Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 62—50

К ПРОБЛЕМЕ ОПТИМАЛЬНОЙ РАССТАНОВКИ ИЗМЕРЕНИЙ В МЕТОДЕ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

В. М. Рудаков

(Москва)

Рассматривается задача о распределении заданного числа измерений на заданном отрезке, обеспечивающем наименьшую дисперсию оценки одного из параметров, линейно связанных с измеряемой функцией. В предположении о нормальном законе распределения ошибок измерений выводятся уравнения, описывающие необходимые условия экстремума соответствующей дисперсии. С помощью этих уравнений рассматриваются случаи оптимального расположения измерений на концах отрезка. Более подробно исследуется случай параболической регрессии, для которого устанавливается характер и количество оптимальных точек.

Одна из особенностей проблемы оптимальной расстановки наблюдений связана с тем, что она возникла в результате применения методов математической статистики, а ее разрешение требует привлечения других разделов математики. Так, например, в [1] методами математического анализа установлена оценка максимального числа оптимальных (по отношению к дисперсии оценки какого-либо параметра) моментов наблюдений, в [2] с помощью теории линейного программирования показано, что число оптимальных точек с различными вектор-градиентами от измеряемой функции по оцениваемым параметрам не превышает общего числа определяемых параметров. Это предложение доказывается при существенном условии о допустимости любых нецелых значений весовых коэффициентов (т. е. о континуальности их значений) с единственным требованием, чтобы сумма этих коэффициентов была равна общему числу измерений. Первое исследование по этому вопросу, по-видимому, проведено в [3], где рассмотрена указанная задача для двух параметров в предположении, что в точке можно проводить сколь угодно большое число измерений. В работах [4, 5], где использованы результаты [2], рассмотрены задачи одновременного выбора оптимальной стратегии и состава измерений при некоторых предположениях о характере корреляции между ними. Приведенные в этих работах утверждения и алгоритмы справедливы, строго говоря, при условии континуальности значений весовых коэффициентов, т. е. практически при достаточно большем объеме выборки. В [6] исследована общая задача о наблюдении с точки зрения принципа максимума Понтрягина применительно к системам линейных дифференциальных уравнений; процесс измерения интерпретирован как процесс управления с заданными ограничениями.

Ниже, в продолжение работы [1], рассматриваются некоторые вопросы, связанные с задачей оптимального расположения измерений без условия о континуальности значений весовых коэффициентов. Здесь, однако, не ставится задача построения вычислительного алгоритма, поэтому выведенные уравнения необходимых условий не дополняются условиями достаточности. Эти уравнения используются для аналитического получения некоторых результатов, в частности, они позволяют достаточно подробно исследовать случай параболической регрессии. Для этого случая доказано существование так называемых балластных моментов измерений, т. е. не приводящих к уменьшению априорной дисперсии какого-либо параметра. Показывается, что в данном случае эти моменты чередуются с оптимальными моментами измерений.

1. Уравнения оптимальных и балластных моментов измерений. Предположим, что между измеряемой функцией $y(t)$ и определяемыми параметрами $x_1, \ldots, x_m$ существует линейная зависимость

$$y(t) = \sum_{i=1}^{m} x_i f_i(t)$$

Здесь $f_i(t)$ — известные функции времени, которые считаются непрерывно дифференцируемыми на заданном отрезке $[t_0, T]$, где ищется оптимальное расположение данного числа измерений N.

Если положить, что независимые измерения функции $y(t)$ проводились в моменты $t_1, \ldots, t_N$ и при этом ошибка в каждом измерении распределяется по нормальному закону, то корреляционная матрица оценок параметров $x_1, \ldots, x_m$, находимых по методу наибольшего правдоподобия, будет иметь вид

$$K = C^{-1}, \quad C = \left\| \sum_{s=1}^{N} f_k(t_s) f_r(t_s) \right\| \quad (k, r = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

В этом выражении предполагается также, что математическое ожидание и дисперсия ошибки равны соответственно нулю и единице.

Рассмотрим задачу о минимизации дисперсии оценки какого-либо параметра x_i, т. е. диагонального элемента K_{ii} матрицы K, являющегося функцией от $t_1, \ldots, t_N$.

