Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЯЗКО-УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ НАЛИЧИИ СЦЕПЛЕНИЯ ПОД ШТАМПОМ

В. П. Тен

(Москва)

Рассматриваются установившиеся колебания жесткого кругового в плане штампа, сцепленного с поверхностью вязко-упругого полупространства, под действием гармонической осевой силы. Усилия вне области контакта отсутствуют.

Система парных интегральных уравнений, построенная с помощью преобразования Ханкеля, сведена к системе сингулярных интегральных уравнений, регуляризуемой по Н. П. Векуа [1]. Найдено приближенное решение, справедливое для малых частот колебаний. Доказана осцилляция напряжений. В плоском случае подобный факт был обнаружен В. М. Абрамовым [2].

Статическая задача для упругой среды рассматривалась рядом авторов [3–6]. Ни в одной из перечисленных работ не была обнаружена осцилляция напряжений у края штампа.

1. Комплексные амплитуды перемещений вязко-упругой среды при наличии осевой симметрии удовлетворяют системе уравнений

$$(\lambda_* + 2\mu_*)\frac{\partial\Delta}{\partial r} + \mu_*\frac{\partial}{\partial z}(2\omega_\varphi) = -\rho\omega^2 u_r \tag{1.1}$$

$$(\lambda_* + 2\mu_*)\frac{\partial\Delta}{\partial z} - \mu_*\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(2r\omega_\varphi) = -\rho\omega^2 u_z$$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial}{\partial z}u_z, \qquad 2\omega_\varphi = \frac{\partial}{\partial z}u_r - \frac{\partial}{\partial r}u_z$$

$$\lambda_* = \lambda\left[1 - \int_0^\infty \Lambda(x)e^{-i\omega x}dx\right], \qquad \mu_* = \mu\left[1 - \int_0^\infty M(x)e^{-i\omega x}dx\right]$$

Здесь ρ — плотность среды, ω — частота колебаний, λ_* и μ_* — комплексные модули.

Будем предполагать, что среда заполняет полупространство $z \leqslant 0$. При помощи преобразования Ханкеля получим из (1.1) амплитуды перемещений в следующем виде:

$$u_z = \int_0^\infty [pe^{pz}A(\omega, s) - \Theta(se^{qz} - pe^{pz})sB(\omega, s)]\,J_0(rs)\,ds \tag{1.2}$$

$$u_r = -\int_0^\infty s\,[e^{pz}A(\omega, s) + \Theta(se^{pz} - qe^{qz})B(\omega, s)]\,J_1(rs)\,ds$$

$$p = (s^2 - k_1^2)^{1/2}, \qquad q = (s^2 - k_2^2)^{1/2}, \qquad \Theta = (k_2^2 - k_1^2)^{-1}$$

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda_* + 2\mu_*}, \quad k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu_*}, \quad \operatorname{Re} k_1 \geqslant 0, \quad \operatorname{Re} k_2 \geqslant 0$$

Здесь A (ω, s) и B (ω, s) — неизвестные функции, а p и q — ветви корней, удовлетворяющие условиям $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, $\operatorname{Re} q \geqslant 0$. Амплитуды напряжений получаются из (1.2) в виде

$$\frac{1}{2\mu_*}\sigma_z = \int_0^\infty [\varkappa e^{pz}A - \Theta(qse^{qz} - \varkappa e^{pz})sB]\, J_0(rs)\, ds \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{2\mu_*}\tau_{rz} = -\int_0^\infty s\,[pe^{pz}A + \Theta(pse^{pz} - \varkappa e^{qz})B]\, J_1(rs)\, ds$$

$$(\varkappa = s^2 - k_2^2 / 2)$$

Для определения A и B следует воспользоваться граничными условиями на поверхности $z = 0$

$$u_z = f(r), \quad u_r = 0 \quad \text{при } r < R; \quad \sigma_z = \tau_{rz} = 0 \quad \text{при } r \geqslant R$$

