Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 532.516

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ВДАЛИ ОТ ТЕЛА

К. И. Бабенко, М. М. Васильев

(Москва)

Рассматривается обтекание тела конечных размеров стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Предполагается, что вектор скорости u удовлетворяет условию

$$u - u_\infty = O(R^{-\alpha})$$

где u_∞ — вектор скорости набегающего потока, R — расстояние от фиксированной точки тела, $\alpha > 1/2$.

Получены члены асимптотики скорости порядков $O(R^{-1})$ и $O(R^{-3/2})$ и дается оценка остаточного члена. Дается асимптотическая формула для вихря скорости, из которой следует, что вне следа вихрь убывает по экспоненциальному закону.

1. Вспомогательные предложения. 1.1. Рассмотрим стационарное обтекание заданного тела $B \subset R^3$ вязкой несжимаемой жидкостью. Обозначим через u и p безразмерные вектор скорости и давление. Пусть $S = \partial B$ — поверхность, удовлетворяющая условиям Ляпунова. Начало координат поместим внутрь B и выберем направление осей координат и масштаб так, чтобы скорость набегающего потока u_∞ была равна (1, 0, 0) и чтобы диаметр B был равен единице.

Стационарное движение вязкой жидкости описывается системой уравнений (2λ — число Рейнольдса)

$$u \cdot \nabla u + \operatorname{grad} p = \Delta u / 2\lambda, \qquad \operatorname{div} u = 0 \tag{1.1}$$

Граничные условия на теле возьмем в виде

$$u|_S = u_0 \tag{1.2}$$

где функция u_0 подчинена условию

$$\int_S u_0 \cdot n \, d\sigma = 0 \tag{1.3}$$

Здесь n — единичный вектор внутренней нормали к поверхности S, $d\sigma$ — лебегова мера на S. Кроме того, должно выполняться условие на бесконечности

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = u_\infty \tag{1.4}$$

При выполнении условия (1.3) существование решения задачи (1.1), (1.2), (1.4) доказано первоначально Лерэ [1, 2], затем О. А. Ладыженской [3, 4], Финном [5], Фужита [6]. В работах Лерэ условие (1.4) выполняется в некотором обобщенном смысле, а если жидкость на бесконечности покоится, то и в классическом смысле. Все перечисленные авторы получили существование решения в классе решений с ограниченным интегралом Дирихле

$$(1.5) \qquad \int_G |\nabla u|^2 dx < \infty$$

где $G = R^3 \setminus B$. Для произвольного решения задачи обтекания, подчиненного условию (1.5), Финн [7] показал выполнимость (1.4), а М. Д. Фаддеев дал доказательство для класса обобщенных решений О. А. Ладыженской.

Вопрос об асимптотике решений вдали от тела представляет принципиальный интерес хотя бы в связи с теорией пограничного слоя. Однако уточнить соотношение (1.4), по крайней мере в смысле порядка убывания величины $u(x) - u_\infty$, до последнего времени не удавалось.

Возможно, в связи с этим и возник цикл работ Финна и его сотрудников, в которых детально изучалась асимптотика решения в предположении

$$(1.6) \qquad u(x) - u_\infty = O(|x|^{-\alpha})$$

Финн установил, что при $\alpha > 1/_2$ для вектора скорости имеет место асимптотика

$$(1.7) \qquad u(x) = u_\infty + H(x) \cdot a + O(|x|^{-3/2+\delta})$$

Здесь a — вектор силы, с которой поток действует на тело, $H(x)$ — матрица Грина системы Озеена, δ — сколь угодно малое положительное число. Асимптотика для производных $\partial u / \partial x_k$ получается формальным дифференцированием соотношения (1.7), и из этой асимптотики тривиально вытекает соотношение (1.5).

В недавней работе К. И. Бабенко [1] доказано, что для любого решения задачи обтекания с конечным интегралом Дирихле выполняется соотношение (1.6), в котором α сколь угодно мало отличается от 1. Таким образом, для решений с конечным интегралом Дирихле имеют место асимптотическая формула (1.7) и ее уточнения.

В данной работе дается уточнение формулы (1.7) и исследуется скорость убывания вихря вдали от тела. Почти все результаты этой работы отражены в препринте авторов [2]. Результаты об убывании вихря получены независимо Кларком [8]. В случае осесимметричного обтекания оценка убывания вихря при выполнении некоторого слабого одностороннего неравенства получена В. В. Пухначевым [9]. Следует отметить, что метод, раз-

---

[1] Бабенко К. И. О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью. Препринт института прикладной математики АН СССР. Депонирован, № 4815—72.

[2] Бабенко К. И., Васильев М. М. Асимптотическое поведение решения задачи обтекания конечного тела вязкой жидкостью. Препринт института прикладной математики АН СССР. Депонирован, № 4590—72.

витый К. И. Бабенко [10] для оценки убывания вихря, одинаково пригоден как для плоских течений, так и для пространственных. Этот метод и используется ниже.

1.2. Пусть $u = v + u_\infty$. Рассмотрим систему уравнений Озеена

$$\Delta v - 2\lambda \frac{\partial v}{\partial x_1} - 2\lambda \operatorname{grad} p = 0, \quad \operatorname{div} v = 0$$

Фундаментальное решение этой системы имеет вид

$$H_{ij}(x-y) = \delta_{ij}\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$2\lambda q_i(x-y) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Delta\Phi - 2\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right), \quad i = 1, 2, 3$$

Здесь

$$\Phi = \Phi(s) = -\frac{1}{8\pi\lambda}\int_0^{\lambda s}(1-e^{-t})\frac{dt}{t}$$

$$s = |x-y| - x_1 + y_1, \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3)$$

Можно показать, что для фундаментального решения выполняются оценки

$$\left|\frac{\partial^l}{\partial x_k{}^l} H_{ij}(x-y)\right| \leqslant C\,[|x-y|^{-1-l/2}(s+1)^{-1-l/2} + \\ + |x-y|^{-1-l}(s+1)^{-1}] \tag{1.8}$$

где $l = 0,1$. Легко проверить, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_1} H_{ij}(x-y)\right| \leqslant C|x-y|^{-2}(s+1)^{-1} \tag{1.9}$$

$$|q_i(x-y)| \leqslant C|x-y|^{-2}$$

Отметим, что одной и той же буквой C с индексами или без них здесь обозначаются различные константы, зависящие лишь от λ.