Найдем выражения для частных производных K_{ii} по каждому из переменных $t_1, \ldots, t_N$. Из соотношения (1.1) вытекает

$$\frac{\partial K}{\partial t_j} = -K \frac{\partial C}{\partial t_j} K \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial K_{ii}}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial K}{\partial t_j}\right)_{ii} = -\sum_{q, r=1}^{m} \left(\frac{\partial C}{\partial t_j}\right)_{qr} K_{qi} K_{ri}$$

Далее, поскольку

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t_j}\right)_{qr} = \frac{\partial C_{qr}}{\partial t_j} = f_q^{\cdot}(t_j) f_r(t_j) + f_q(t_j) f_r^{\cdot}(t_j)$$

то

$$\frac{\partial K_{ii}}{\partial t_j} = -2 \sum_{q=1}^{m} f_q^{\cdot}(t_j) K_{qi} \sum_{q=1}^{m} f_q(t_j) K_{qi} \tag{1.2}$$

Здесь и дальше, где это нужно, предполагается $\det C \neq 0$.

Таким образом, необходимые условия минимума K_{ii} даются уравнениями (по крайней мере — для моментов $t_j \in (t_0, T)$)

$$\sum_{q=1}^{m} f_q^{\cdot}(t_j) K_{qi} \sum_{q=1}^{m} f_q(t_j) K_{qi} = 0$$

Эта система уравнений распадается на две подсистемы

$$\sum_{q=1}^{m} f_q^{\cdot}(t_j) K_{qi} = 0 \tag{1.3}$$

$$\sum_{q=1}^{m} f_q(t_j) K_{qi} = 0 \tag{1.4}$$

Отметим, что уравнения (1.3) и (1.4) получаются заменой i-й строки матрицы C (1.1) соответственно строками $\{f_1^{\cdot}(t_j), \ldots, f_m^{\cdot}(t_j)\}$ и $\{f_1(t_j), \ldots, f_m(t_j)\}$ и приравниванием нулю определителей получившихся матриц.

Покажем, что решение подсистемы (1.4) не содержит оптимальных моментов, а определяет такие моменты (назовем их балластными), которым соответствуют измерения, не влияющие на величину дисперсии оценки параметра x_i. В соответствии с (1.1) и (1.4) имеем

$$\sum_{j=1}^{m} C_{jk}^{*} K_{ji} = \begin{cases} 0, & k \neq i \\ 1, & k = i \end{cases} \tag{1.5}$$

Здесь C_{jk}^* — элемент матрицы C^* — получается исключением в элементе C_{jk} матрицы C слагаемых, соответствующих моментам, которые удовлетворяют равенствам (1.4). Очевидно, $\det C^* = \det C$.

Соотношения (1.5) можно рассматривать как уравнения относительно величин K_{ji} $(j = 1, \ldots, m)$. Следовательно, если матрица C^* невырождена, что отвечает принятому условию $\det C \neq 0$ (при этом число балластных точек не должно превышать $N - m$), то величина K_{ii} не зависит от балластных моментов измерений.

Таким образом, доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Моменты измерений, удовлетворяющие условию (1.4), не влияют на величину дисперсии оценки соответствующего параметра. При условии $\det C \neq 0$ число таких моментов не превышает $N - m$.

Теорема 2. Оптимальные моменты измерений (расположенные в интервале (t_0, T) и минимизирующие дисперсию оценки соответствующего параметра) определяются соотношениями (1.3).

Отметим, что уравнения балластных моментов (1.4) можно вывести иначе. Пусть перед измерением существует корреляционная матрица K; после измерения корреляционная матрица будет равна

$$K_+ = K - (1 + f_*^T K \mathfrak{f}_*)^{-1} K \mathfrak{f}_* \mathfrak{f}_*^T K, \quad \mathfrak{f}_* = \left\| \begin{matrix} f_1(t^*) \\ \vdots \\ f_m(t^*) \end{matrix} \right\|$$

где t^* — момент измерения, так что

$$(K_+)_{ii} = K_{ii} - (1 + f_*^T K f_*)^{-1} J^2, \quad J = \sum_{j=1}^{m} K_{ij} f_j(t^*)$$

Отсюда следует, что при условии $J = 0$ момент t^* будет балластным. Это условие охватывается уравнениями (1.4).

Ниже приводятся примеры применения полученных соотношений, позволяющих установить в ряде случаев характер оптимального расположения моментов измерений.

2. Некоторые условия оптимального расположения измерений на концах заданного отрезка.

Пример 1. Рассмотрим вначале случай $m = 2$, т. е. когда измеряемая функция и определяемые параметры связаны соотношением $y(t) = x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t)$.

Здесь относительно функций $f_1(t)$, $f_2(t)$ и ошибки в измерении $y(t)$ сохраняются прежние предположения. Справедливо следующее утверждение.

