Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Г. А. Брусиловская, Л. В. Ершов

(Москва)

Приводится решение динамической осесимметричной задачи теории упругости для цилиндра произвольной длины с заданными смещениями на его криволинейных и плоских поверхностях. Введением некоторых вспомогательных функций исходные несамосопряженные уравнения преобразуются к эквивалентным уравнениям первого порядка для расширенного собственного вектора. При помощи этих собственных векторов произвольные перемещения, заданные на плоском торце цилиндра, разлагаются в ряды по собственным решениям задачи. Получены конечные формулы для коэффициентов разложения. Как частный случай, при $\omega \to 0$ следует решение задачи статики цилиндра [1].

Аналогичная задача рассматривалась в [2], где она сводилась к решению бесконечных систем уравнений. Численный метод решения задач подобного класса изложен в работе [3].

1. Будем исходить из дифференциальных уравнений в перемещениях

$$v_1^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+v_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+ (v_2^2-v_1^2)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial z}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{1.1}$$

$$v_2^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r^2}\right)+v_1^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(v_2^2-v_1^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial r}-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

$$v_1^2=\frac{\mu}{\rho},\qquad v_2^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho}$$

Пусть граничные условия имеют вид

$$u(r,z,t)\big|_{r=a}=\varphi_1(z)\,e^{i\omega t},\qquad w(r,z,t)\big|_{r=a}=\varphi_2(z)\,e^{i\omega t} \tag{1.2}$$

$$u(r,z,t)\big|_{z=0}=g_1(r)\,e^{i\omega t},\qquad u(r,z,t)\big|_{z=l}=f_1(r)\,e^{i\omega t} \tag{1.3}$$

$$w(r,z,t)\big|_{z=0}=g_2(r)\,e^{i\omega t},\qquad w(r,z,t)\big|_{z=l}=f_2(r)\,e^{i\omega t}$$

Здесь λ, μ — постоянные Ляме, ρ — плотность материала, u, w — продольное и радиальное перемещения соответственно, l — длина, a — радиус цилиндра, ω — частота вынуждающей силы. Предполагается, что частота вынуждающей силы не совпадает с какой-либо собственной частотой ци-

[цил]индра, а в условиях (1.2), (1.3) выполнены следующие соотношения:

$$\varphi_1(z)|_{z=0} = g_1(r)|_{r=a}, \qquad \varphi_2(z)|_{z=0} = g_2(r)|_{r=a}$$
$$\varphi_1(z)|_{z=l} = f_1(r)|_{r=a}, \qquad \varphi_2(z)|_{z=l} = f_2(r)|_{r=a}$$

Перемещения u и w будем искать в виде сумм решений уравнений (1.1) [д]ля бесконечного цилиндра с известными перемещениями (1.2) на боковой [п]оверхности (см. п. 2) и для полубесконечного цилиндра с нулевыми смещениями на боковой поверхности и известными смещениями (1.3) на его [п]лоском торце (см. п. 3). Наложение решений позволяет рассматривать [о]бщую задачу для упругого цилиндра произвольной длины с заданными [с]мещениями вида (1.2) и (1.3) на его боковых поверхностях. Определив перемещения, по известным формулам можно найти деформации, а на осно[в]ании закона упругого деформирования — напряжения. В тексте их вы[р]ажения опущены.

2. Для бесконечно длинного цилиндра при наличии краевых условий (1.2) решение (1.1) примем в виде

$$u_1(r, z, t) = u_1(r)\sin(\beta_n z)\, e^{i\omega t}$$
$$w_1(r, z, t) = w_1(r)\cos(\beta_n z)\, e^{i\omega t}, \quad \beta_n = n\pi/l \tag{2.1}$$

Подставляя (2.1) в (1.1), получим систему обыкновенных дифференци[а]льных уравнений для функций $u_1(r)$ и $w_1(r)$

$$v_1^2\left(u_1'' + \frac{1}{r}u_1'\right) - \beta_n^2 v_2^2 u_1 - \beta_n(v_2^2 - v_1^2)\left(w_1' + \frac{1}{r}w_1\right) + \\ + w^2 u_1 = 0 \tag{2.2}$$
$$v_2^2\left(w_1'' + \frac{1}{r}w_1' - \frac{w_1}{r^2}\right) - \beta_n^2 v_1^2 w_1 + \beta_n(v_2^2 - v_1^2)u_1' + \omega^2 w_1 = 0$$