1.3. Обозначим через F вектор с координатами

$$F_i = 2\lambda\sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, 3$$

Финн [7] доказал, что если выполняется (1.5), то $v(x)$ представляется с помощью формулы Грина

$$v(x) = I_0(x) + \int_G H(x-y)F(y)\,dy \tag{1.10}$$

Здесь H — матрица с элементами H_{ij}, а $I_0(x)$ — вектор с компонентами

$$I_{0k}(x) = \int_S\left[\sum_{j,l=1}^{3}\left(\frac{\partial H_{kl}}{\partial y_j} + \frac{\partial H_{kj}}{\partial y_l} + 2\lambda\delta_{jl}q_k\right)v_l n_j + \lambda n_1\sum_{l=1}^{3} H_{kl}v_l\right]d\sigma - \\ - \int_S\sum_{j,l=1}^{3} H_{kl}\left(\frac{\partial v_l}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_l} - 2\lambda\delta_{jl}p\right)n_j d\sigma, \quad k = 1, 2, 3 \tag{1.11}$$

Обозначим через $I_d(x)$ объемный интеграл в (1.10). После интегрирования по частям компоненты вектора I_d можно записать в виде

$$(1.12)\qquad I_{dk} = -2\lambda \int\limits_G \sum_{j,\,l=1}^{3} \frac{\partial H_{kl}}{\partial y_j} v_l v_j \, dy + 2\lambda \int\limits_S \sum_{j,\,l=1} H_{kl} v_j v_l n_j \, d\sigma$$

Положим

$$J_{dk}(x) = -2\lambda \int\limits_G \sum_{j,\,l=1}^{3} \frac{\partial H_{kl}}{\partial y_j} v_l v_j \, dy$$

а поверхностный интеграл в формуле (1.12) объединим с интегралом (1.11) и результат обозначим через J_{0k}. Таким образом

$$(1.13)\qquad v(x) = J_0(x) + J_d(x)$$

2. Вывод главных членов асимптотики. 2.1. Получение главных членов асимптотики основано на оценке интегралов (1.13). Для оценки этих интегралов выведем некоторые вспомогательные предложения. Рассмотрим свертку

$$(2.1)\qquad I(x) = \int\limits_{R^3} W(x-y) f(y) \, dy$$

и предположим, что

$$|f(x)| \leqslant (|x|+1)^{-\beta}(s+1)^{-\gamma}, \quad |W(x)| \leqslant |x|^{-\delta}(s+1)^{-\varepsilon}$$

где β, γ, δ, ε — неотрицательные константы, причем $\varepsilon \geqslant 1$. Найдем оценку для $I(x)$ при больших $|x|$.

Положим $|x| = R$, $\theta|x| = R_0$, где $\theta = \text{const}$, $0 < \theta \leqslant 1/4$. Пусть

$$D_0 = \{y\colon |y_1| \leqslant R_0,\ y_2^2 + y_3^2 \leqslant R_0^2\}$$

$$D_x = \{y\colon |y_1 - x_1| \leqslant R_0,\ (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \leqslant R_0^2\}$$

При сделанных предположениях $D_0 \cap D_x = \phi$; положим $D = R^3 \setminus D_0 \cup D_x$. Сообразно с произведенным разбиением R^3 разложим $I(x)$ на сумму трех интегралов по областям D_0, D_x и D и обозначим эти интегралы через I_1, I_2 и I_3 соответственно. Интеграл I_2 приводится к интегралу I_1 заменой $x-y$ на y, если поменять ролями функции f и W. Однако удобнее исследовать I_2 отдельно, так как функция W выделена условием $\varepsilon \geqslant 1$, а на γ никаких условий не накладывается.

Оценим интеграл I_3. Можно показать, что

$$C^{-1} \leqslant \frac{|y-x|}{|y|} \leqslant C, \qquad \forall y \in D$$

Проверяется, что

$$[s(y)+1]\,[s(x-y)+1] \geqslant s(x)+1$$

Поэтому, полагая $\omega_h = \min[\gamma, \varepsilon, \max(\gamma, \varepsilon) - 1 - h]$, где $|h| \leqslant 1$ ($h = \text{const}$), получим

$$|I_3(x)| \leqslant C[s(x)+1]^{-\omega_h} \int\limits_{|y| \geqslant R_0} |y|^{-\beta-\delta}[s(y)+1]^{-1-h}\,dy$$

Если величина $h_0 = \max(-h, 0)$ выбрана так, что $\beta + \delta > 2 + h_0$, то

$$\int\limits_{|y| \geqslant R_0} |y|^{-\beta-\delta}[s(y)+1]^{-1-h}\,dy = 2\pi \int\limits_{R_0}^{\infty} \rho^{2-\beta-\delta}\,d\rho \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{[\rho(1-\cos\varphi)+1]^{1+h}} \leqslant$$
$$\leqslant CR_0^{2-\beta-\delta+h_0}\Delta_{0,h}$$

Здесь и в дальнейшем применяется обозначение

$$\Delta_{a,b} = \begin{cases} 1, & \text{если } a \neq b \\ \log R, & \text{если } a = b \end{cases}$$

Из последних оценок вытекает

$$|I_3(x)| \leqslant CR^{2-\beta-\delta+h_0}[s(x)+1]^{-\omega_h}\Delta_{0,h} \tag{2.2}$$

2.2. Рассмотрим интеграл $I_2(x)$. Положим $\zeta_h = \min(\gamma, \varepsilon - 1 - h)$. Тогда

$$|I_2(x)| \leqslant C[s(x)+1]^{-\zeta_h}|x|^{-\beta} \int\limits_{|y| \leqslant R_0} |y|^{-\delta}[s(y)+1]^{-1-h}\,dy$$

Если $\delta < 2 + h_0$, то, оценивая последний интеграл, получим

$$|I_2(x)| \leqslant CR^{2-\beta-\delta+h_0}[s(x)+1]^{-\zeta_h}\Delta_{0,h} \tag{2.3}$$

2.3. Оценим интеграл $I_1(x)$. Пусть $r = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$. Разобьем D_0 на три области

$$d_1 = \left\{y : |y_1| \leqslant R_0,\ y_2^2 + y_3^2 \leqslant \left(\frac{\theta r}{4}\right)^2\right\}$$
$$d_2 = \left\{y : |y_1| \leqslant R_0,\ (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \leqslant \left(\frac{\theta r}{4}\right)^2\right\}$$
$$d_3 = D_0 \setminus d_1 \cup d_2$$

В соответствии со сделанным разбиением разложим $I_1(x)$ на сумму трех интегралов

$$I_1(x) = I_{11}(x) + I_{12}(x) + I_{13}(x) \tag{2.4}$$

где I_{11}, I_{12}, I_{13} — интегралы по областям d_1, d_2, d_3 соответственно.