Если на отрезке $[t_0, T]$

$$[f_1^2(t)]^{\cdot}\,[f_2^2(t)]^{\cdot} < 0 \tag{2.1}$$

то единственными оптимальными точками при минимизации дисперсии любого из двух параметров x_1, x_2 являются концы отрезка.

Доказательство непосредственно опирается на применение уравнений (1.3), которые в данном случае имеют вид

$$f_1^{\cdot}(t_k)\sum_{i=1}^{N} f_2^2(t_i) - f_2^{\cdot}(t_k)\sum_{i=1}^{N} f_1(t_i) f_2(t_i) = 0, \quad k = 1, \ldots, N \tag{2.2}$$

Заметив, что вследствие неравенства (2.1) каждая из функций $f_1^{\cdot}(t)$, $f_1(t)$, $f_2^{\cdot}(t)$, $f_2(t)$ знакоопределенна, это выражение можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^{N} f_2^2(t_i) - \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{f_1^{\cdot}(t_k) f_2^{\cdot}(t_k) f_1(t_i) f_2(t_i)}{[f_1^{\cdot}(t_k)]^2}\right\} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

Дробь в фигурных скобках согласно неравенству (2.1) при любых $k = 1,\ldots,N$ отрицательна, следовательно, (2.2) ни при каких $t_i \in [t_0, T]$ не имеет решения. Отсюда и вытекает, что оптимальное расположение измерений — на концах отрезка.

Аналогичные достаточные условия можно сформулировать для произвольного m, однако запись их в общем виде весьма громоздка.

Пример 2. Рассмотрим эти условия еще для $m = 3$ и покажем, что справедливо следующее утверждение. Если на отрезке $[t_0, T]$

$$S \equiv \left[\frac{f_2^{\cdot}(t)}{f_1^{\cdot}(t)}\right]^{\cdot}\left[\frac{f_3^{\cdot}(t)}{f_1^{\cdot}(t)}\right]^{\cdot}\left[\frac{f_1(t)}{f_3(t)}\right]^{\cdot}\left[\frac{f_1(t)}{f_2(t)}\right]^{\cdot}\left[\frac{f_2(t)}{f_3(t)}\right]^{\cdot} < 0 \tag{2.3}$$

то в этом отрезке имеются три различных оптимальных точки, причем две из них совпадают с концами отрезка.

Используя для доказательства соотношение между измеряемой функцией и определяемыми параметрами $y(t) = x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) + x_3 f_3(t)$, выпишем соотношения (1.3). Получим

$$f_1^{\cdot}(t_k) Q_{11} + f_2^{\cdot}(t_k) Q_{12} + f_3^{\cdot}(t_k) Q_{13} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, N) \tag{2.4}$$

$$Q_{11} = \sum_{i=1}^{N} f_2^2(t_i)\sum_{i=1}^{N} f_3^2(t_i) - \left[\sum_{i=1}^{N} f_2(t_i) f_3(t_i)\right]^2$$

$$Q_{12} = -\sum_{i=1}^{N} f_1(t_i) f_2(t_i)\sum_{i=1}^{N} f_3^2(t_i) + \sum_{i=1}^{N} f_1(t_i) f_3(t_i)\sum_{i=1}^{N} f_2(t_i) f_3(t_i)$$

$$Q_{13} = \sum_{i=1}^{N} f_1(t_i) f_2(t_i)\sum_{i=1}^{N} f_2(t_i) f_3(t_i) - \sum_{i=1}^{N} f_2^2(t_i)\sum_{i=1}^{N} f_1(t_i) f_3(f_i)$$

Для определения знака Q_{12} с учетом неравенства (2.3) представим Q_{12} двойной суммой

$$Q_{12} = -\sum_{i,j=1}^{N} [f_1(t_i) f_2(t_i) f_3^2(t_j) - f_1(t_i) f_3(t_i) f_2(t_j) f_3(t_j)] =$$

$$= -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{N} f_3^2(t_j) f_3^2(t_i) \left[\frac{f_1(t)}{f_3(t)}\right]^{\cdot}_{ij} \left[\frac{f_2(t)}{f_3(t)}\right]^{\cdot}_{ij} (t_i - t_j)^2$$

Здесь производная $[f_1(t) / f_3(t)]^{\cdot}$ берется в некоторой точке t_{ij}, $t_i \leqslant t_{ij} \leqslant t_j$. То же относится и к производной $[f_2(t) / f_3(t)]^{\cdot}$, но, разумеется, точка, в которой она вычисляется, может быть другой.

