Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСЫ

В. В. Копасенко

(Ростов-на-Дону)

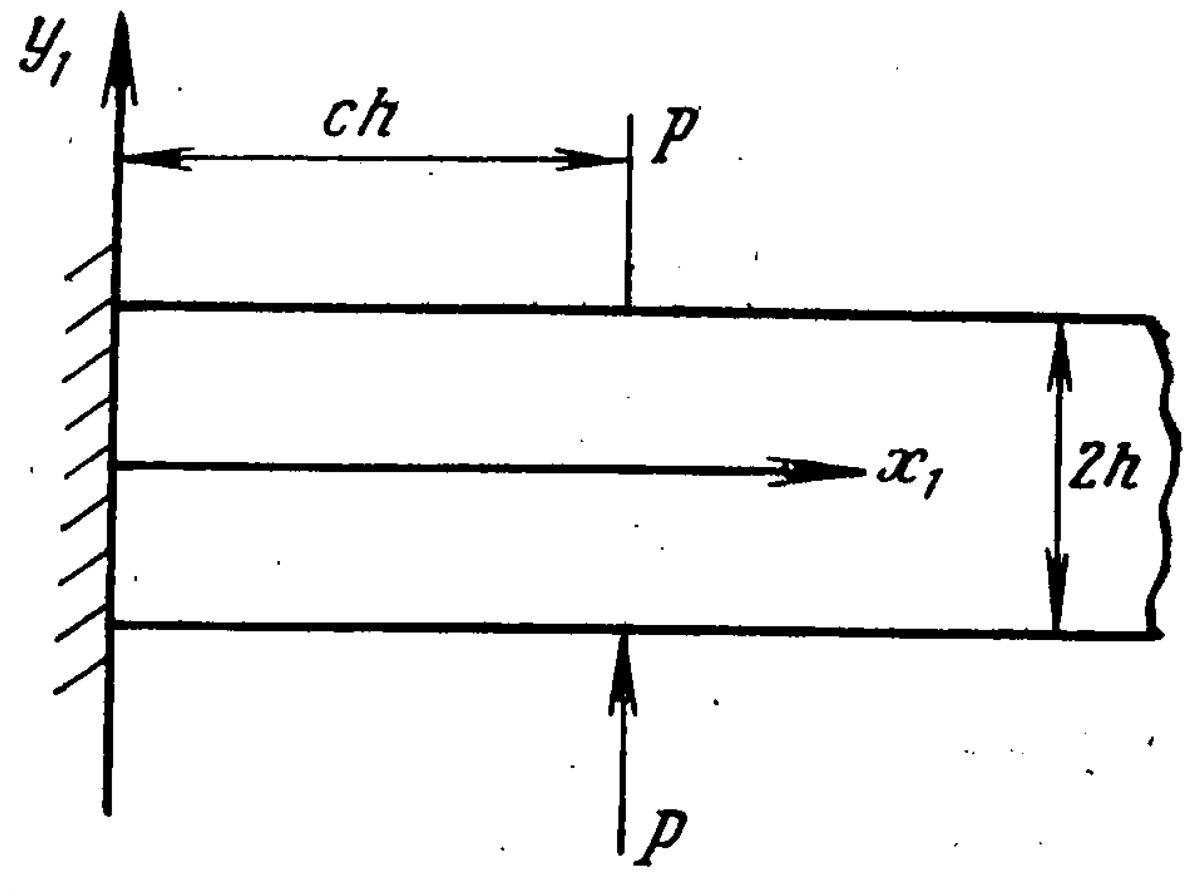
Исследуется алгебраическая система уравнений бесконечного порядка, возникающая при решении задачи теории упругости о симметрично нагруженной полуполосе, заделанной по торцу. Для решения системы предлагается использовать метод итераций. Предварительно из матрицы системы выделяется матрица, характеризующая поведение решения при больших значениях индекса неизвестного. Доказывается и подтверждается на конкретных примерах, что решение основной системы мало отличается от решения упрощенной системы. Для решения упрощенной системы в случае больших значений индекса неизвестного получено асимптотическое разложение. Для него указан способ приближенного определения коэффициентов.