Рассмотрим сначала случай $r \geqslant \sqrt{R}$.

Допустим, что $x_1 \geqslant 2R_0$. Тогда

$$|W(x-y)| \leqslant CR^{-\delta}[s(x-y^\circ)+1]^{-\varepsilon}, \quad \forall y \subset D_0$$

где $y^\circ = (0, y_2, y_3)$. Полагая

$$\varphi_0(y_2, y_3) = \int\limits_{-R_0}^{R_0} |f(y_1, y_2, y_3)|\,dy_1$$

получим

$$|I_{12}| \leqslant CR^{1-\delta} \quad \Delta_{1,\varepsilon} \max_{d_2} |\varphi_0(y_2, y_3)| \tag{2.5}$$

Можно убедиться, что

$$[s(x-y^{\circ})+1]^{-\varepsilon} \leqslant C\left(\frac{y_2^2+y_3^2}{R}+1\right)^{-\varepsilon}, \quad \forall y \in d_3$$

и, следовательно

$$|I_{13}(x)| \leqslant CR^{-\delta} \int\limits_{\theta r/4}^{R_0} \varphi_1(\rho)\rho\left(\frac{\rho^2}{R}+1\right)^{-\varepsilon} d\rho$$

$$\varphi_1(\rho) = \int\limits_0^{2\pi} \varphi_0(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\, d\varphi$$

При принятых предположениях $r \geqslant \sqrt{{}^1/_2\, R\,(s+1)}$. Поэтому, полагая $R_1 = \theta\,/\,(4\sqrt{2})\quad \sqrt{R\,(s+1)}$, получим

$$|I_{13}(x)| \leqslant CR^{-\delta} \int\limits_{R_1}^{R_0} \rho\left(\frac{\rho^2}{R}+1\right)^{-\varepsilon} \varphi_1(\rho)\, d\rho \tag{2.6}$$

Что же касается $I_{11}(x)$, то ясно, что

$$|I_{11}(x)| \leqslant CR^{-\delta}[s(x)+1]^{-\varepsilon} \int\limits_0^{2R_1} \rho\varphi_1(\rho)\, d\rho \tag{2.7}$$

Было сделано предположение, что $x_1 \geqslant 2R_0$. Если $x_1 < 2R_0$, то, сохраняя оценки (2.6) и (2.7), можно показать, что

$$|I_1(x)| \leqslant J_{11}(x) + J_{13}(x) \tag{2.8}$$

где $J_{11}(x)$ и $J_{13}(x)$ — правые части неравенств (2.7) и (2.6) соответственно.

Можно убедиться, что неравенство (2.8) остается в силе и при $r < \sqrt{R}$.

2.4. Оценим $\varphi_1(\rho)$ и установим неравенства для $|I_{1j}|$, $j = 1, 2, 3$.

Предложение 1. Пусть $\beta + \gamma \leqslant 3$. Если $\beta \geqslant 1 + \gamma$, то

$$\varphi_1(\rho) \leqslant C\,(\rho+1)^{1-\beta-\gamma}\, \Delta_{1,\beta-\gamma}$$

если же $\beta < 1 + \gamma$, то при $\beta > 1$

$$\varphi_1(\rho) \leqslant C \begin{cases} (\rho+1)^{2-2\beta}, & \rho \leqslant \sqrt{R_0} \\ R_0^{1-\beta+\gamma}\rho^{-2\gamma}, & \rho > \sqrt{R_0} \end{cases}$$

Доказательство этого предложения получается простыми оценками интеграла $\varphi_1(\rho)$.

Пользуясь предложением 1, можно при $\beta \geqslant 1 + \gamma$ привести неравенства (2.5) — (2.7) к виду

$$|I_{12}(x)| \leqslant CR^{\xi-\delta}(s+1)^{\xi-1}\, \Delta_{1,\beta-\gamma}\, \Delta_{1,\varepsilon} \tag{2.9}$$

$$|I_{13}(x)| \leqslant CR^{\xi-\delta}(s+1)^{\xi-\varepsilon}\, \Delta_{1,\beta-\gamma} \tag{2.10}$$

$$|I_{11}(x)| \leqslant CR^{\xi-\delta}\,(s+1)^{\xi-\varepsilon}\, \Delta_{3,\beta+\gamma}\, \Delta_{1,\beta-\gamma} \tag{2.11}$$

$$(\xi = {}^1/_2\,(3-\beta-\gamma))$$

При $1 < \beta < 1 + \gamma$ получим

(2.12) $\quad |I_{12}(x)| \leqslant CR^{2-\beta-\delta}(s+1)^{-\gamma}\Delta_{1,\varepsilon}$

(2.13) $\quad |I_{13}(x)| \leqslant CR^{2-\beta-\delta}(s+1)^{1-\gamma-\varepsilon}$

(2.14) $\quad |I_{11}(x)| \leqslant CR^{2-\beta-\delta}[1+(s+1)^{1-\gamma}\Delta_{1,\gamma}](s+1)^{-\varepsilon}$

Суммируя оценки (2.2), (2.3), (2.9)—(2.14) приходим к следующему предложению.

Предложение 2. Пусть $2 - \beta + h_0 < \delta < 2 + h_0$, $\beta + \gamma \leqslant 3$. Тогда при $\beta \geqslant 1 + \gamma$

$$|I(x)| \leqslant C\{R^{\xi-\delta}(s+1)^{\xi-1}[\Delta_{1,\,\beta-\gamma} + \Delta_{3,\,\beta+\gamma}] + R^{2-\beta-\delta+h_0}(s+1)^{-\tau_h}\Delta_{0,\,h}\}$$

при $\beta < 1 + \gamma$

$$|I(x)| \leqslant CR^{2-\beta-\delta}\{[(s+1)^{-\varepsilon} + (s+1)^{-\gamma}]\Delta_{1,\gamma} + R^{h_0}(s+1)^{-\tau_h}\Delta_{0,h}\Delta_{2,\delta}\}$$

где $\tau_h = \min(\omega_h, \zeta_h)$.