Отсюда для каждой гармоники ($n = 1, 2, 3\ldots$) решение системы (2.2) [з]апишем следующим образом:

$$u_{1n}(r) = A_n\beta_n I_0(\gamma_{1n}r) + B_n\frac{\beta_n v_1^2}{a\omega^2(k-1)}[\beta_n I_0(\gamma_{1n}r) - \gamma_{2n}I_0(\gamma_{2n}r)]$$
$$w_{1n}(r) = A_n\gamma_{1n}I_1(\gamma_{1n}r) + B_n\frac{\beta_n v_1^2}{a\omega^2(k-1)}[\gamma_{1n}I_1(\gamma_{1n}r) - \beta_n I_1(\gamma_{2n}r)]$$
$$\gamma_{1n}^2 = \beta_n^2 - \frac{\omega^2}{v_2^2}, \qquad \gamma_{2n}^2 = \beta_n^2 - \frac{\omega^2}{v_1^2}, \qquad k = \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

где A_n, B_n — непрерывны по ω, $I_0(x)$, $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя. Полагая далее $l\omega < \pi v_1$, определим постоянные A_n и B_n из краевых условий (1.2).

Решение (1.1), соответствующее $\beta_n = 0$, может быть получено непосредственным решением уравнений (2.2), постоянные интегрирования определяются аналогично A_n и B_n. Сумма получающихся решений даст искомое решение о перемещениях бесконечно длинного цилиндра при наличии краевых условий (1.2).

Отметим, что решение уравнений (1.1) удобно принять в виде (2.1) при условии, что $\varphi_1(z)$ является нечетной, а $\varphi_2(z)$ — четной функциями. Чтобы иметь возможность разложить любые граничные значения перемещений, необходимо к соотношениям (2.1) добавить эквивалентные соотношения, получающиеся взаимной перестановкой синусов и косинусов.

3. Рассмотрим полубесконечный цилиндр, на криволинейных поверхностях которого перемещения равны нулю, а на плоском торце заданы первые два условия (1.3).

Решение исходной системы уравнений (1.1) будем искать в виде

$$u_2(r, z, t) = u_2(r)\, e^{-\alpha z/a}\, e^{i\omega t} \tag{3.1}$$
$$w_2(r, z, t) = w_2(r)\, e^{-\alpha z/a}\, e^{i\omega t}$$

Подставляя (3.1) в (1.1) и решая систему, аналогичную (2.2) для функций $u_2(r)$ и $w_2(r)$, имеем:

$$u_2(r) = C\alpha J_0(\delta_1 r) + D\frac{\alpha v_1^2}{a\omega^2(k-1)}\left[\frac{\alpha}{a} J_0(\delta_1 r) - \delta_2 J_0(\delta_2 r)\right] \tag{3.2}$$
$$w_2(r) = C\delta_1 a J_1(\delta_1 r) + D\frac{\alpha v_1^2}{a\omega^2(k-1)}\left[\delta_1 J_1(\delta_1 r) - \frac{\alpha}{a} J_1(\delta_2 r)\right]$$
$$\delta_1^2 = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\omega^2}{v_2^2}, \qquad \delta_2^2 = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\omega^2}{v_1^2}$$

Параметр α является собственным значением и определяется из однородных краевых условий на криволинейной поверхности, которые могут быть записаны следующим образом: $u_2(a, z, t) \equiv 0$, $w_2(a, z, t) \equiv 0$, или с учетом (3.1) и (3.2)

$$C\alpha J_0(\delta_1 a) + D\frac{\alpha v_1^2}{a\omega^2(k-1)}\left[\frac{\alpha}{a} J_0(\delta_1 a) - \delta_2 J_0(\delta_2 a)\right] = 0 \tag{3.3}$$
$$C\delta_1 a J_1(\delta_1 a) + D\frac{\alpha v_1^2}{a\omega^2(k-1)}\left[\delta_1 J_1(\delta_1 a) - \frac{\alpha}{a} J_1(\delta_2 a)\right] = 0$$

Отсюда следует характеристическое уравнение для определения собственных значений α

$$\frac{\alpha^2}{a^2} J_0(\delta_1 a) J_1(\delta_2 a) - \delta_1\delta_2 J_0(\delta_2 a) J_1(\delta_1 a) = 0 \quad (\text{при } \omega \neq 0) \tag{3.4}$$

$$\alpha J_0^2(\alpha) - \frac{2}{1-k} J_0(\alpha) J_1(\alpha) + \alpha J_1^2(\alpha) = 0 \quad (\text{при } \omega = 0) \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) совпадает с характеристическим уравнением работы [1], полученным в задаче статики упругого цилиндра.