Устремляя z к нулю, получаем из (1.2) и (1.3) систему парных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty [pA - \Theta(s-p)sB]\, J_0(rs)\, ds = f(r) \\ &\int_0^\infty s\,[A + \Theta(s-q)B]\, J_1(rs)\, ds = 0 \end{aligned}\right\} \quad r < R \tag{1.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty [\varkappa A - \Theta(qs-\varkappa)sB]\, J_0(rs)\, ds = 0 \\ &\int_0^\infty s\,[pA + \Theta(ps-\varkappa)B]\, J_1(rs)\, ds = 0 \end{aligned}\right\} \quad r \geqslant R \tag{1.5}$$

2. Аналогично методике, развитой в [7], положим

$$\varkappa A - \Theta(qs-\varkappa)sB = s\int_0^R \varphi_1(t)\cos(ts)\, dt \tag{2.1}$$

$$pA + \Theta(ps-\varkappa)B = -\int_0^R \varphi_2(t)\sin(ts)\, dt$$

Соотношения (2.1) представляют собой линейную систему уравнений относительно A и B. Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ предполагаются ограниченными и непрерывно дифференцируемыми на полуинтервале $[0, R)$. Подставляя (2.1) в (1.3) и пользуясь формулами дифференцирования функций Бесселя, получаем, что при $z = 0$

$$\frac{1}{2\mu_*}\sigma_z = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_0^R \varphi_1(t)\left[\int_0^\infty rJ_1(rs)\cos(ts)\, ds\right] dt$$

$$\frac{1}{2\mu_*}\tau_{rz} = -\frac{d}{dr}\int_0^R \varphi_2(t)\left[\int_0^\infty J_0(rs)\sin(ts)\, ds\right] dt$$

Из свойств интегралов Вебера — Шафхейтлина [8], а также свойств $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ вытекает, что $\sigma_z = \tau_{rz} = 0$ при $r \geqslant R$. Под штампом имеют место соотношения

$$\frac{1}{2\mu_*}\sigma_z = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int\limits_r^R \frac{t\varphi_1(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}, \qquad \frac{1}{2\mu_*}\tau_{rz} = -\frac{d}{dr}\int\limits_r^R \frac{\varphi_2(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \tag{2.2}$$

Исключая из (1.4) и (2.1) A и B, получаем систему

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^R [g_{11}\varphi_1(t)\cos(ts)+\alpha g_{12}\varphi_2(t)\sin(ts)]\,J_0(rs)\,dtds = \beta f(r) \tag{2.3}$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^R [\alpha g_{21}\varphi_1(t)\cos(ts)+g_{22}\varphi_2(t)\sin(ts)]\,J_1(rs)\,dtds = 0$$

$$g_{11}(k_1,k_2,s) = \frac{\beta k^2 ps}{2D}, \qquad g_{22}(k_1,k_2,s) = \frac{\beta k^2 qs}{2D}$$

$$g_{12}(k_1,k_2,s) = g_{21}(k_1,k_2,s) = -\frac{\gamma s^2(pq-\varkappa)}{D}$$

$$\left(\alpha = \frac{\mu_*}{\lambda_*+2\mu_*},\ \beta = \frac{\lambda_*+\mu_*}{\lambda_*+2\mu_*},\ \gamma = \frac{\beta}{\alpha},\ k = k_2,\ D = pqs^2-\varkappa^2\right)$$

Анализ поведения g_{ij} на бесконечности показывает, что для $|s| \gg |k|$ справедлива оценка $|1-g_{ij}| < c(\omega)s^{-2}$, причем $c(0) = 0$. Выделяя единицу и пользуясь представлениями [9]

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos(z\sin\theta)\,d\theta, \quad J_1(z) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\sin(z\sin\theta)\sin\theta\,d\theta$$

приведем систему (2.3) к виду

$$\int\limits_0^{\pi/2} G(r\sin\theta)\,d\theta = \beta f(r) - \alpha\int\limits_r^R \frac{\varphi_2(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}} = g(r) \tag{2.4}$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} H(r\sin\theta)\,r\sin\theta\,d\theta = \alpha\int\limits_r^R \frac{t\varphi_1(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}} - \alpha\int\limits_0^R \varphi_1(t)\,dt = h(r)$$

$$G(r) = \varphi_1(r) - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^R K_{11}(t,r)\varphi_1(t)\,dt - \frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^R K_{12}(t,r)\varphi_2(t)\,dt$$