2.5 Найдем главный член асимптотики скорости. На основании формулы (1.8) имеем следующую оценку для поверхностного интеграла $J_0(x)$:

$$|J_0(x)| \leqslant CR^{-1}(s+1)^{-1}$$

Считая выполненной оценку (1.6) при $\alpha > {}^1/_2$, применим к объемному интегралу J_d предложение 2, полагая $\delta = \varepsilon = {}^3/_2$.

Учитывая, что $\beta = 2\alpha > 1$, $\gamma = 0$, получим

(2.15) $\quad |J_d(x)| \leqslant CR^{-\alpha}(s+1)^{-(\alpha-1/2)}$

Если $\alpha \leqslant 1$, то из этих оценок вытекает

$$|v(x)| \leqslant CR^{-\alpha}(s+1)^{-(\alpha-1/2)}$$

и таким образом оценка (1.6) улучшается. Отметим, что здесь сработали нелинейные члены в интеграле J_d. Это стало возможным из-за того, что условие $\alpha > {}^1/_2$ гарантирует определенную «малость» v.

Снова применяя предложение 2 к оценке J_d, но полагая [$\beta = 2\alpha$, $\gamma = 2\alpha - 1 - h$ (h — достаточно малое положительное число), получим

$$|v(x) - J_0(x)| \leqslant CR^{-\alpha_1}(s+1)^{-\varkappa_1}$$
$$\alpha_1 = 2\alpha - (1+h)/2, \qquad \varkappa_1 = 2\alpha - 1 + h/2$$

Повторное применение этих рассуждений приведет к оценке, подобной (2.15), но уже с показателями

$$\alpha_2 = 2\alpha_1 - \frac{1+h}{2}, \qquad \varkappa_2 = 2\alpha_1 - 1 + \frac{h}{2}$$

Таким образом, через конечное число шагов получим, что

$$|v(x)| \leqslant CR^{-1}.$$

Применение предложения 2 дает оценку

$$|v(x) - J_0(x)| \leqslant CR^{-1}(s+1)^{-1/2}$$

а после повторного применения предложения 2 получим

$$| v (x) - J_0 (x) | \leqslant CR^{-(3-h)/2} (s + 1)^{-(1-h)/2}$$

Отсюда следует

$$| v (x) | \leqslant CR^{-1} (s + 1)^{-1+h}$$

Если теперь взять $\beta = 2$, $\gamma = 2 - 2h$ и вновь применить предложение 2, то окончательно получим

$$| J_d (x) | \leqslant CR^{-3/2} (s + 1)^{-1/2} \log R \tag{2.16}$$

2.6. Найдем асимптотику поверхностного интеграла $J_0 (x)$.

Разлагая $H_{kl} (x - y)$, $\partial H_{kl} (x - y) / \partial y_j$ и $q_k (x - y)$ в ряд по степеням y и учитывая, что при больших R

$$\left| \frac{\partial^2 H_{kl} (x - y)}{\partial y_i \partial y_j} \right| \leqslant CR^{-2} (s + 1)^{-2}$$

получим

$$J_{0k}(x) = \sum_{l=1}^{3} a_l H_{kl} (x) + \sum_{j,\, l=1}^{3} b_{jl} \frac{\partial H_{kl} (x)}{\partial x_j} + O [R^{-2} (s + 1)^{-1}], \quad k = 1, 2, 3 \tag{2.17}$$

где a_l, b_{lj} — некоторые константы.

В формуле (2.17) отдельные слагаемые расположены формально так, что к главным членам относятся также члены, убывающие внутри следа [1] как $R^{-3/2}$. Для сохранения симметрии формул здесь перегруппировка не производится. Положим

$$v_k^1 (x) = \sum_{l=1}^{3} H_{kl} (x) a_l$$

и пусть

$$v (x) = v^1 (x) + w^{3/2} (x) \tag{2.18}$$

Из (2.16) и (2.17) следует, что

$$| w^{3/2} | \leqslant CR^{-3/2} (s + 1)^{-1/2} \log R$$

Поэтому величина $w^{3/2}$, которую можно считать погрешностью асимптотической формулы, имеет порядок убывания $^3/_2$, что и отражено в ее обозначении.

3. Вывод дальнейших членов асимптотики. 3.1. Установим некоторые вспомогательные предложения. Рассмотрим интеграл (2.1) и, кроме сделанных в начале п. 2 допущений, предположим еще, что функция $W (x)$ непрерывно дифференцируема при $x \neq 0$ и

$$\left| \frac{\partial W (x)}{\partial x_1} \right| \leqslant CR^{-\delta-1} (s + 1)^{-\varepsilon} \tag{3.1}$$

$$\left| \frac{\partial W (x)}{\partial x_k} \right| \leqslant CR^{-\delta-1/2} (s + 1)^{-1/2-\varepsilon}, \quad k = 2, 3$$

[1] Под следом условно понимаем область $\{x : x_1 > 0,\ x_2^2 + x_3^2 \leqslant cx_1\}$.

Будем также допускать, что в оценке для $f(x)$ содержится логарифмический множитель, т. е.

$$|f(x)| \leqslant CR^{-\beta}(s+1)^{-\gamma}\log^{\beta_0} R$$

причем $\beta > 2$, $3 < \beta + \gamma \leqslant 4$. Ясно, что из-за наличия множителя $\log^{\beta_0} R$ в оценках интегралов I_2, I_3, I_{12} и I_{13} появится дополнительный множитель $\log^{\beta_0} R$.

