Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 62—50

ТЕОРЕМА О $2n$ ИНТЕРВАЛАХ В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПО ВЕЛИЧИНЕ И ИМПУЛЬСУ УПРАВЛЕНИЕМ

А. М. Формальский

(Москва)

Рассматриваются управляемые системы, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Предполагается, что управляющие силы ограничены одновременно по величине и по импульсу. Задача быстродействия для этого случая исследовалась, например, в работах [1–3].

Ниже доказывается теорема о $2n$ интервалах постоянства оптимального управления. Эта теорема аналогична теореме А. А. Фельдбаума об n интервалах [4, 5], которая имеет место в случае, когда управляющая сила ограничена только по величине.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую систему, описываемую линейным матричным дифференциальным уравнением с действительными постоянными коэффициентами

$$dx/dt = Ax + bu \tag{1.1}$$

Здесь $x = \| x_i \|$, $A = \| a_{ij} \|$, $b = \| b_i \|$ — матрицы порядка $(n \times 1)$, $(n \times n)$, $(n \times 1)$ соответственно, $u = u(t)$ — скалярная кусочно-непрерывная функция времени, удовлетворяющая одновременно двум ограничениям

$$|u(t)| \leqslant M \qquad (M = \mathrm{const} > 0) \tag{1.2}$$

$$\int_0^\infty |u(\tau)|\, d\tau \leqslant N \qquad (N = \mathrm{const} > 0) \tag{1.3}$$

Ограничения (1.2) и (1.3) присутствуют одновременно, например, в том случае, когда управление осуществляется с помощью реактивного двигателя. При этом неравенство (1.2) соответствует ограниченности секундного расхода топлива, а неравенство (1.3) — ограниченности запаса топлива двигателя.

Множество кусочно-непрерывных функций $u(t)$, удовлетворяющих одновременно неравенствам (1.2) и (1.3), обозначим через Ω.

Будем рассматривать задачу быстрейшего приведения системы (1.1) в начало координат с помощью управления $u(t) \in \Omega$.

2. Оптимальное управление. Решение уравнения (1.1) имеет вид

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, bu(\tau)\, d\tau \tag{2.1}$$

где $x(0)$ — начальное состояние системы. Пусть $x(t)=0$ при $t=T$, тогда из (2.1) имеем

$$-x(0)=\int_0^T e^{-A\tau}bu(\tau)\,d\tau \tag{2.2}$$

Если равенство (2.2) осуществляется с помощью допустимого управления $u(t)\in\Omega$, то это управление удовлетворяет неравенству

$$\int_0^T |u(\tau)|\,d\tau\leqslant N \tag{2.3}$$

Множество кусочно-непрерывных функций $u(t)$, удовлетворяющих условиям (1.2) и (2.3), обозначим через $\Omega(T)$. Введем обозначение

