delta_0$$

Решение отвечает всем поставленным выше требованиям.

Ранее Леметр и Ю. А. Рылов [3] положили $c\tau_0 = -R$, тогда $r^{3/2} = {}^3/_2\,(r_g)^{1/2} \cdot (R \pm c\tau)$, но при этом $r' = (r_g r^{-1})^{1/2} = \Delta_0$. Полагая $c \to \infty$ или $G = 0$, видим, что и в этом случае не выполняется принцип соответствия, и, следовательно, выбор $c\tau_0$ не удовлетворителен.

3°. При $f > 0$, положив $c\tau = 0$, $r = R + r_g$ (или $r = R$), задаем при $r \to \infty$ $v / c = f^{1/2} = v_0 (R)' / c$, что определяет $f = v_0^2 / c^2$.

Далее, из (9) при $c\tau = 0$ находим $c\tau_0$, что полностью решает поставленную задачу

$$v_0\tau = \left[r\left(r\frac{v_0}{c} + r_g\right)\right]^{1/2} - \left[(R + r_g)\left[(R + r_g)\frac{v_0}{c} + r_g\right]\right]^{1/2} -$$
$$-\frac{r_g c}{v_0}\operatorname{arcsh}\sqrt{\frac{v_0 r}{c r_g}} + \frac{c r_g}{v_0}\operatorname{arcsh}\sqrt{\frac{v_0}{c r_g}(R + r_g)}$$

Вычислим теперь трехскорость в центральной системе отсчета. Известно, что

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{f + r_g / r}{1 + f}, \qquad u = c \quad \text{при } r = r_g$$

$$u^2 = \begin{cases} 2GMr^{-1}, & f = 0 \\ 2GMr^{-1}(R + r_g - r)R^{-1}, & f < 0 \\ (2GMr^{-1} + v_0^2) / (1 + v_0^2 c^{-2}), & f > 0 \end{cases}$$

Поскольку $u = c$ при $r = r_g$, это свидетельствует о том, что сфера Шварцшильда — реальная особенность. Энергия любой пробной частицы для метрики (1)

$$E = \frac{\sqrt{-g_{00}}\,E_0}{\sqrt{1 - u^2 c^{-2}}} = \frac{E_0\sqrt{1 + f}}{\sqrt{1 - r_g / r}}$$

стремится к бесконечности ($\sqrt{-g_{00}} = 1$). Если в метрике Шварцшильда была координатная особенность, а энергия в постоянном поле сохранялась, то в метрике Толмана, избавившись от координатной особенности, имеются неприятности с энергией на шварцшильдовском радиусе.

Поскольку

$$\bar{R}^2 = R_{ilkm}R^{ilkm} = 12 r_g^2 / r^6 \simeq \varkappa^2 \varepsilon_g^2$$

где ε_g — плотность энергии гравитационного поля, то имеем

$$\varepsilon_g = \frac{\sqrt{12}\, r_g}{\varkappa r^3} = \frac{\sqrt{3}\, M c^8}{2\pi r^3}$$

При $r = r_g$

$$\varepsilon_g = \frac{\sqrt{12}}{\varkappa r_g^2} = \frac{\sqrt{3}\, c^8}{16\pi G^3 M^2}$$

При $M = m_L = [c\hbar\,(2G)^{-1}]^{1/2} = 10^{-5}$ г

$$\varepsilon_g \simeq c^7 / G^2\hbar \simeq 10^{115} \text{ эрг / см}^3$$

что соответствует плотности гравитационно-квантовой частицы планктона.

При $M \simeq 10^{35}$, что соответствует массе предполагаемой черной дыры, получим $\varepsilon_g \simeq 35$ эрг / см^3, что соответствует плотности энергии нуклона.

Для масс, меньших 10^{35}, величина ε_g больше этой плотности энергии. Но при таких плотностях энергии уже нельзя пользоваться классической теорией гравитации — нужна квантовая теория.

Можно сделать фундаментальный вывод, что рассмотрение особенностей на сфере Шварцшильда бесполезно проводить в рамках классических теорий. Общая теория относительности может быть справедлива для внешнего поля лишь при $r > r_g$.