Найдем асимптотику $I(x)$. Пусть $r > \sqrt{R}$. Рассмотрим интеграл $I_{11}(x)$. Воспользовавшись (3.1), получим

$$\left| I_{11}(x) - W(x)\int\limits_{d_1} f(y)\,dy \right| \leqslant CR^{-\delta-1/2}(s+1)^{-\varepsilon}\times$$
$$\times\int\limits_{d_1}|f(y)|\left[\frac{|y_1|}{R^{1/2}} + \frac{|y_2|+|y_3|}{(s+1)^{1/2}}\right]dy$$

Оценим правую часть этого неравенства. Можно убедиться в том, что

$$\int\limits_{d_1}|f(y)|\,|y_1|\,dy \leqslant CR^{3-\beta}\log^{\beta_0}R\Delta_{2,\,\beta-\gamma} \qquad (\beta\leqslant\gamma+2)$$

$$\int\limits_{d_1}|f(y)|\,|y_1|\,dy \leqslant CR^{\xi+3/2}(s+1)^{\xi+1/2} \qquad (\beta>2+\gamma)$$

Используя предложение 1, можно показать, что при $\beta \geqslant 1+\gamma$

$$\int\limits_{d_1}|f(y)|(|y_2|+|y_3|)\,dy \leqslant CR^{\xi+1/2}(s+1)^{\xi+1/2}\log^{\beta_0}R\Delta_{1,\,\beta-\gamma}\Delta_{4,\,\beta+\gamma}$$

Отсюда следует, что

$$\left| I_{11}(x) - W(x)\int\limits_{d_1} f(y)\,dy \right| \leqslant CR^{3/2-\delta}(s+1)^{-\varepsilon}\times$$
$$\times\,[R^{1/2-\beta} + R^{\xi-3/2}(s+1)^{\xi}]\log^{\beta_0}R$$

Чтобы получить окончательную формулу, заметим, что при $\beta \geqslant 1+\gamma$

$$\left|\int\limits_{R^3\setminus d_1} f(y)\,dy\right| \leqslant C\,[R^{2-\beta} + R^{\xi}(s+1)^{\xi}]\log^{\beta_0}R\Delta_{1,\,\beta-\gamma}$$

Таким образом

$$\left| I_{11}(x) - W(x)\int\limits_{R^3} f(x)\,dx \right| \leqslant CR^{3/2-\delta}(s+1)^{-\varepsilon}[R^{1/2-\beta}+ \tag{3.2}$$
$$+\,R^{\xi-3/2}(s+1)^{\xi}]\log^{\beta_0}R$$

Можно убедиться в том, что неравенство (3.2) остается справедливым и при $r \leqslant \sqrt{R}$.

Предложение 3. Пусть $\beta > 2{,}3 < \beta+\gamma \leqslant 4$, $\beta \geqslant 1+\gamma$. Тогда

$$\left| I(x) - W(x)\int\limits_{R^3} f(x)\,dx \right| \leqslant CR^{3/2-\delta}[R^{1/2-\beta}(s+1)^{-\varepsilon}+ \tag{3.3}$$
$$+\,R^{\xi-3/2}(s+1)^{\xi-1}]\log^{\beta_0}R\Delta_{1,\,\beta-\gamma}\Delta_{4,\,\beta+\gamma} + CR^{2-\beta-\delta}\log^{\beta_0}R(s+1)^{-\tau h}\Delta_{0,\,h}$$

Доказательство. Оценка интегралов I_2 и I_3 была сделана выше и, очевидно, она пригодна и в данном случае. При $x_1 \geqslant 2R_0$ интеграл I_1 был разбит на три слагаемых, и оценки (2.9), (2.10), (2.12), (2.13) вместе с (3.2) дают (3.3). Если же $x_1 < 2R_0$, то разобьем I_1 на слагаемые $I_1 = J_{11} + J_{13}$ в соответствии с разбиением области D на части g_1 и $g_3 = D \setminus g_1$, где

$$g_1 = \left\{y : |y_1| \leqslant R_0,\ y_2^2 + y_3^2 \leqslant \left(\frac{\theta}{4}\right)^2 \frac{R(s+1)}{2}\right\}$$

Тогда для J_{11} останется в силе соотношение (3.2), а для J_{13} — неравенство (2.6) и, как следствие, останутся в силе неравенства (2.10) и (2.13). Отсюда следует, что неравенство (3.3) справедливо и в данном случае.

3.2. Найдем следующие члены асимптотики скорости. Переобозначим $J_d(x)$ через $J_d(x; v, v)$, подчеркивая тем самым, что J_d — квадратичный функционал от v. Используя разложение (2.18), получим

$$J_d(x; v, v) = J_d(x; v^1, v^1) + J_d(x; v^1, w^{3/2}) + J_d(x, w^{3/2}, v^1) + J_d(x; w^{3/2}, w^{3/2})$$

Асимптотику последних трех слагаемых в этой формуле можно получить на основании предложения 3. Поскольку главные члены в этой асимптотике будут иметь такой же вид, как и члены порядка $R^{-3/2}$ в формуле (2.17), то в асимптотической формуле для $v(x)$ это приведет лишь к изменению констант b_{jl}. Новые значения констант обозначим через a_{jl}. Таким образом, нужно лишь оценить остаточный член. Пользуясь предложением 3 и полагая $\beta = 5/2$, $\gamma = 3/2$, $\beta_0 = 1$, получим, что в этом случае остаточный член будет $O[R^{-2}(s+1)^{-1}\log^3 R]$.

Таким образом, полагая

$$v_k^{3/2}(x) = \sum_{j,\,l=1}^{3} a_{jl}\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_j} + J_{dk}(x;\ v^1,\ v^1), \quad k = 1, 2, 3 \tag{3.4}$$

получим

$$v_k(x) = v_k^{(1)}(x) + v_k^{3/2}(x) + O[R^{-2}(s+1)^{-1/2}\log^3 R] \tag{3.5}$$

Отметим, что к членам порядка $R^{-3/2}$ отнесены интегралы $J_{dk}(x; v^1, v^1)$. Определение асимптотики этих интегралов требует довольно громоздких выкладок. Однако при $a_2 = a_3 = 0$ асимптотика этих интегралов находится просто с помощью предложения 2.

В самом деле, заметим, что при $k \neq 1$

$$|H_{k1}(x)| \leqslant C[R^{-2} + R^{-3/2}(s+1)^{-1}]$$

и поэтому при $a_2 = a_3 = 0$

$$|v_k^1(x)| \leqslant C[R^{-2} + R^{-3/2}(s+1)^{-1}], \quad k = 2, 3$$

Учитывая неравенство (1.9), заметим, что J_{dk} — сумма интегралов, к каждому из которых применимо либо предложение 2 (и тогда $\delta = 2$), либо предложение 3. Таким образом, в этом случае

$$v_k^{3/2}(x) = \sum_{j,\,l=1}^{3} a_{jl}\frac{\partial H_{kl}}{\partial x_j} \tag{3.6}$$

Согласно одному результату Финна [11], вектор (a_1, a_2, a_3) есть вектор силы, с которой поток действует на тело. Если $a_2 = a_3 = 0$, то это означает, что полная сила сводится к силе любового сопротивления. Можно показать, что коэффициенты a_{jl} выражаются через главный момент сил, действующих на тело со стороны потока.