Трансцендентное уравнение (3.4), содержащее параметр α в аргументах функций Бесселя и вне их, имеет бесконечное счетное множество корней α_n $(n = 1,2,3,\ldots)$.

Следует отметить, что для цилиндра, параметры которого удовлетворяют неравенству $2a \leqslant l$, $\alpha = 0$ не является корнем уравнения (3.4). Проведенные исследования показывают, что кроме

$$\alpha_{1,2} \approx \pm\sqrt{4k - \frac{\omega^2 a^2}{v_2^2}} \quad (\text{первое приближение})$$
$$\alpha_{3,4} = \pm\frac{\omega a}{v_1} i$$

все корни трансцендентного уравнения (3.4) будут комплексно-сопряж ными, группирующимися по четыре

$$\alpha = \pm c_1 \pm d_1 i$$

Заметим, что собственное значение $\alpha = \pm(\omega a/v_1)\, i$ отвечает тривиальному решению.

Представляют интерес только корни с положительными вещественными частями, так как они обеспечивают затухание при увеличении z.

Для каждого такого α_n из второго уравнения (3.3) имеем

$$\frac{C_n}{D_n} = \frac{\alpha_n v_1^2}{a^2\omega^2(1-k)}\left[1 - \frac{\alpha_n}{a\delta_{1n}}\frac{J_1(\delta_{2n}a)}{J_1(\delta_{1n}a)}\right] \tag{3.6}$$

и решения (3.2) принимают вид

$$u_{2n}(r) = \frac{\alpha_n v_1^2}{a\omega^2(1-k)}\left[-\frac{\alpha_n^2 J_1(\delta_{2n}a)}{a^2\delta_{1n}J_1(\delta_{1n}a)}J_0'(\delta_{1n}r) + \delta_{2n}J_0(\delta_{2n}r)\right] \tag{3.7}$$

$$w_{2n}(r) = \frac{\alpha_n v_1^2}{a\omega^2(1-k)}\left[-\frac{\alpha_n J_1(\delta_{2n}a)}{aJ_1(\delta_{1n}a)}J_1(\delta_{1n}r) + \frac{\alpha_n}{a}J_1(\delta_{2n}r)\right]$$

Суммируя по всем значениям α_n, представим решение (3.1) в виде бесконечных рядов, содержащих неизвестные постоянные d_n

$$u_2(r,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n u_{2n}(r)\exp\left(-\frac{\alpha_n z}{a}\right)\exp(i\omega t) \tag{3.8}$$

$$w_2(r,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n w_{2n}(r)\exp\left(-\frac{\alpha_n z}{a}\right)\exp(i\omega t)$$

Подставляя (3.8) в первые два условия (1.3), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n u_{2n}(r) = g_1(r), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} d_n w_{2n}(r) = g_2(r) \tag{3.9}$$

Для определения неизвестных постоянных d_n запишем исходную систему (1.1) с учетом (3.1) в матричной форме

$$[r\xi'(r)]' = \alpha L_1\xi'(r) + \alpha^2 L_2\xi(r) + \alpha L_3\xi(r) + L_4\xi(r) \tag{3.10}$$

Здесь

$$\xi(r) = \left\|\begin{matrix} u_2(r) \\ w_2(r)\end{matrix}\right\|, \quad L_1 = \left\|\begin{matrix} 0 & \left(\frac{1}{k}-1\right)\frac{r}{a} \\ (1-k)\frac{r}{a} & 0\end{matrix}\right\|$$

$$L_2 = \left\|\begin{matrix} -\frac{1}{k}\frac{r}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{kr}{a^2}\end{matrix}\right\|, \quad L_3 = \left\|\begin{matrix} 0 & \frac{1}{a}\left(\frac{1}{k}-1\right) \\ 0 & 0\end{matrix}\right\|$$

$$L_4 = \left\|\begin{matrix} -\frac{\omega^2}{v_1^2}r & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} - \frac{\omega^2}{v_2^2}r\end{matrix}\right\|$$

Краевые условия для $\xi(r)$ имеют вид $\xi(a) = 0$.