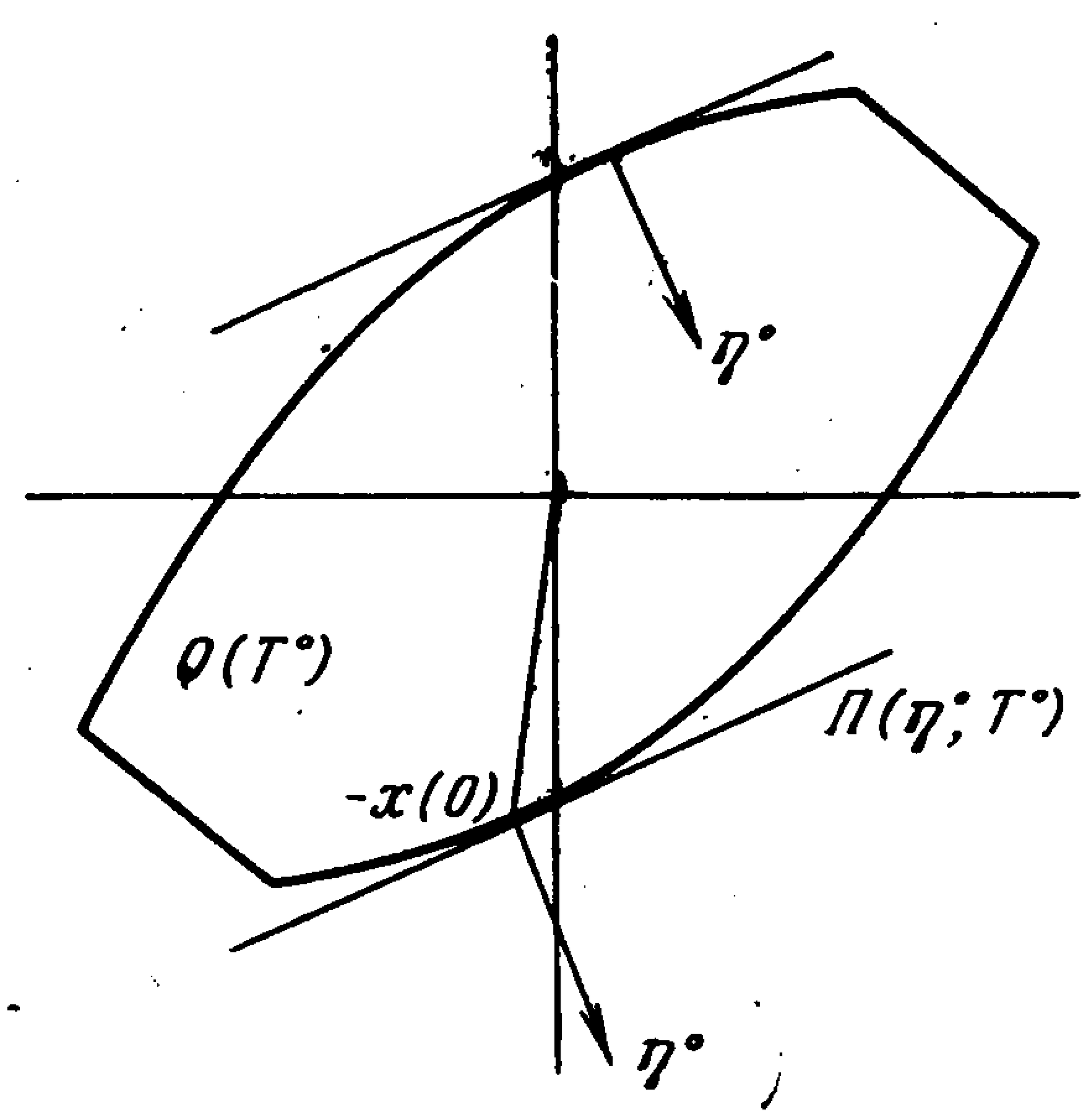
$$v(T)=\int_0^T e^{-A\tau}bu(\tau)\,d\tau$$

и рассмотрим в фазовом пространстве X_n область достижимости

$$Q(T)=\{v(T):\ u(t)\in\Omega(T)\}$$

Эта область обладает рядом свойств, описанных в [3,6].

Возьмем произвольный единичный вектор η $(1\times n)$ и построим опорные гиперплоскости множества $Q(T)$, ортогональные вектору η. Таких плоскостей две и они симметричны одна другой относительно начала координат. Обозначим через $\Pi(\eta, T)$ ту из плоскостей, для которой вектор η в точке касания является внешней нормалью множества $Q(T)$ (фиг. 1).



Фиг. 1

Пусть T° — минимальное время, за которое систему (1.1) можно привести из состояния $x(0)$ в начало координат, т. е. время быстродействия. Если точка $x(0)$ принадлежит области управляемости системы [6], то для нее существует минимальное время T°. Точка $x(0)$ (а также $-x(0)$) принадлежит границе области $Q(T^{\circ})$ [3,5]. Построим опорную гиперплоскость $\Pi(\eta^{\circ}, T^{\circ})$ множества $Q(T^{\circ})$, содержащую точку $-x(0)$ (фиг. 1). Если время быстродействия T°, отвечающее состоянию $x(0)$, удовлетворяет неравенству

$$MT^{\circ}\leqslant N \tag{2.4}$$

то оптимальное управление имеет вид [5]

$$u^{\circ}(t)=M\,\mathrm{sgn}\,[\eta^{\circ}e^{-At}b] \tag{2.5}$$

При условии (2.4) ограничение (1.3) несущественно.