$$H(r) = \varphi_2(r) - \frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^R K_{21}(t,r)\varphi_1(t)\,dt - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^R K_{22}(t,r)\varphi_2(t)\,dt$$

$$K_{11} = \int\limits_0^\infty (1-g_{11})\cos(ts)\cos(rs)\,ds, \quad K_{12} = \int\limits_0^\infty (1-g_{12})\sin(ts)\cos(rs)\,ds$$

$$K_{21} = \int\limits_0^\infty (1-g_{21})\cos(ts)\sin(rs)\,ds, \quad K_{22} = \int\limits_0^\infty (1-g_{22})\sin(ts)\sin(rs)\,ds$$

Очевидно, что $K_{ij}(t,r)$ — непрерывные функции.

Предположим, что форма штампа задана полиномом по четным степеням r.

Если считать φ_1 и φ_2 известными, то каждое из уравнений системы (2.4) можно рассматривать формально как уравнение Шлёмильха с заданной непрерывно дифференцируемой на полуинтервале $[0, R)$ правой частью. Можно показать, что единственное решение уравнения Шлёмильха с такой правой частью, непрерывное на $[0, R)$, дается формулой

$$G(r)=\frac{2}{\pi}\left[g(0)+r\int_0^{\pi/2} g'(r\sin\theta)\,d\theta\right]= \tag{2.5}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[g(0)+r\frac{d}{dr}\int_0^{\pi/2}\frac{g(r\sin\theta)-g(0)}{\sin\theta}\,d\theta\right]$$

Подставляя последовательно $g(r)$ и $h(r)$ в (2.5) и меняя порядок интегрирования по t и θ, получаем

$$G(r)+\frac{\alpha}{\pi}\int_0^R\frac{2t}{t^2-r^2}\varphi_2(t)\,dt=\beta b(r) \tag{2.6}$$

$$H(r)-\frac{\alpha}{\pi}\int_0^R\frac{2r}{t^2-r^2}\varphi_1(t)\,dt=0$$

где $b(r)$ — обращение $f(r)$ по формуле (2.5). Интегралы понимаются в смысле главного значения.

Заметим, что $\varphi_2(0)=0$, K_{11} и K_{12} — четны, а K_{21} и K_{22} — нечетны по r. Продолжая непрерывным образом влево $\varphi_1(t)$ по четности, а $\varphi_2(t)$ по нечетности, получаем из (2.6) сингулярную систему с ядром Коши

$$\varphi_1(r)+\frac{\alpha}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{\varphi_2(t)}{t-r}\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}K_{11}(t,r)\varphi_1(t)\,dt- \tag{2.7}$$

$$-\frac{\alpha}{\pi}\int_{-R}^{R}K_{12}(t,r)\varphi_2(t)\,dt=\beta b$$

$$\varphi_2(r)-\frac{\alpha}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{\varphi_1(t)}{t-r}\,dt-\frac{\alpha}{\pi}\int_{-R}^{R}K_{21}(t,r)\varphi_1(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R}K_{22}(t,r)\varphi_2(t)\,dt=0$$

3. Устремим ω к нулю. Тогда соотношения (1.2) и (1.3) обращаются в известное представление решения через бигармоническую функцию Лява. Вследствие того, что $\lim K_{ij}=0$ при $\omega\to 0$ для всех t и r, регулярная часть системы (2.7) исчезает. Таким образом, статическая задача описывается характеристической частью (2.7)

$$\varphi_1(r)+\frac{\alpha}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{\varphi_2(t)}{t-r}\,dt=\beta b \tag{3.1}$$

$$\varphi_2(r)-\frac{\alpha}{\pi}\int_{-R}^{R}\frac{\varphi_1(t)}{t-r}\,dt=0$$

Введем аналитические функции

$$\Phi_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi_1(t)}{t-\zeta}dt,\qquad \Phi_2(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\varphi_2(t)}{t-\zeta}dt$$

С помощью формул Сохоцкого — Племеля сведем (3.1) к двумерной задаче сопряжения с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\Phi^+=G\Phi^-+g,\ |t|\leqslant R;\ \Phi^+=\Phi^-,\ |t|>R$$