Бесконечная алгебраическая система уравнений для полуполосы со свободными от напряжений продольными гранями, на торце которой заданы перемещения, была рассмотрена в работе [1]. Там было доказано, что эта система вполне регулярная. Ранее, в работе [2] при решении осесимметричной пространственной задачи для жестко защемленной плиты характер поведения решения при больших значениях индекса неизвестного был выявлен иным путем. При решении конкретных задач учитывался лишь первый член асимптотики.

1. Рассмотрим симметричную задачу для полуполосы при следующих граничных условиях [3]:

$$x = 0, \quad u = 0, \quad v = 0 \tag{1.1}$$

$$y = 1, \quad \sigma_{y_1} = -P\delta(x - c) / h, \quad \tau_{x_1y_1} = 0 \tag{1.2}$$



Здесь u, v — перемещения вдоль осей x_1 и y_1 соответственно, ($x_1 = xh$, $y_1 = yh$), а $\tau_{x_1y_1}$, σ_{y_1} — касательное и нормальное напряжения (фигура).

Для решения задачи используем основные соотношения плоской теории упругости в перемещениях [3]. Представим u, v в виде наложения решений двух вспомогательных задач:

1) задачи для полуполосы с граничными условиями ($\psi(x)$ — неизвестная функция)

$$x = 0, \quad v(y) = 0, \quad \sigma_{x_1} = 0, \quad |y| < 1$$

$$y = 1, \quad \tau_{x_1y_1} = 0, \quad \partial u / \partial y = \psi(x), \qquad 0 < x < \infty$$

2) задачи для полуполосы, периодически продолженной в область $|y| > 1$, с граничными условиями

$$x = 0,\ \sigma_{x_1}(y) = \sigma(y),\ v(y) = 0$$
$$y = 1,\ \tau_{x_1 y_1} = 0,\ \partial u / \partial y = 0$$

Здесь $\psi(x)$ и $\sigma(y)$ таковы, что для общей задачи имеют место граничные условия (1.1), (1.2).

Решение задачи 1) дается следующими соотношениями:

$$u_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[(A_1 \operatorname{ch}\lambda y + A_2 \lambda y \operatorname{sh}\lambda y)\cos\lambda x + \frac{\psi_0(\lambda)(\nu-1)}{\lambda^2(\nu+1)}\right] d\lambda + C_1 \tag{1.3}$$

$$v_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (B_1 \operatorname{sh}\lambda y + A_2 \lambda y \operatorname{ch}\lambda y)\sin\lambda x\, d\lambda$$

$$A_1 = B_1 - \theta\frac{\nu+2}{2}, \qquad B_1 = -\frac{\psi_0(\lambda)}{\lambda \operatorname{sh}\lambda} + \nu\theta\frac{\lambda \operatorname{ch}\lambda}{2\operatorname{sh}\lambda}$$

$$\theta = \frac{-2\psi_0(\lambda)}{(\nu+1)\lambda\operatorname{sh}\lambda}, \qquad A_2 = -\frac{\nu\theta}{2}, \qquad \nu = \frac{1}{1-2\mu}$$

$$\sigma_{y_1} = -\int_0^\infty \frac{\psi_0(\lambda)\,\Delta_+ 2\nu G \sin\lambda x}{h\pi(\nu+1)\operatorname{sh}^2\lambda}\, d\lambda$$

$$\Delta_+ = \operatorname{sh}2\lambda + 2\lambda, \qquad \psi_0(\lambda) = \int_0^\infty \psi(t)\cos\lambda t\, dt$$

Решение задачи 2)

$$u_2 = C_2 + 2\sum_{n=1}^\infty u_n^\circ(x)\cos\omega_n y, \qquad \omega_n = \pi n \tag{1.4}$$

$$v_2 = 2\sum_{n=1}^\infty v_n^\circ(x)\sin\omega_n y$$

$$u_n^\circ(x) = -\exp(-\omega_n x)\frac{(\nu+2+\nu\omega_n x)h\sigma_n}{2(\nu+1)\omega_n G}$$

$$v_n^\circ(x) = -\exp(-\omega_n x)\frac{\nu x h\sigma_n}{2(\nu+1)\omega_n G}$$

$$\sigma_n = \int_0^1 \sigma(t)\cos\omega_n t\, dt$$

$$\sigma_{y_1} = 2\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \exp(-\omega_n x)\sigma_n\frac{(\nu-1-\nu\omega_n x)}{(\nu+1)}$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные, μ — коэффициент Пуассона, G — модуль кручения.