Предположим, что имеет место неравенство

(2.6) $MT^\circ > N$

В этом случае оптимальное управление единственно и имеет вид [3]

(2.7) $$u^\circ(t) = \begin{cases} M \operatorname{sgn}[\eta^\circ e^{-At} b] & \text{при } t \in E(\sigma^\circ) \\ 0 & \text{при } t \in G(\sigma^\circ) \end{cases}$$

Здесь

$$E(\sigma) = \{t \in [0, T^\circ]: |\eta^\circ e^{-At} b| > \sigma\}$$

$$G(\sigma) = \{t \in [0, T^\circ]: |\eta^\circ e^{-At} b| \leqslant \sigma\} \quad (E(\sigma) \cup G(\sigma) = [0, T])$$

Величина σ° удовлетворяет уравнению

(2.8) $\mu E(\sigma) = N/M$

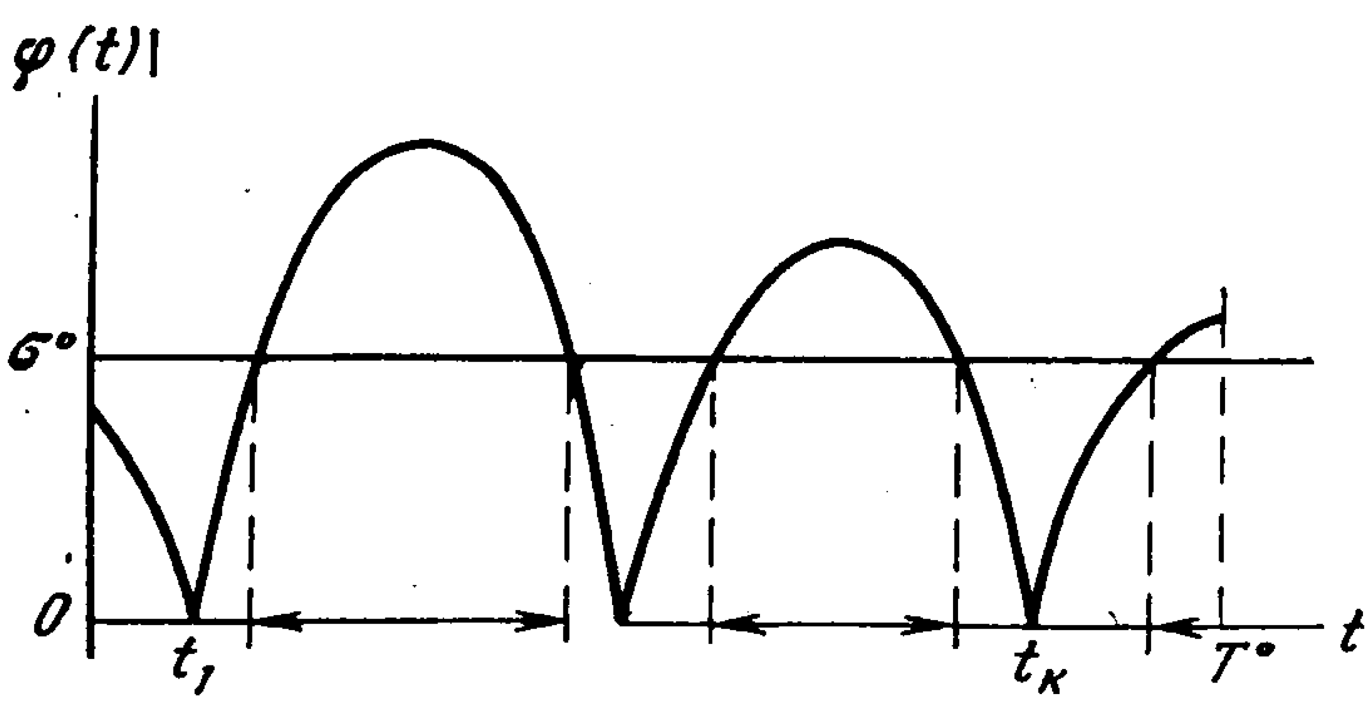
в котором $\mu E(\sigma)$ — мера в смысле Лебега [7] множества $E(\sigma)$.