Следует отметить, что метрику (1) преобразованием координат можно привести еще к одному удобному для анализа виду. Пусть $c\tau = c\tau(r, R)$, тогда $cd\tau = c\tau_r dr + c\tau_R dR$. Из (1) имеем

$$-ds^2 = -2c\tau_r c\tau_R dr dR + (e^{\omega} - c^2\tau_R^2) dR^2 - c^2\tau_r^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{13}$$

Отсюда, например, для случая $f = 0$, $r^{3/2} = R^{3/2} + {}^3/_2 r_g^{1/2} c\tau$ найдем, что

$$c\tau_r = (rr_g^{-1})^{1/2}, \quad c\tau_R = -(Rr_g^{-1})^{1/2}, \quad e^{\omega} = R / r$$

Таким образом, метрику (13) можно привести к виду

$$-ds^2 = 2(rR)^{1/2} r_g^{-1} dr dR + Rr_g^{-1}(r_g r^{-1} - 1) dR^2 - rr_g^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{14}$$

Введя новые координаты

$$dr_1 = (rr_g^{-1})^{1/2} dr, \qquad dR_1 = (Rr_g^{-1})^{1/2} dR$$

из (14) получим

$$-ds^2 = \left[\left(\frac{2r_g}{3r_1}\right)^{2/3} - 1\right] dR_1^2 + 2dr_1 dR_1 - dr_1^2 + r_g^2 \left(\frac{2r_g}{3r_1}\right)^{-4/3} d\Omega^2$$

Отсюда, обозначая

$$(2rg)^2 (3r_1)^{-2} = r^2{}_g r^{-3}, \quad dR_1 = dR$$

рассматриваемую метрику в координатах r, R, окончательно запишем в виде

$$-ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dR^2 + 2\frac{r^{1/2}}{r_g^{1/2}} dr\, dR - \frac{r}{r_g^1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Особенность при $r = r_g$ в этой метрике сохраняется в коэффициенте при dR^2.

Посмотрим, какие результаты получаются для закрытой изотропной модели Фридмана. Поскольку $r = a\sin\chi$, $R = 2a_0\chi$, то легко вычисляется

$$c\tau_r = \frac{1}{a^{\cdot}\sin\chi}, \qquad c\tau_R = -\frac{r\cos\chi}{2a^{\cdot}a_0\sin^2\chi}$$

Зная, что $r_\chi = a\cos\chi$, имеем $r' = r_R = a(2a_0)^{-1}\cos\chi$. При этом из $e^{\omega} = r'^2 / (1 + f)$, имея в виду, что $f = -\sin^2\chi$, найдем $e^{\omega} = (a / 2a_0)^2$. Подставляя значения $c\tau_r$, $c\tau_R$, e^{ω} в (13), имеем

$$-ds^2 = \frac{r\cos\chi}{a^{\cdot 2}a_0\sin^2\chi} dr\, dR + \frac{a^2}{4a_0^2}\left(1 - \frac{\cos^2\chi}{a^{\cdot 2}\sin^2\chi}\right) dR^2 - \frac{dr^2}{a^{\cdot 2}\sin^2\chi} + r^2 d\Omega^2$$

Это соотношение удобно, например, для написания уравнений $T^k_{i,k} = 0$, когда можно получить сразу два квазилинейных уравнения для определения ε и u.

Поступила 5 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков И. Д.* Об эволюции полузамкнутого мира. Астрон. ж., 1963, т. 40, вып. 4.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика, т. 2. Теория поля. М., Физматгиз, 1967.
3. *Рылов Ю. А.* Об устранении особенности на гравитационном радиусе в решении Шварцшильда. Тезисы I Советской гравитационной конференции. Изд-во МГУ, 1961.
4. *Айвазян Ю. М., Герценштейн М. Е.* О связи между координатными системами Шварцшильда и Толмана. ЖЭТФ, 1969, т. 56, вып. 3.
5. *Глинер Э. Б.* Устранимые сингулярности и принципы прочности в общей теории относительности. ЖЭТФ, 1968, т. 54, вып. 3.