Из формул (1.3), (1.4) видно, что решение задачи, полученной наложением решений задач 1) и 2), удовлетворяет граничным условиям

$$x = 0,\ \sigma_{x_1} = \sigma(y),\ v(y) = 0$$
$$y = 1,\ \tau_{x_1 y_1} = 0$$

Далее выбираем $\psi(x)$ так, чтобы удовлетворялось условие (1.2) для нормального напряжения. Подставим σ_{y_1} из (1.3), (1.4) в (1.2) и применим синус-преобразование Фурье к полученному соотношению. В результате имеем

$$(1.5)\qquad -\frac{\psi_0(\lambda)\,\nu\Delta_+}{(\nu+1)\,\mathrm{sh}^2\lambda}-2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{h\sigma_m\lambda\varphi_m(\lambda)}{(\nu+1)\,G}=$$

$$=\frac{h}{G}\int_0^\infty\sigma_{y_1}(t)\Big|_{y=1}\sin\lambda t\,dt=-\frac{P\sin\lambda c}{G}$$

$$\varphi_m(\lambda)=[(\nu+1)\,\omega_m^2-(\nu-1)\,\lambda^2]\,/\,(\omega_m^2+\lambda^2)^2$$

Функцию $\sigma(y)$ определим так, чтобы удовлетворялось граничное условие (1.1) для продольного перемещения. Для этого подставим (1.3), (1.4) в (1.1) и к полученному соотношению применим конечное косинус-преобразование Фурье по переменной y. Тогда

$$(1.6)\qquad \sigma_k=\frac{4G(-1)^k}{\pi(\nu+2)\,h}\int_0^\infty\psi_0(\lambda)\,\omega_k\varphi_k(\lambda)\,d\lambda$$

$$C_1+C_2=0,\qquad k=0$$

Учтем зависимость между $\psi_0(\lambda)$ и $\psi(t)$ в (1.3) и преобразуем соотношение (1.6) к следующему виду:

$$(1.7)\qquad \sigma_k=\frac{2G(-1)^k}{(\nu+2)\,h}\int_0^\infty\psi(t)\exp(-\omega_k t)(1+\nu\omega_k t)\,dt$$

Таким образом, отыскание решения задачи сводится к определению двух функций $\psi(t)$ и σ_k с помощью соотношений (1.5), (1.7) или (1.5), (1.6).

Подставим (1.7) в (1.5) и после некоторых преобразований применим к полученному соотношению обратное синус-преобразование Фурье по переменной λ. Затем воспользуемся соотношением для $\psi_0(\lambda)$ в (1.3) и построим интегральное уравнение относительно $\psi(t)$. (В работе [4] предложен другой метод построения аналогичного интегрального уравнения.)

Если $\psi_0(\lambda)$, найденное из (1.5), подставим в (1.6), то получим систему алгебраических уравнений

$$(1.8)\qquad A_{(k)}=\sum_{m=1}^{\infty}M_{km}A_{(m)}+d_k,\qquad k\geqslant 1$$

$$A_{(k)}=\sigma_k(-1)^k\frac{1/4\pi\nu(\nu+2)\,h}{P(\nu+1)}$$

$$M_{km}=-\frac{8}{\pi\nu(\nu+2)}\int_0^\infty\lambda\omega_k\varphi_k(\lambda)\,\varphi_m(\lambda)\,\mathrm{sh}^2\lambda\,\frac{d\lambda}{\Delta_+}$$

$$d_k=\int_0^\infty\omega_k\varphi_k(\lambda)\sin\lambda c\,\mathrm{sh}^2\lambda\,\frac{d\lambda}{\Delta_+}$$