3.3. Найдем главные члены асимптотики для производных вектора скорости. Они получаются формальным дифференцированием соотношения (2.18). Пусть $t = (t_1, t_2, t_3)$— произвольный малый вектор. Ясно, что

$$v(x + 1) - v(x) = v^1(x + t) - v^1(x) + J_d(x + t) - J_d(x) + O[|t| R^{-2}(s + 1)^{-1}]$$

Разность $J_d(x + t) - J_d(x)$ можно оценить, пользуясь предложением 2. Имеем

$$J_{dk}(x+t) - J_{dk}(x) = \int\limits_{|y-x|\leqslant 1} \sum_{j,l=1}^{3} v_j(y) v_l(y) \left[\frac{\partial H_{kl}(x+t-y)}{\partial y_j} - \frac{\partial H_{kl}(x-y)}{\partial y_j}\right] dy + \int\limits_{|y-x|\geqslant 1} \sum_{j,l=1}^{3} v_j(y) v_l(y) H_{klj}(x-y, t)\, dy$$

Ко второму интегралу применим предложение 2, причем, поскольку

$$|H_{klj}|(x - y, t)| \leqslant C|t| |x - y|^{-2}(s + 1)^{-2}$$

то, полагая $\beta = \gamma = \beta_0 = 2$, получим, что рассматриваемый интеграл будет $O[|t| R^{-2}(s + 1)^{-1} \log^4 R]$. Что же касается первого интеграла, то имеем неравенство

$$\left|\int\limits_{|y-x|\leqslant 1} \sum_{j,l=1}^{3} v_j(y) v_l(y) \left[\frac{\partial H_{kl}(x+t-y)}{\partial y_j} - \frac{\partial H_{kl}(x-y)}{\partial y_j}\right] dy\right| \leqslant CR^{-2}(s+1)^{-1}|t| \log \frac{1}{|t|}$$

Итак

$$v(x+t) - v(x) = \sum_{j=1}^{3} t_j \frac{\partial v^1(x)}{\partial x_j} + |t| \log \frac{1}{|t|} O[R^{-2}(s+1)^{-1} \log^4 R] \tag{3.7}$$

Продифференцируем формулу (1.13), причем $J_d(x)$ можно продифференцировать по правилам дифференцирования интеграла со слабой особенностью [12]. Таким образом

$$\frac{\partial J_{dk}(x)}{\partial x_i} = \sum_{j,l=1}^{3} \alpha_{kijl} v_j(x) v_l(x) - 2\lambda \int\limits_{G} \sum_{j,l=1}^{3} \frac{\partial^2 H_{kl}}{\partial x_i \partial y_j} v_j v_l dy$$

Здесь объемный интеграл является сингулярным интегралом. Заметим, что к интегралу

$$\int\limits_{G_x} \frac{\partial^2 H_{kl}}{\partial x_i \partial y_j} v_j v_l dy, \qquad G_x = G \setminus \{y : |y - x| \leqslant 1\}$$

применимо предложение 2. Далее

$$\int\limits_{|y-x|\leqslant 1} \sum_{j,\,l=1}^{3} \frac{\partial^2 H_{kl}(x-y)}{\partial x_i \partial y_j} v_j(y) v_l(y)\,dy = \int\limits_{|y-x|\leqslant 1} \frac{\partial^2 H_{kl}(x-y)}{\partial x_i \partial y_j} \times$$

$$\times [v_j(y) v_l(y) - v_j(x) v_l(x)]\,dy + \sum_{j,\,l=1}^{3} v_j(x) v_l(x) \times$$

$$\times \int\limits_{|y-x|\leqslant 1} \frac{\partial^2 H_{kl}(x-y)}{\partial x_i \partial y_j}\,dy$$

На основании (3.7) первое слагаемое есть $O\,[R^{-5/2}(s+1)^{-1}]$, а второе— $O\,[R^{-2}(s+1)^{-1}]$. Таким образом

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{\partial v^1}{\partial x_j} + O\,[R^{-2}(s+1)^{-1}\log^4 R] \tag{3.8}$$

4. Асимптотика вихря скорости. 4.1. Отправляясь от формулы (3.8), можно найти главные члены асимптотики $\omega = \operatorname{rot} v$. Элементарная выкладка дает

$$\omega = \frac{\lambda}{4\pi} \nabla s \times a \frac{e^{-\lambda s}}{R} + O\,[R^{-2}(s+1)^{-1}\log^4 R] \tag{4.1}$$

Ниже будет уточнен остаточный член этой формулы.

Положим

$$H_0(x-y) = \frac{e^{-\lambda s\,(x-y)}}{4\pi|x-y|} \tag{4.2}$$

Тогда, как известно

$$\omega_i(x) = \frac{\lambda}{2\pi} \int\limits_G \sum_{j=1}^{3} (v_j\omega_i - v_i\omega_j) \frac{\partial}{\partial y_j} H_0(x-y)\,dy + \Omega_i(x) \tag{4.3}$$

$$\Omega_i(x) = \int\limits_S \left[H_0 \frac{\partial \omega_i}{\partial n} - \omega_i \frac{\partial H_0}{\partial n} - 2\lambda n_1 H_0 \omega_i \right] d\sigma -$$

$$- \frac{\lambda}{2\pi} \int H_0(x-y) \sum_{j=1}^{3} (v_j\omega_i - v_i\omega_j)\, n_j\,d\sigma$$

Пользуясь формулой (4.3), найдем оценку функции $\varphi(x) = |\omega_1(x)| + |\omega_2(x)| + |\omega_3(x)|$ при больших R.

Из формулы (3.5) следует, что

$$|v(x)| \leqslant CR^{-1}(s+1)^{-1},$$

так как $|v^{3/2}(x)| \leqslant C_1 R^{-1}(s+1)^{-1}$. Последнее неравенство вытекает из предложения 2 при $\beta = \gamma = 2$, если h — малое отрицательное число.