Здесь

$$\Phi=\begin{Vmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{Vmatrix},\quad G=\begin{Vmatrix}\dfrac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2} & \dfrac{-2i\alpha}{1-\alpha^2}\\ \dfrac{2i\alpha}{1-\alpha^2} & \dfrac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\end{Vmatrix},\quad g=\begin{Vmatrix}\dfrac{\beta b}{1-\alpha^2}\\ \dfrac{i\alpha\beta b}{1-\alpha^2}\end{Vmatrix}$$

обственные значения G различны, поэтому существует матрица H, такая, что $H^{-1}GH$ диагональна. Положим

$$\Phi=Hw,\qquad H=\begin{Vmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{Vmatrix},\qquad w=\begin{Vmatrix}w_1\\ w_2\end{Vmatrix}$$

$$w_1(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\omega_1(t)}{t-\zeta}dt,\qquad w_2(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R}^{R}\frac{\omega_2(t)}{t-\zeta}dt$$

Тогда двумерная задача сопряжения для Φ сводится к двум одномерным для w

$$w_1^+=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}w_1^-+\frac{\beta b}{2(1+\alpha)},\qquad w_2^+=\frac{1+\alpha}{1-\alpha}w_2^-+\frac{i\beta b}{2(1-\alpha)}\tag{3.2}$$

Так как $b(r)$ — полином, то решение задачи (3.2) можно построить в явном виде.

Для иллюстрации рассмотрим штамп с плоским основанием ($f(r)=b_0$). Пользуясь методами, развитыми в [10], получаем

$$w_1=\frac{\beta b_0}{2\pi\alpha}[1-X_1(\zeta)],\qquad w_2=-\frac{i\beta b_0}{2\pi\alpha}[1-X_2(\zeta)]$$

$$X_1=\left(\frac{\zeta-R}{\zeta+R}\right)^{ia},\qquad X_2=\left(\frac{\zeta-R}{\zeta+R}\right)^{-ia},\qquad a=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

Вычисляя скачки, по формулам Сохоцкого — Племеля находим ω_1, ω_2, φ_1, φ_2

$$\omega_1=Ax_1(t)=Ae^{ia_*},\quad \omega_2=iAx_2(t)=iAe^{-ia_*}\tag{3.3}$$

$$\varphi_1=2A\cos a_*,\quad \varphi_2=2A\sin a_*$$

$$\left(A=\frac{\beta b_0}{\pi\sqrt{1-\alpha^2}},\quad a_*=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\ln\frac{R-t}{R+t}\right)$$

что совпадает с результатами в [3, 6].

4. Будем предполагать, что $\Lambda(x)\equiv M(x)$. Используя точное решение (3.3), проведем регуляризацию системы (2.7).

Для упрощения выкладок сведем (2.7) заменой $\varphi = H\omega$ к системе

$$\omega_1(r) + \frac{\alpha}{\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{\omega_1(t)}{t-r}dt = \frac{\beta b_0}{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}H_{11}(t,r)\,\omega_1(t)\,dt + \frac{i}{2\pi}\int_{-R}^{R}H_{12}(t,r)\,\omega_2(t)\,dt \tag{4.1}$$

$$\omega_2(r) - \frac{\alpha}{\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{\omega_2(t)}{t-r}dt = \frac{i\beta b_0}{\pi} + \frac{i}{2\pi}\int_{-R}^{R}H_{21}(t,r)\,\omega_1(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}H_{22}(t,r)\,\omega_2(t)\,dt$$

Ядра H_{ij} связаны с K_{ij} соотношениями

$$\begin{aligned} H_{11} &= K_{11} + K_{22} + i\alpha\,(K_{21} - K_{12}) \\ H_{12} &= K_{22} - K_{11} - i\alpha\,(K_{12} + K_{21}) \\ H_{21} &= K_{11} - K_{22} - i\alpha\,(K_{12} + K_{21}) \\ H_{22} &= K_{11} + K_{22} - i\alpha\,(K_{21} - K_{12}) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Регуляризуя (4.1) по Н. П. Векуа [1], получаем

$$\omega_1(r) = Ax_1(r) + \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}h_{11}(t,r)\,\omega_1(t)\,dt + \frac{i}{2\pi}\int_{-R}^{R}h_{12}(t,r)\,\omega_2(t)\,dt \tag{4.3}$$