2. Исследуем систему (1.8), или в матричной форме

$$A = LA + d \tag{2.1}$$

$$A = (A_{(k)}),\ d = (d_k),\ L = (M_{km})$$

Существует единственное ограниченное решение уравнения (2.1), которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Действительно, рассмотрим банахово пространство R всех ограниченных последовательностей вещественных чисел Y_k с нормой

$$\|Y\| = \max_k \|Y_k\| \tag{2.2}$$

Из условия ограниченности оператора L в R, а также из того, что $d \subset R$, следует, что оператор L действует в области $D \subseteq R$. Условие ограниченности оператора L имеет вид

$$\|LA\| \leqslant q\|A\| \tag{2.3}$$

Из работы [1] следует

$$q < \frac{4(\mu-\mu^2)^{1/2}}{\pi(3-4\mu)} - \frac{1-2\mu}{3-4\mu}\left[1-\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(\mu^{-1}-1)^{1/2}\right] < 0.64 \tag{2.4}$$

т. е. $q < 1$. Таким образом, оператор L ограничен и является оператором сжатия.

Далее рассмотрим другой способ нахождения решения уравнения (2.1). Выделим из L в (2.1) оператор L_1, характеризующий поведение L при больших значениях индексов k и m

$$L_1 = (E_{km}), \quad E_{km} = -\frac{4}{\pi\nu(\nu+2)}\int_0^\infty \lambda\omega_k\varphi_k(\lambda)\varphi_m(\lambda)\,d\lambda \tag{2.5}$$

Тогда L имеет вид

$$L = L_1 + L_2,\ L_2 = (G_{km}) \tag{2.6}$$

$$G_{km} = \frac{4}{\pi\nu(\nu+2)}\int_0^\infty \lambda\omega_k\varphi_k(\lambda)\varphi_m(\lambda)\psi_1(\lambda)\,d\lambda \tag{2.7}$$

$$\psi_1(\lambda) = [(1 + 2\lambda - \exp(-2\lambda)] / \Delta_+ \tag{2.8}$$

Можно получить условия ограниченности операторов L_1, L_2 в пространстве R

$$\|L_1A\| < q\|A\|, \qquad \|L_2A\| < \varepsilon\|A\| \tag{2.9}$$

Здесь

$$\varepsilon < 0.282\,(1-\mu)^2 / (3-4\mu) < 0.094 \tag{2.10}$$

для q справедливо неравенство (2.4). Выполнение условий (2.3), (2.4), (2.9), (2.10) позволяет применить к операторному уравнению (2.1) итерационный метод, предложенный в работе [5]

$$A_{r+1} = L_1A_{r+1} + L_2A_r + d, \qquad r \geqslant 0 \tag{2.11}$$

При этом

(2.12) $\|A - A_{r+1}\| < f\|A_r - A_{r+1}\|, \quad f = \frac{\varepsilon}{(1-q)}, \quad r \geqslant 0$

Можно получить соотношение (A_0 — произвольный элемент)

(2.13) $\|A - A_r\| < f^r\|A_1 - A_0\|, \qquad A_0 \subset R$

Из (2.4) и (2.10) имеем

(2.14) $f < 0.263$

Из оценок (2.13) и (2.14) следует высокая степень сходимости метода. (Для некоторых значений μ оценка (2.14) оказывается завышенной. Так, в случае $\mu = 0.317$ имеем $q < 0.39$, $\varepsilon < 0.076$, $f < 0.125$.)

Представим (2.11) в следующем виде:

(2.15) $\Phi_0 = L_1\Phi_0 + d, \ \Phi_r = A_{r+1} - A_r, \ A_0 = (0)$

(2.16) $\Phi_r = L_1\Phi_r + L_2\Phi_{r-1}, \quad r \geqslant 1$

Решение уравнения (2.11) представится в виде

$$A_{r+1} = \sum_{n=0}^{r} \Phi_n$$

Таким образом, решение уравнения (2.1) свелось к решению систем уравнений (2.15), (2.16), которые отличаются лишь свободными членами. Поэтому исследование системы (2.15), (2.16) можно свести к исследованию одного уравнения, совпадающего по форме с уравнением (2.15) при условии, что свободный член известен.