В результате некоторых преобразований получим

$$\sum_{i=1}^{3} |\omega_i(x) - \Omega_i(x)| \leqslant A \int\limits_G \frac{\omega(y)\, Q_0(x-y)}{|y|\,[s(y)+1]}\,dy$$

$$Q_0(x) = R^{-3/2} \exp\,[-\lambda s(x)]\,[s^{1/2}(x) + R^{-1/2}]$$

Найдем асимптотику интегралов Ω_i внутри следа. Разлагая $H_0(x-y)$ по степеням y, получим

$$\Omega_i(x) = \frac{e^{-\lambda s}}{R}\left(A_i + \sum_{j=2}^{3} B_{ij}\frac{x_j}{R}\right) + O(R^{-2}e^{-\lambda s})$$

Сравнение этих соотношений с (4.1) дает $A_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, откуда следует

$$\sum_{i=1}^{3} |\Omega_i(x)| \leqslant AR^{-3/2}e^{-\mu s}$$

Здесь μ — любое число, меньшее λ. Следовательно

$$\varphi(x) \leqslant A\int_G \frac{\varphi(y)\,Q(x-y)}{|y|\,[s(y)+1]}\,dy + A\,\frac{e^{-\mu s(s)}}{R^{3/2}} \tag{4.4}$$

$$Q(x) = R^{-3/2}e^{-\mu s}(1 + R^{-1/2})$$

4.2. Из (4.1) следует

$$|\,\omega(x)\,| \leqslant C_0R^{-3/2}(s+1)^{-1} \tag{4.5}$$

Покажем, что, пользуясь неравенством (4.4), можно существенно уточнить оценку (4.5) и получить экспоненциальное убывание вихря вне следа. Метод, развитый К. И. Бабенко [10] при исследовании плоской задачи, пригоден и в случае трехмерного пространства; будем следовать рассуждениям указанной работы.

Положим $\mu = 2\mu_1 + \mu_2$, $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$. Предположим, что неравенство

$$\varphi(y) \leqslant C_0B^{l-1}[\mu_1 s(y) + 1]^{-l}\,\Gamma(l+1)\,|\,y\,|^{-3/2}, \quad \forall\, y \in G \tag{4.6}$$

выполняется при $l = 1, 2, \ldots, n$. Покажем, что тогда это неравенство будет верно и при $l = n + 1$.

Положим $\psi(y) = |\,y\,|^{3/2}\varphi(y)$. Дадим оценку произведения $\psi(y)\exp[-\mu s(x-y)]$, пользуясь сделанным предположением. Разложим G в сумму непересекающихся областей G_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Полагая $s(x) = \tau$, определим эти области следующим образом:

$$G_k = \left\{y : \tau\left(\frac{1}{2} + \frac{k-1}{2n}\right) \leqslant s(y) < \tau\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2n}\right)\right\} \cap G, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$G_0 = \left\{y : s(y) < \frac{\tau}{2}\right\} \cap G, \qquad G_n = \left\{y : \tau\frac{2n-1}{2n} \leqslant s(y)\right\} \cap G$$

Можно проверить, что $s(x) - s(y) \leqslant s(x-y)$. Поэтому при $y \in G_k$

$$\exp[-\mu s(x-y)] \leqslant \exp[-\mu_2 s(x-y)]\exp\left[-\mu_1\tau\left(1 - \frac{k}{n}\right)\right]$$

откуда, используя очевидное неравенство

$$\frac{t^m}{\Gamma(m+1)} < e^t, \qquad \forall t > 0, \quad m > 0$$

и индуктивное предположение (4.6), получим $\forall\, y \in G_k$

$$\psi(y)\exp[-\mu s(x-y)] \leqslant C\exp[-\mu_2 s(x-y)]\,eB^{k-1}\Gamma(k+1)\,\times$$
$$\times\,\Gamma(n-k+1)\left[\mu_1\tau\left(\frac{1}{2} + \frac{k-1}{2n}\right) + 1\right]^{-k}\left[\mu_1\tau\left(1 - \frac{k}{n}\right) + 1\right]^{k-n}$$

при $k = 0,1,\dots n-1$. Можно показать, что

$$\left[\mu_1\tau\left(\frac{1}{2}+\frac{k-1}{2n}\right)+1\right]^k\left[\mu_1\tau\left(1-\frac{k}{n}\right)+1\right]^{n-k}\geqslant$$
$$\geqslant(\mu_1\tau+1)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{k-1}{2n}\right)^k\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}$$

Используя известные неравенства

$$\sqrt{2\pi}\,m^{m+1/2}e^{-m}<\Gamma(m+1)<m^{m+1/2}e^{-m}\sqrt{2\pi e},\qquad \forall m\geqslant 1$$

и предыдущее неравенство, получим

$$\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)\left[\mu_1\tau\left(\frac{1}{2}+\frac{k-1}{2n}\right)+1\right]^{-k}\left[\mu_1\tau\left(1-\frac{k}{n}\right)+1\right]^{k-n}<$$
$$\leqslant\frac{2\pi e^{1-n}n^n}{(\mu_1\tau+1)^n}\left(\frac{2k}{n+k-1}\right)^k k^{1/2}(n-k)^{1/2}<\left(\frac{\pi}{2}e^3\right)^{1/2}\frac{\Gamma(n+3/2)}{(\mu_1\tau+1)^n}$$

Таким образом

$$\psi(y)\exp[-\mu_s(x-y)]\leqslant\exp[-\mu_2 s(x-y)]\,C_0B^{n-1}\times$$
$$\times\left(\frac{\pi}{2}e^5\right)^{1/2}\frac{\Gamma(n+3/2)}{(\mu_1\tau+1)^n},\qquad \forall y\in\bigcup_{k=0}^{n-1}G_k$$

Если $y\in G_n$, то

$$\psi(y)\exp[-\mu_s(x-y)]<C_0eB^{n-1}\frac{\Gamma(n+1)}{(\mu_1\tau+1)^n}$$

Из двух последних неравенств следует, что

$$\varphi(x)\leqslant C\left(\frac{\pi e^5}{2}\right)^{1/2}AB^{n-1}\frac{\Gamma(n+3/2)}{(\mu_1\tau+1)^n}\int\limits_G|y|^{-3/2}[s(y)+1]^{-1}\times$$
$$\times Q_2(x-y)\,dy+A\frac{e^{-\mu_2 s(x)}}{R^{3/2}}$$

$$Q_2(x)=R^{-3/2}e^{-\mu_2 s(x)}(1+R^{-1/2})$$

Применяя предложение 3, получим

$$\varphi(x)\leqslant C_0C_1\left(\frac{\pi e^5}{2}\right)^{1/2}AB^{n-1}\frac{\Gamma(n+3/2)}{(\mu_1\tau+1)^n}R^{-3/2}[s(x)+1]^{-3/2}+A\frac{e^{-\mu_3(x)}}{R^{3/2}}$$