Если опорная гиперплоскость $\Pi(\eta^\circ, T^\circ)$ единственна, то при условии (2.6) имеет место [3] неравенство

(2.9) $\varphi(t) = \eta^\circ e^{-At} b \not\equiv \text{const}$

Допустим, что опорная плоскость в точке $-x(0)$ не является единственной ($-x(0)$ есть угловая точка области $Q(T^\circ)$). В этом случае среди всех опорных плоскостей, содержащих точку $-x(0)$, можно [3] выбрать такую плоскость $\Pi(\eta^\circ, T^\circ)$, что для соответствующего вектора η° также имеет место неравенство (2.9). В дальнейшем будем считать вектор η° выбранным именно так.

Из аналитичности функции $\varphi(t)$ следует, что при условии (2.9) число l локальных максимумов функции $|\varphi(t)|$ на отрезке $[0, T^\circ]$ конечно. При этом множество $E(\sigma^\circ)$ состоит из конечного числа интервалов (на фиг. 2 это множество показано жирными линиями), сумма длин которых, в соответствии с уравнением (2.8), равна N/M. Множество $G(\sigma^\circ)$ состоит из конечного числа отрезков. Из выражения (2.7) следует, что оптимальное управление $u^\circ(t)$ имеет конечное число интервалов, на которых $|u^\circ(t)| \equiv M$, и конечное число интервалов, на которых $u^\circ(t) \equiv 0$; иначе говоря, управление $u^\circ(t)$ имеет конечное число интервалов постоянства.



Фиг. 2

3. Теорема о $2h$ интервалах. Утверждение о конечности числа интервалов постоянства оптимального управления имеет место для систем с любыми собственными значениями. Для систем с действительными собственными значениями имеет место более сильное утверждение.

Теорема. Если все собственные значения матрицы A действительны, то оптимальное управление $u^\circ(t)$ при любых начальных условиях имеет не более n интервалов, на которых $|u^\circ(t)| \equiv M$ и не более n интервалов, на которых $u^\circ(t) \equiv 0$. Следовательно, управление $u^\circ(t)$ имеет не более $2n$ интервалов постоянства.

Докажем эту теорему.

Если начальное состояние $x(0)$ таково, что минимальное время T° для него удовлетворяет неравенству (2.4), то оптимальное управление $u^\circ(t)$ (2.5) не имеет интервалов полной меры, на которых $u^\circ(t) \doteq 0$. Число интервалов, на которых $|u^\circ(t)| \equiv M$, в соответствии с теоремой А. А. Фельдбаума [4,5], не превосходит числа n.

Пусть теперь начальное условие $x(0)$ таково, что минимальное время T° для него удовлетворяет неравенству (2.6).

Число интервалов множества $E(\sigma^\circ)$ не превосходит числа l локальных максимумов функции $|\varphi(t)|$ на отрезке $[0, T^\circ]$ (фиг. 2).

Пусть $0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leqslant T^\circ$ есть k нулей функции $\varphi(t)$. Обозначим через m число точек на отрезке $[0, T^\circ]$, в которых равна нулю производная $\varphi'(t)$. Если все собственное значения матрицы A действительны, то $k \leqslant n-1$ и $m \leqslant n-1$ [5]. Локальные максимумы функции $|\varphi(t)|$ могут быть в точках, где $\varphi'(t) = 0$, а также в точках $t = 0$, $t = T^\circ$ (фиг. 2). Следовательно, $l \leqslant m + 2 \leqslant n + 1$. Докажем теперь, что $l \leqslant n$.

Предположим, что $l = n + 1$. Тогда функция $|\varphi(t)|$ имеет локальные максимумы в $m = n - 1$ точках интервала $(0, T^\circ)$ и в двух точках $t = 0$, $t = T^\circ$; при этом $t_1 > 0$ и $t_k < T^\circ$. Функция $|\varphi(t)|$ в этом случае не имеет на отрезке $[0, T^\circ]$ локальных минимумов, за исключением точек $t_1, \ldots, t_k$. На интервалах $(0, t_1)$, (t_k, T°) нет локальных максимумов, потому что в противном случае на этих интервалах были бы локальные минимумы. По той же причине на каждом из $k-1$ интервалов $(t_1, t_2), \ldots, (t_{k-1}, t_k)$ может быть только один максимум (фиг. 2). Тогда получается, что $m = k - 1 \leqslant n - 2$, а это противоречит равенству $m = n - 1$. Итак, $l \leqslant n$, и первая часть теоремы доказана.