Прежде чем перейти к изучению уравнения (2.15), сформулируем вспомогательные леммы.

Лемма 1. Решение системы (1.8) может быть представлено в виде

$$A_{(k)} = C_k / \omega_k^{\varepsilon_1}, \qquad \omega_k = k\pi, \qquad \varepsilon_1 = 1/2$$

где C_k — ограниченное решение следующей вполне регулярной системы:

$$C_k = \sum_{m=1}^{\infty} C_m M_{km} \omega_k^{\varepsilon_1} / \omega_m^{\varepsilon_1} + d_k \omega_k^{\varepsilon_1}, \qquad k \geqslant 1$$

Справедлива оценка

$$\sum_{m=1}^{\infty} |M_{km}| \omega_k^{\varepsilon_1}/\omega_m^{\varepsilon_1} < \eta < 0.77$$

$$\eta = S_2 S_3 \left[\pi\nu(\nu+2)\cos\frac{\pi\varepsilon_1}{2}\right]^{-1}, \qquad S_2 = (\nu-1)S_1 +$$

$$+ \pi(1+\nu\varepsilon_1)\left[2\cos\frac{\pi\varepsilon_1}{2}\right]^{-1}, \qquad S_3 = \nu - \varepsilon_1 +$$

$$+ 2(\nu+1)^{\varepsilon_1}\exp(-\nu-1)\frac{1+2\varepsilon_1/(\nu+1)}{\Gamma(1+\varepsilon_1)},$$

$$S_1 = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^n \alpha^{-2n-\varepsilon_1-1}}{(2n+1+\varepsilon_1)(2n+3+\varepsilon_1)}$$

$$\alpha^2 = (1-\mu)/\mu$$

Лемма 2. Пусть $\Phi(c_1 + it)$ — аналитическая функция в области $-1 < c_1 < 1/2$ и, кроме того, $|\Phi(s)|$ удовлетворяет в этой области следующим условиям:

$$|\Phi(c_1 \pm it)| < At^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad 1 < t < \infty$$

$$|\Phi(c_1 \pm it)| < B + Et^{\beta}, \quad \beta > 0, \quad 0 < t < 1$$

Тогда справедливо соотношение

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \Phi(s)(\pi m)^{\gamma - s - 1} ds = \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \Phi(s) \sum_{m=1}^{\infty} (\pi m)^{\gamma - 1 - s} ds$$

для всех $\sigma < \operatorname{Re}\gamma < c_1$.

При доказательстве леммы используются следующие оценки:

$$|z_m| < (A + E)(\pi m)^{-c_1}(\pi \ln \pi)^{-1}$$

$$0 < S_N < (A + E)\pi^{-2-c_1+\sigma}(\ln \pi)^{-1}[(c_1 - \sigma)^{-1} + (N + 1)^{-1}](N + 1)^{-(c_1 - \sigma)}$$

$$z_m = (2\pi i)^{-1} \int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \Phi(s)(\pi m)^{-s} ds, \qquad S_N = \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} (\pi m)^{\gamma - 1} z_m \right|$$

Лемма 3. Уравнение

$$\Delta = 2\varkappa \cos \pi\gamma - 4\gamma^2 + 1 + \varkappa^2 = 0, \ \varkappa = 3 - 4\mu, \ \mu > 0.073 \tag{2.17}$$

в области $\sigma > 0, \tau > 0$ $(\gamma = \sigma + i\tau)$ имеет единственный вещественный корень $1/2 < \sigma_0 < 1$, остальные корни комплексные и образуют счетное множество, при этом

$$\operatorname{Re}\gamma_n = \sigma_n = 2n - \varepsilon_n, \ 0 < \varepsilon_n < 1/2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

3. Перейдем к исследованию уравнения (2.15). Для этого перепишем его в виде

$$A_{0(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} E_{km} A_{0(m)} + d_k, \qquad k \geqslant 1 \tag{3.1}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Решение уравнения (3.1) при больших значениях индекса k может быть представлено в виде асимптотического разложения

$$A_{0(k)} = \sum_{n=0}^{N} (a_n \omega_k^{-\gamma_n} + \bar{a}_n \omega_k^{-\bar{\gamma}_n}) + R_N, \operatorname{Re}\gamma_n > 0 \tag{3.2}$$