$$\omega_2(r) = iAx_2(r) + \frac{i}{2\pi}\int_{-R}^{R}h_{21}(t,r)\,\omega_1(t)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}h_{22}(t,r)\,\omega_2(t)\,dt$$

$$(h_{ij} = w_{ij}^{+} - w_{ij}^{-})$$

Функции w_{ij} введены соотношениями

$$w_{1n} = \frac{X_1(\zeta)}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{H_{1n}(t,\tau)}{(1+\alpha)\,X_1^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-\zeta} \tag{4.4}$$

$$w_{2n} = \frac{X_2(\zeta)}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{H_{2n}(t,\tau)}{(1-\alpha)\,X_2^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-\zeta}$$

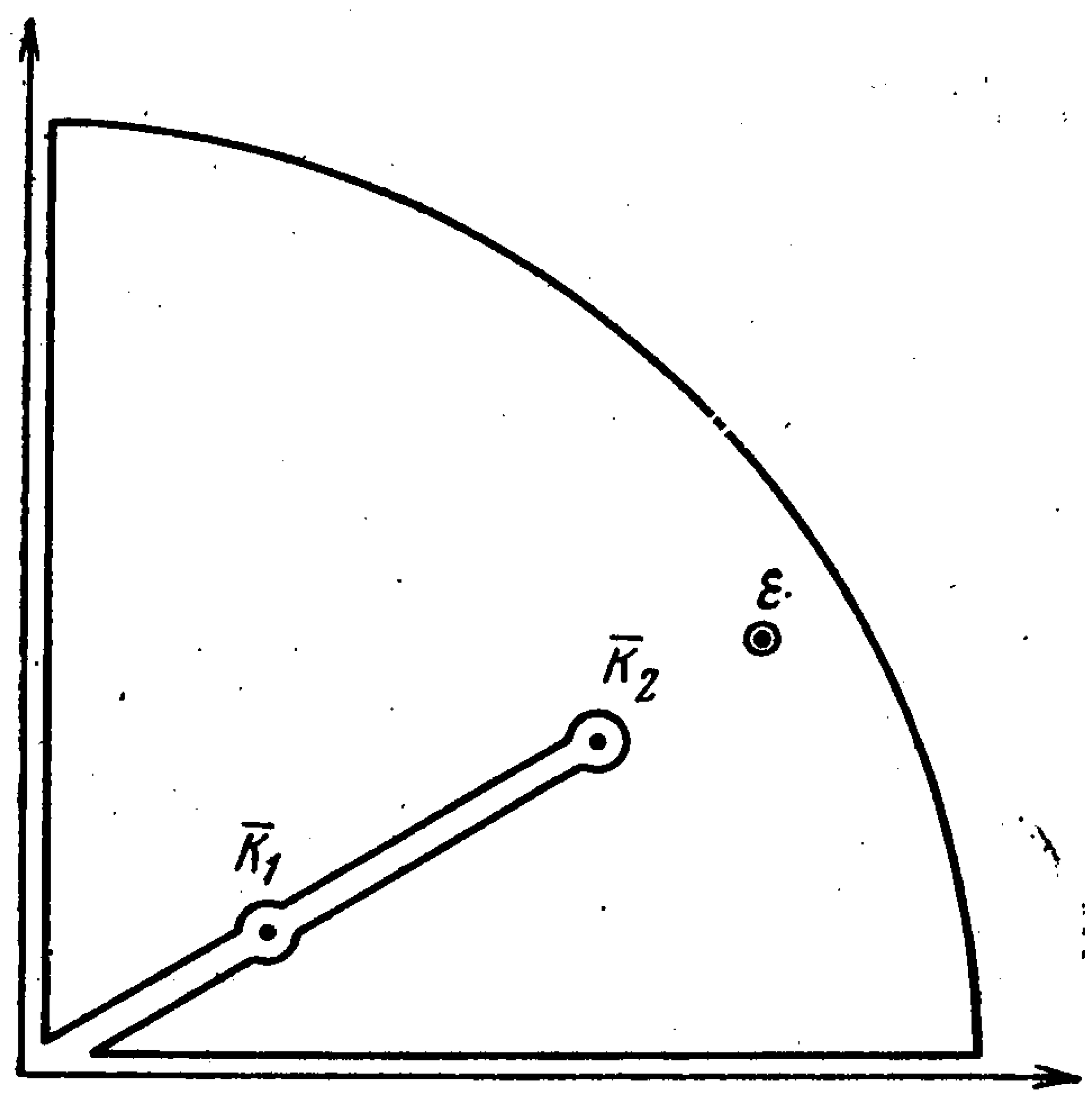
$$(n = 1, 2)$$

Система уравнений (4.3) представляет собой квазирегулярную систему уравнений Фредгольма второго рода.

Построим решение (4.3) в предположении малости параметра $\theta = kR$. Можно показать, что ядра K_{12}, K_{21}, K_{22} имеют более высокий порядок по сравнению с θ. Для оценки K_{11} воспользуемся следующими соображениями. Если $\operatorname{Re}\,(s^2 - k_{1,2}^2)^{1/2} \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\,(s^2 - \bar{k}_{1,2}^2)^{1/2} \geqslant 0$, то

$$\operatorname{Re} K_{11} = \frac{1}{4}\operatorname{Re}\int_0^\infty [2 - g_{11}(k_1, k_2, s) - g_{11}(\bar{k}_1, \bar{k}_2, s)]\,(e^{i|t-r|s} + e^{i|t+r|s})\,ds$$

Подынтегральная функция имеет в первом квадранте полюс первого порядка и точки ветвления $\bar{k}_1, \bar{k}_2$. На мнимой оси она принимает вещественные значения.