Если $l = n$, то либо при $t = 0$, либо при $t = T^\circ$ функция $|\varphi(t)|$ достигает локального максимума. При этом множество $G(\sigma^\circ)$, на котором $u^\circ(t) \equiv 0$, состоит не более чем из n отрезков. В случае $l < n$ это утверждение тем более справедливо. Теорема доказана.

Если рассмотреть, например, уравнение первого порядка $x_1^\cdot = -x_1 + u$, то для достаточно удаленных от нуля точек $x_1(0)$ оптимальное управление в этом уравнении имеет ровно два интервала постоянства. Что касается, например, уравнения второго порядка $x^{\cdot\cdot} = u$, рассмотренного в [3], то для него при всех начальных условиях число интервалов постоянства не превосходит трех $(3 = 2n - 1)$.

При наличии только ограничения (1.2) дело обстоит иначе. Для любой вполне управляемой [8] системы с действительными собственными значениями существуют начальные состояния, при которых оптимальное управление имеет ровно n интервалов постоянства [4].

Отметим, что в системах с ограниченным только по импульсу управлением (неравенство (1.3)) имеет место «родственная» доказанной здесь теорема о числе импульсов [9–11].

Если система (1.1) не является вполне управляемой [8], т. е.

$$\operatorname{rang} \| b, Ab, \ldots, A^{n-1}b \| = \rho < n$$

то невырожденным преобразованием вида $y = Kx$ ее можно привести к следующей форме [12 :

$$dy_1/dt = A_{11}y_1 + A_{12}y_2 + b_1u, \qquad dy_2/dt = A_{22}y_2 \tag{3.1}$$

Здесь y_1 и y_2 — столбцы порядка $(\rho \times 1)$ и $((n - \rho) \times 1)$ соответственно. Матрицы A_{11}, A_{12}, A_{22}, b_1 имеют соответствующие порядки. При этом

$$\operatorname{rang} \| b_1, A_{11}b_1, \ldots, A_{11}^{\rho-1}b_1 \| = \rho$$

Систему (3.1) можно привести в начало координат только из тех точек $y(0)$, в которых $y_2(0) = 0$.

Используя доказанную выше теорему, можно утверждать, что если все собственные значения матрицы A_{11} действительны, то оптимальное управление в системе (1.1) при всех начальных условиях имеет не более 2ρ интервалов постоянства.

Поступила 28 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Neustadt L. W.* Time Optimal control systems with position and integral limits. J. Math. Analysis and Applications. 1961, vol. 3, No 3.
2. *Singh R. N. P.* Functional analysis approach to optimal control problems with multiple constraints on the controlling function. Internat. J. Control, 1969, vol. 9, No 1.
3. *Формальский А. М.* Задача быстродействия в системах с ограниченными по величине и импульсу управляющими силами. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
4. *Фельдбаум А. А.* Основы теории оптимальных автоматических систем. М., Физматгиз, 1963.
5. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М., «Наука», 1969.
6. *Формальский А. М.* Область управляемости систем с ограниченными ресурсами управления. Автоматика и телемеханика, 1968, № 3.
7. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. М., Физматгиз, 1961.
8. *Калман Р. Е.* Об общей теории систем управления. Тр. I конгресса ИФАК, М., Изд-во АН СССР, 1961, т. 2.
9. *Kreindler E.* Contributions to the Theory of Time Optimal Control. J. of Franklin Institute, 1963, vol. 275, No 4.
10. *Neustadt L. W.* Optimization a moment problem and nonlinear programming. SIAM J. on Control, 1964, vol. 2, No 1.
11. *Мархашов Л. М.* Об импульсных быстродействиях в линейных системах. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
12. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.