где γ_n — корни уравнения (2.17), а R_N — остаточный член, для которого справедливы оценки

$$|R_N| < F_1 \Gamma(2N + 2) / (\omega_k c)^{2N+1}, \quad 0 < c < 1, \quad \omega_k c > 1 \tag{3.3}$$

$$|R_N| < F_2 \Gamma(2N + 2) / \omega_k^{2N+1}, \ c > 1, \ \Gamma(N + 1) = N\Gamma(N)$$

Здесь F_1, F_2 — постоянные, не зависящие от k N; c — то же, что и в (1.2).

Предположим, что $A_{0(m)}$ в (3.1) известны, тогда при k, непрерывно изменяющемся в пределах $0 < k < \infty$, правая часть равенства (3.1) — известная непрерывная по $\omega_k = k\pi$ функция, которую обозначим через $\theta(\omega_k)$. В силу того, что $A_{0(m)}$ — решение уравнения (3.1), при $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется равенство

$$\theta(\omega_k) = A_{0(k)} \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что $\theta(\omega_k)$ непрерывно продолжает $A_{0(k)}$ в область $0 < k < \infty$.

Обозначим в (3.1) $\pi k = \omega$. Тогда

$$\theta(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0(m)} E_m(\omega) + d(\omega) \tag{3.5}$$

Применим к обеим частям уравнения (3.5) преобразование Меллина по переменной ω, полагая, что $\theta(\omega)$ относится к классу функций, для которых это преобразование существует. Обозначим

$$\Phi(\gamma) = \int_0^\infty \theta(\omega)\,\omega^{\gamma-1}\,d\omega, \qquad \gamma = \sigma + i\tau, \qquad \sigma_1 < \sigma < \sigma_2 \tag{3.6}$$

$$K(\gamma) = \pi(\nu^2\gamma^2 - 1)/\nu(\nu+2)\cos^2(\pi\gamma/2), \qquad |\sigma| < 1 \tag{3.7}$$

$$D(\gamma) = \pi(1 + \nu\gamma)\,[\Gamma(\gamma)\sin(\pi\gamma/2)\,c^{-\gamma} - I(\gamma)], \qquad |\sigma| < 1 \tag{3.8}$$

$$I(\gamma) = \int_0^\infty \lambda^{\gamma-1}\sin\lambda c\,\psi_1(\lambda)\,d\lambda \tag{3.9}$$

где $\psi_1(\lambda)$ дается соотношением (2.8). Тогда (3.5) преобразуется к виду

$$\Phi(\gamma) = K(\gamma)\sum_{m=1}^{\infty} A_{0(m)}(\pi m)^{\gamma-1} + D(\gamma) \tag{3.10}$$

Можно доказать, что лемма 1 справедлива и для системы (3.1). Поэтому сумма в (3.10) существует для всех $\sigma < 1/2$ и $\Phi(\gamma)$ — аналитическая функция в области $-1 < \sigma < 1/2$. Исследуем функцию $\Phi(\gamma)$ в области $\sigma > -1$. Из формул (3.4), (3.6), (3.10) с использованием формулы обращения Меллина получим

$$A_{0(m)} = (2\pi i)^{-1}\int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \Phi(s)(\pi m)^{-s}\,ds, \qquad -1 < c_1 < 1/2 \tag{3.11}$$

Из (3.10) следует, что $\Phi(s)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Поэтому подставим (3.11) в (3.10) и применим лемму 2; найдем

$$\Phi(\gamma) = (2\pi i)^{-1} K(\gamma)\int_{c_1 - i\infty}^{c_1 + i\infty} \Phi(s)\,\pi^{\gamma-1-s}\,\zeta(1 + s - \gamma)\,ds + D(\gamma) \tag{3.12}$$
$$-1 < \sigma < c_1, \qquad -1 < c_1 < 1/2$$

Здесь $\zeta(1 + s - \gamma)$ — дзета-функция Римана [6].