Введением вспомогательного вектора [1]

$$\eta(r) = \left\| \begin{matrix} p(r) \\ q(r) \end{matrix} \right\|$$

содержащего две функции $p(r)$ и $q(r)$, связанные с функциями $u_2(r)$ и $w_2(r)$, исключим вторую производную из уравнения (3.10) и, таким образом, получим уравнение для расширенного вектора

$$ry' = Ay + \alpha By \tag{3.11}$$

при следующих краевых условиях:

$$My(a) = 0$$

Здесь

$$\mathbf{y}(r) = \left\| \begin{matrix} u_2(r) \\ w_2(r) \\ p(r) \\ q(r) \end{matrix} \right\|, \quad A = \left\| \begin{matrix} P_0 & 0 \\ R_0 & S_0 \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} P_1 & Q_1 \\ R_1 & S_1 \end{matrix} \right\|, \quad M = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$P_0 = \left\| \begin{matrix} \psi_1(r,\omega) & 0 \\ 0 & \psi_2(r,\omega) \end{matrix} \right\|, \quad R_0 = \left\| \begin{matrix} 0 & \psi_4(r,\omega) \\ \dfrac{1-k}{ak} r\psi_1(r,\omega) & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$S_0 = \left\| \begin{matrix} -\psi_1(r,\omega) & 0 \\ 0 & -\psi_2(r,\omega) \end{matrix} \right\|$$

$$P_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & \psi_3(r,\omega) \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad Q_1 = \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{matrix} \right\|, \quad R_1 = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{r^2}{a^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1-k}{ak} r\psi_3(r,\omega) - \dfrac{r^2}{a^2} \end{matrix} \right\|$$

$$S_1 = \left\| \begin{matrix} 0 & \dfrac{k(1-k)}{a} r - k^2\psi_3(r,\omega) \\ \dfrac{1-k}{ak^2} r & 0 \end{matrix} \right\|$$

Функции $\psi_1(r, \omega)$, $\psi_2(r, \omega)$, $\psi_3(r, \omega)$ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dr} + \frac{1}{r}\psi_1^2 + \frac{\omega^2}{v_1^2} r = 0, \qquad \psi_1(0, \omega_k) = 0$$

$$\frac{d\psi_2}{dr} + \frac{1}{r}\psi_2^2 - \frac{1}{r} + \frac{\omega^2}{v_2^2} r = 0, \qquad \psi_2(0, \omega_k) = 1$$

$$\frac{d\psi_3}{dr} + \frac{\psi_3}{r}(\psi_1 + \psi_2) = \frac{2(1-k)}{ak}, \qquad \psi_3(0, \omega_k) = 0$$

Функция $\psi_4(r, \omega)$ определяется по следующей формуле:

$$\psi_4(r,\omega) = \frac{1-k}{a} r[\psi_2(r,\omega) + 1] - \frac{2(1-k)}{a} r$$

При этом вспомогательный вектор $\eta(r)$ зависит от $\xi(r)$, α, ω

$$\eta(r) = \frac{r}{\alpha} Q_1^{-1}\xi'(r) - \frac{1}{\alpha} Q_1^{-1}P_0\xi(r) - Q_1^{-1}P_1\xi(r)$$

Краевая задача (3.11) является самосопряженной [4]. Матрица невы-
›жденного преобразования $\mathbf{z} = T\mathbf{y}$ имеет следующий вид:

$$T(r) = \frac{1}{r} T_1 = \frac{1}{r} \begin{Vmatrix} 0 & \chi(r,\omega) & \frac{1}{k} & 0 \\ -\chi(r,\omega) & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\chi(r, \omega) = \psi_3(r, \omega) - (1 - k)\, r/ak$$

Нетрудно убедиться, что для векторов y_m и y_n, соответствующих двум ıзличным собственным значениям α_m и α_n параметра α, справедливо сле- /ющее условие ортогональности:

$$.12) \qquad (\alpha_m - \alpha_n) \int_0^a \mathbf{y}_m{}^T Q \mathbf{y}_n dr = [\mathbf{y}_m{}^T T_1{}^T \mathbf{y}_n]_0^a = 0$$

Здесь $\mathbf{y}_m{}^T$ — транспонированный вектор $\mathbf{y}_m(r)$, соответствующий соб- 'венному значению α_m, Q — невырожденная матрица

$$B^T T = T^T B = Q = \begin{Vmatrix} \frac{r}{ka^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\chi}{r}\psi_3 + \frac{(1-k)\psi_3}{ak} - \frac{r}{a^2} & \frac{1}{rk}\psi_3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{rk}\psi_3 & \frac{1}{rk^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{r} \end{Vmatrix}$$

Пользуясь условием ортогональности (3.12), можно определить коэффициенты разложения произвольного вектора $\mathbf{y}_0(r)$ в ряд по векторам ı (r) на отрезке $[0, a]$. Пусть

$$\mathbf{y}_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \mathbf{y}_n(r)$$