Взяв контур интегрирования, указанный на фигуре, и пользуясь оценкой $|1 - g_{11}| < c(\omega)s^{-2}$, получаем, что вещественная часть ядра K_{11} равна вещественной части суммы вычета, умноженного на $2\pi i$, и интегралов по берегам разреза. Удерживая в этой сумме величины первого порядка, получаем

$$\operatorname{Re} K_{11} = \frac{1}{2R}\beta h(\alpha)\operatorname{Re}(-i\bar{\theta}), \quad h(\alpha) = \pi \operatorname{res}_\varepsilon\left(\frac{\bar{k}ps}{D}\right) +$$

$$+ \int_0^{\sqrt{\alpha}} \frac{\xi\sqrt{\alpha - \xi^2}\,d\xi}{\xi^2\sqrt{(\alpha - \xi^2)(1 - \xi^2)} + (\xi^2 - 1/2)^2} + \int_{\sqrt{\alpha}}^1 \frac{\xi^3(\xi^2 - \alpha)\sqrt{1 - \xi^2}\,d\xi}{\xi^4(\xi^2 - \alpha)(1 - \xi^2) + (\xi^2 - 1/2)^4}$$

Аналогичным образом получим

$$\operatorname{Im} K_{11} = \frac{1}{2R}\beta h(\alpha)\operatorname{Im}(i\bar{\theta})$$

так что

$$K_{11} = \frac{1}{2R}\beta h(\alpha) i\theta$$

Подставляя найденную оценку в (4.2) и (4.4), получаем

$$h_{11} = -h_{12} = \frac{\beta h(\alpha) i\theta}{2R\sqrt{1 - \alpha^2}} x_1(r), \quad h_{21} = h_{22} = \frac{\beta h(\alpha) i\theta}{2R\sqrt{1 - \alpha^2}} x_2(r) \tag{4.5}$$

Применим к (4.3) метод последовательных приближений. В качестве нулевого приближения возьмем статическое решение (3.3)

$$\omega_1(r) = Ax_1(r), \quad \omega_2(r) = iAx_2(r)$$

С помощью оценок (4.5) получаем решение системы (4.3) в первом приближении $\omega_1(r) = A_* x_1(r)$, $\omega_2(r) = iA_* x_2(r)$ $(A_* = 1 + a\gamma h(\alpha) i\theta)$

Решение (2.7) в первом приближении имеет вид

$$\varphi_1(r) = 2A_* \cos\left(a \ln \frac{R - r}{R + r}\right), \qquad \varphi_2(r) = 2A_* \sin\left(a \ln \frac{R - r}{R + r}\right)$$