Исследуем уравнение (3.12). Известно [6], что в окрестности точки $s = \gamma$ функция $\zeta(1 + s - \gamma)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\zeta(1 + s - \gamma) = (s - \gamma)^{-1} + F(s - \gamma) \tag{3.13}$$

где $F(s - \gamma)$ — аналитическая функция в окрестности $s = \gamma$.

Для исследования (3.12) в области $-1 < \sigma < \infty$ сделаем в указанном интеграле сдвиг по s левее прямой интегрирования $-1 < c_1 < {}^1/_2$. В результате преобразований получим

$$\Phi(\gamma) = 4\pi\varkappa \frac{\nu^2\gamma^2 - 1}{\nu(\nu + 2)\Delta} S(\gamma) + \frac{1}{\Delta}\varkappa D(\gamma)\cos\frac{\pi\gamma}{2} \tag{3.14}$$

$$S(\gamma) = (2\pi i)^{-1} \int_{c_2 - i\infty}^{c_2 + i\infty} \Phi(s)\pi^{\gamma - 1 - s}\zeta(1 + s - \gamma)\,ds \tag{3.15}$$

$$c_2 < \sigma < {}^1/_2, \quad -1 < c_2 < {}^1/_2$$

Здесь $D(\gamma)$ определяется из (3.8), а Δ — из (2.17). Очевидно, (3.14) аналитически продолжает (3.12) в область $\sigma > c_2$.

Из формул (3.11), (3.14) можно найти представление (3.2). При этом $S(\gamma)$ для всех $\sigma > c_2$ определяется при помощи соотношений (3.15) и (3.10), где $A_{0(m)}$ — решение системы (3.1). В результате коэффициенты разложения (3.2) можно выразить, в частности, через суммы вида

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{0(m)}(\pi m)^{-2l-2}(\ln \pi m)^b, \qquad b = 0, 1, \quad l = 0, 1, \ldots, L \tag{3.16}$$

путем сдвига прямой интегрирования в (3.15) влево на $s = 2L + 2$.

При $l \geqslant 1$ в (3.16) можно ограничиться небольшим числом членов, для $l = 0$ число членов разложения значительно возрастает. При этом интеграл типа (3.15) вдоль новой прямой интегрирования может быть легко вычислен. Используя лемму 3, выразим остаточный член в виде контурного интеграла

$$R_N = (2\pi i)^{-1} \int_{c_N - i\infty}^{c_N + i\infty} \Phi(\gamma)\,\omega_m^{-\gamma} d\gamma, \qquad c_N = (2N + 1) \tag{3.17}$$

Полагая в (3.17) $\gamma = c_N + ip$ и используя (3.14), (3.10), после громоздких преобразований получим оценку (3.3).

4. Численные расчеты были проведены в случае $\mu = 0.31741$, $\sigma_0 = 0.70000$, $c = 0.5, 1$. Решение систем (1.8) и (2.15) проводилось методом редукции. Решения систем (1.8) и (2.15) 20-го порядка отличаются от решений соответствующих систем 30-го порядка не более, чем на 3.5%. Из оценок (2.12), (2.10), (2.4) следует, что для всех $\mu < 0.31741$ указанная величина меняется незначительно. Таким образом, в инженерной практике для всех $\mu \leqslant 0.31741$ может быть использовано решение менее громоздкой системы (2.15).

Автор благодарит И. И. Воровича за критические замечания, сделанные по поводу данной работы.

Поступила 24 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агаловян Л. А., Геворкян Р. С.* О некоторых смешанных задачах теории упругости для полуполосы. Изв. АН АрмССР, Сер. механ., 1970, т. 23, № 3.
2. *Гринченко В. Т., Коваленко А. Д., Улитко А. Ф.* Анализ напряженного состояния жестко защемленной пластины на основе решения пространственной задачи теории упругости. Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластинок (Днепропетровск, 1969). М., «Наука», 1970.
3. *Ворович И. И., Копасенко В. В.* Некоторые задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
4. *Инденбом В. Л., Даниловская В. И.* Новый класс точных решений бигармонической задачи для полуполосы. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 6.
5. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. М., «Мир», 1969.
6. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.