Выберем B так, чтобы

(4.7) $$B\geqslant 2C_1A\left(\frac{\pi e^5}{2}\right)^{1/2}\mu_1\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+2)},\qquad n=2,3,\dots$$

Тогда

$$\varphi(x)\leqslant\frac{C_0B^n}{2}\frac{\Gamma(n+2)R^{-3/2}}{[\mu_1 s(x)+1]^{n+1}}+\frac{Ae\Gamma(n+2)R^{-3/2}}{[\mu_1 s(x)+1]^{n+1}}$$

Можно считать, что $Ae\leqslant 1/2B^n$, поэтому

$$\varphi(x)\leqslant C_0\frac{B^n\Gamma(n+2)}{[\mu_1 s(x)+1]^{n+1}}R^{-3/2}$$

Неравенство (4.6) выполняется при $n=1$, как это следует из (4.5). Поэтому оно справедливо для всех n и, следовательно

$$\varphi(x)\leqslant C_0\inf_n\frac{B^{n-1}n!}{[\mu_1 s(x)+1]^n}R^{-3/2}$$

откуда

$$\varphi(x) \leqslant C_1 R^{-3/2} \exp\left[-\frac{\mu_1}{B}s(x)\right][s(x)+1]^{1/2} \tag{4.8}$$

4.3. Покажем, что

$$\varphi(x) < C_h e^{-(\lambda-h)s(x)} R^{-3/2}$$

где h — сколь угодно малая положительная величина.

В самом деле, рассмотрим множество M тех $\mu > 0$, для которых

$$\sup{}_x R^{3/2}\varphi(x)\exp[\mu s(x)] < \infty \tag{4.9}$$

По доказанному множество M не пусто. Ясно, что если $\mu_0 \in M$, то $[0, \mu_0] \subset M$. Поэтому M — либо интервал $[0, m]$, либо полуинтервал $[0, m)$. Допустим, что $m < \lambda$. Возьмем $m_1 < m$, так, чтобы разность $m - m_1$ была достаточно мала. Положим $\varphi_0(x) = \varphi(x)\, e^{m_1 s(x)}$. По условию

$$\varphi_0(x) \leqslant C_0 R^{-3/2}[s(x)+1]^{-1} \tag{4.10}$$

Из неравенства (4.4) получим

$$\varphi_0(x) \leqslant A \int_G \frac{\varphi_0(y)\, Q_1(x-y)\, dy}{|y|\,[s(y)+1]} + A\frac{e^{-\mu_1 s(x)}}{R^{3/2}} \tag{4.11}$$

$$\mu_1 = \mu - m_1, \quad Q_1(x) = R^{-3/2} e^{\mu_1 s(x)}(1 + R^{-1/2})$$

Заметим, что μ сколько угодно мало отличается от λ и поэтому $\mu - m_1 > 0$. Применим результаты п. 4.2 к функции $\varphi_0(x)$. Из неравенства (4.11) следует, что

$$\varphi_0(x) \leqslant CR^{-3/2}\exp\left[-\frac{\mu_3}{B}s(x)\right][s(x)+1]^{1/2} \tag{4.12}$$

где можно принять $\mu_3 = {}^1/_3\,\mu_1$, а константа B определяется неравенствами (4.9) и не зависит от константы C_0, входящей в неравенство (4.10). Поэтому, если взять m_1 достаточно близким к m, то получим $m_1 + \mu_3 / B > m$. Тогда из (4.12) следует, что (4.9) будет выполняться при $\mu < m_1 + \mu_3 / B$, что абсурдно. Таким образом, показано, что $m = \lambda$, и следовательно

$$|\omega(x)| \leqslant C_h R^{-3/2}\exp[-(\lambda-h)(R-x_1)] \tag{4.13}$$

4.4. Формулу (4.1) легко уточнить. Делается это аналогично тому, как были доказаны предложения 2 и 3. Пользуясь неравенством (4.13), в результате несложных выкладок получим

$$\omega = \frac{\lambda}{4\pi}\nabla s \times a\,\frac{e^{-\lambda s}}{R} + O\,[R^{-2}e^{-(\lambda-h)\,s\,(x)}]$$

Поступила 2 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Leray J.* Etude de diverses equations integrales non linéaires et de quelques problémes que pose l'Hydrodynamique. J. math. and pures et Appl. 1933, vol. 9, 1—82.
2. *Leray J.* Les problèmes non linéaires. Enseignement. Math., 1936, vol. 35, p. 139—151.
3. *Ладыженская О. А.* Исследование уравнения Навье — Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости. Успехи матем. наук, 1959, т. 4, № 3.
4. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1970.

5. *Finn R.* On the steady-state solutions of the Navier — Stokes equations III, Acta Math., 1961, vol., 105, p. 197—244.
6. *Fujita H.* On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier — Stokes equations. J. Fac, Sci., Univ. Tokyo, Ser, 1. 1961, vol.. 9, p. 59—102.
7. *Finn R.* On the steady-state solutions of the Navier — Stokes partial differential equations. Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1959, vol. 3, No 5, 381—396.
8. *Clark D.* The vorticity at infinity for solutions of the stationary Navier — Stokes equations in exterior domains. Indiana Math. J., 1971, vol. 20, No. 7, p. 633—654.
9. *Пухначев В. В.* Оценка скорости убывания вихря вдали от тела вращения при осесимметричном обтекании его потоком вязкой несжимаемой жидкости. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 8, Новосибирск, 1971.
10. *Бабенко К. И.* Об асимптотическом поведении вихря вдали от тела при обтекании его плоским потоком вязкой жидкости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
11. *Finn R.* Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier — Stokes equations. Bull. Math, de la Soc. Sci. Math, Phys. de la RPR. 1959, t. 3 (51), No 4, p. 387—418.
12. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.