Тогда из (3.12) следует

$$\text{ı.13)} \qquad d_n = \frac{1}{F_n} \int_0^a \mathbf{y}_n{}^T Q \mathbf{y}_0 dr$$

Здесь, на основании соотношений (3.2) и (3.7) F_n определяется по следующей формуле:

$$\text{ı.14)} \qquad F_n = \int_0^a \mathbf{y}_n{}^T Q \mathbf{y}_n dr = \frac{a}{\alpha_n} u_{2n}'(a) \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} u_2(a, \alpha)\right]_{\alpha=\alpha_n} -$$

$$- \frac{a}{k\alpha_n} w_{2n}'(a) \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} w_2(a, \alpha)\right]_{\alpha=\alpha_n}$$

Таким образом, введением вспомогательного вектора $\eta(r)$, постоянные в (3.9) могут быть определены по формулам (3.13) и (3.14).

4. В качестве примера рассмотрим деформацию полубесконечного ци линдра с нулевыми смещениями на криволинейной поверхности, а на торп $z = 0$ равными

$$u_2(r, 0, t) = r(1 - r/a)\, e^{i\omega t} \tag{4.1}$$
$$w_2(r, 0, t) = 0$$

Из (4.1) и (3.9) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n u_{2n}(r) = r\left(1 - \frac{r}{a}\right) \tag{4.2}$$

Положив $\eta_0(r) \equiv 0$, имеем

$$\int_0^a \mathbf{y}_n{}^T Q \mathbf{y}_0 dr = \int_0^a \frac{r^2}{ka^2}\left(1 - \frac{r}{a}\right) u_{2n}(r)\, dr \tag{4.3}$$

Подставляя в (4.3) выражение для $u_{2n}(r)$ из (3.6) и интегрируя, полу чим

$$\int_0^a \mathbf{y}_n{}^T Q \mathbf{y}_0 dr = \frac{\alpha_n V_1{}^2}{k(1-k)a^3\omega^2}\left[\frac{4}{\delta_{2n}^2} j_{12} - \frac{a}{\delta_{2n}} j_{02} - \frac{1}{\delta_{2n}}\int_0^a J_0(\delta_{2n} r)\, dr - \right. \tag{4.4}$$
$$\left. - \frac{\alpha_n{}^2 j_{12}}{a^2 \delta_{1n} j_{11}}\left(\frac{4}{\delta_{1n}^3} j_{11} - \frac{a}{\delta_{1n}^2} j_{01} - \frac{1}{\delta_{1n}^2}\int_0^a J_0(\delta_{1n} r)\, dr\right)\right]$$

Далее, используя (3.14), определим F_n

$$F_n = \frac{j_{12}}{a(1-k)^2}\left[\frac{2}{\delta_{2n}} j_{02} + \frac{\alpha_n{}^2 k}{a\delta_{1n}^2} j_{12} - \frac{\alpha_n{}^2}{a\delta_{1n}\delta_{2n}} \frac{j_{01} j_{02}}{j_{11}}\right] \tag{4.5}$$

(4.4) и (4.5) принято $j_{ik} = J_i(\delta_{kn} a)$.

Можно убедиться, что при $\omega_k = 0$ имеем

$$\psi_1(r, 0) = \psi_4(r, 0) = \chi(r, 0) = 0, \quad \psi_2(r, 0) = 1, \quad \psi_3(r, 0) = $$
$$= r(1 - k)/ak$$

и, переходя к пределу при $\omega \to 0$ в (3.2) или в (4.4) и (4.5), получаем реше ние задачи статики цилиндра [1].

Поступила 16 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Flugge W., Kelkar V. S.* The problem of an elastic circular cylinder. Internat. J. o Solids and Structures, 1968, vol. 4, No. 4. (Рус. перев.: Задача об упругом кру говом цилиндре. Механика. Период. сб. перев. иностр. ст., 1970, № 2.)
2. *Головин О. А.* О вынужденных продольных колебаниях цилиндра. Изв. АН АрмССР. Механика, 1970, т. 23, № 3.
3. *Сабодаш П. Ф., Чередниченко Р. А.* Применение метода пространственных характеристик к решению осесимметричных задач по распространению упругих волн. Ж. прикл. мех. и техн. физ., 1971, № 4.
4. *Bliss G. A.* A boundary value problem for a system of ordinary linear differential equations of the first order. Trans. Amer. Math. Soc., 1926, vol. 28, No 4.
5. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., «Наука», 1964.