5. Методами интегрирования многозначных функций находим реакцию полупространства (в случае статики $\theta = 0$).

$$P = 2\pi \int_0^R \sigma_z(r, 0) r\,dr = 2\pi\mu_* \int_{-R}^R \varphi_1(t)\,dt =$$

$$= 4(\lambda_* + \mu_*)[1 + a\gamma h(\alpha) i\theta] \ln\left(\frac{\lambda_* + 3\mu_*}{\lambda_* + \mu_*}\right) b_0 R$$

Исследуем поведение напряжений у края штампа. Заметим, что в силу свойств $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ соотношения (2.2) можно представить в виде

$$\frac{1}{2\mu_*}\sigma_z = \frac{\varphi_1(r)}{\sqrt{R^2-r^2}} - \int\limits_r^R \frac{t\,[\varphi_1(t)-\varphi_1(r)]}{(t^2-r^2)^{3/2}}\,dt$$

$$\frac{1}{2\mu_*}\tau_{rz} = \frac{\varphi_2(r)}{\sqrt{R^2-r^2}} - \int\limits_r^R \frac{r\,\varphi_2(t)-t\varphi_2(r)}{(t^2-r^2)^{3/2}}\,dt$$

Положим $t = R\,\mathrm{th}\,{}^1/_2\,\xi$, $r = R\,\mathrm{th}\,{}^1/_2\,x$, так что

$$\frac{1}{2\mu_*}\sigma_z = 2A\,\mathrm{ch}\frac{x}{2}\,[\cos(ax)+\varphi(x)], \qquad \varphi(x) = \int\limits_x^\infty \frac{\psi_1(\xi,x)}{\psi_2(\xi,x)}\,d\xi$$

$$\psi_1 = \mathrm{th}\frac{\xi}{2}\sin\left(a\frac{\xi-x}{2}\right)\sin\left(a\frac{\xi+x}{2}\right)\left(\mathrm{c}\ \frac{x}{2}\right)^{1/2}$$

$$\psi_2 = \left(\mathrm{th}\frac{x}{2}+\mathrm{th}\frac{\xi}{2}\right)^{3/2}\left(\mathrm{sh}\frac{\xi-x}{2}\right)^{3/2}\left(\mathrm{ch}\frac{\xi}{2}\right)^{1/2}$$

Справедливы оценки

$$\left|\frac{\psi_1}{\psi_2}\right| < \frac{|a|}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right)^{-3/2}\left(\mathrm{sh}\frac{\xi-x}{2}\right)^{-1/2}$$

$$|\varphi(x)| < \frac{|a|}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right)^{-3/2}\int\limits_0^\infty(\mathrm{sh}\,u)^{-1/2}\,du < \frac{2\ln 3}{\pi}\left(\mathrm{th}\frac{x}{2}\right)^{-3/2}$$

поэтому $\varphi(x)$ — непрерывная функция и, начиная с некоторого x, $|\varphi(x)| < 1$. Следовательно, уравнение $\cos(ax) + \varphi(x) = 0$ имеет бесконечное число нулей и напряжение σ_z осциллирует у края штампа. Аналогично доказывается осцилляция τ_{rz}. Очевидно, что такое же явление, по крайней мере для малых частот колебаний, имеет место и в динамике.

Следует отметить, что развитый выше метод применим для произвольных Λ и M. Однако структура $h(\alpha)$ в общем случае будет значительно сложней. В частном случае упругой среды α и θ принимают лишь вещественные положительные значения.

В заключение автор благодарит Л. А. Галина за внимание к работе.

Поступила 20 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М., «Наука», 1970.
2. *Абрамов В. М.* Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. Докл. АН СССР, 1937, т. 17, № 4.
3. *Моссаковский В. И.* Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
4. *Уфлянд Я. С.* Контактная задача теории упругости для кругового в плане штампа при наличии сцепления. ПММ, 1956, т. 20, вып. 5.
5. *Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* О симметричном давлении круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления. ПММ, 1966, т. 30, вып 1.
6. *Keer L. M.* Mixed boundary-value problems for an elastic half-space. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1967, vol. 63, No. 4.
7. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований, т. 2. М., «Наука», 1970.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., «Наука», 1966.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.