Согласно неравенству (2.3), функция $[f_1(t) / f_3(t)]^{\cdot} [f_2(t) / f_3(t)]^{\cdot}$ сохраняет знак на отрезке $[t_0, T]$, поэтому

$$\operatorname{sign} Q_{12} = -\operatorname{sign}\left\{\left[\frac{f_1(t)}{f_3(t)}\right]^{\cdot} \left[\frac{f_2(t)}{f_3(t)}\right]^{\cdot}\right\} \tag{2.5}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\operatorname{sign} Q_{13} = -\operatorname{sign}\left\{\left[\frac{f_1(t)}{f_2(t)}\right]^{\cdot} \left[\frac{f_3(t)}{f_2(t)}\right]^{\cdot}\right\} \tag{2.6}$$

Разделив теперь левую часть уравнения (2.4) на $f_1^{\cdot}(t_k)$ и продифференцировав полученное выражение по t_k, найдем

$$Q_{12}\left[\frac{f_2^{\cdot}(t)}{f_1^{\cdot}(t)}\right]^{\cdot}_{t_k} + Q_{13}\left[\frac{f_3^{\cdot}(t)}{f_1^{\cdot}(t)}\right]^{\cdot}_{t_k} \neq 0$$

при любом $t_k \in [t_0, T]$, так как, согласно (2.3), (2.5), (2.6)

$$\operatorname{sign}\left\{Q_{12}\left[\frac{f_2^{\cdot}(t)}{f_1^{\cdot}(t)}\right]^{\cdot} Q_{13}\left[\frac{f_3^{\cdot}(t)}{f_1^{\cdot}(t)}\right]^{\cdot}\right\} = -\operatorname{sign} S = 1$$

При выводе этого равенства учитывалось, что

$$\operatorname{sign}\left\{\left[\frac{f_2(t)}{f_3(t)}\right]^{\cdot} \left[\frac{f_3(t)}{f_2(t)}\right]^{\cdot}\right\} = -1$$

Отметим, что при дифференцировании коэффициенты Q_{11}, Q_{12}, Q_{13} можно считать постоянными. Действительно, если предположить, что оптимальные моменты $t_1, \ldots, t_N$ найдены, то по крайней мере некоторые из них должны являться нулями функции

$$F(t) = Q_{11} + Q_{12}\frac{f_2^{\cdot}(t)}{f_1^{\cdot}(t)} + Q_{13}\frac{f_3^{\cdot}(t)}{f_1^{\cdot}(t)}$$

для оценки числа которых можно воспользоваться дифференцированием функции $F(t)$.

Таким образом, в предположении, что оптимальное расположение существует, находим, что уравнение (2.4) определяет лишь один оптимальный момент внутри отрезка $[t_0, T]$. Следовательно, двумя другими моментами оказываются t_0 и T.

3. Концы отрезка при оптимальной расстановке измерений в случае параболической регрессии. Рассмотрим применение полученных выше соотношений к задаче оптимальной расстановки измерений для случая, когда измеряемая функция $y(t)$ и определяемые параметры связаны зависимостью

$$y(t)=x_0t^{u_0}+x_1t^{u_1}+\ldots+x_mt^{u_m}$$

Здесь $u_0,\ldots, u_m$ — натуральные числа (может быть также $u_0=0$), причем $u_0<u_1\ldots<u_m$. Будем считать, что $t_0>0$.

Пусть найдены оптимальные моменты измерений на отрезке $[t_0, T]$, минимизирующие дисперсию оценки параметра $x_j: t_1,\ldots t_N$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. В интервале (t_0, T) существуют m балластных точек. Для доказательства обозначим

$$L_j(t)=\sum_{k=0}^{m}Q_{kj}t^{u_k},\qquad C=\left\|\sum_{q=1}^{N}t_q^{u_i+u_j}\right\|\quad (i,\ j=0,\ldots,m) \tag{3.1}$$

где Q_{kj} — алгебраические дополнения элементов C_{kj} матрицы C.

Введем функционал Φ на множестве многочленов вида

$$R(t)=\sum_{i,\ k=0}^{m}r_{ik}t^{u_i+u_k}$$

для которых

$$\Phi\{R(t)\}=\sum_{i=1}^{N}R(t_i) \tag{3.2}$$

Здесь $t_1,\ldots, t_N$ — моменты оптимальных измерений. Отметим, что если при $t\in[t_0, T]$ многочлен $R(t)\geqslant 0$ и имеет в этом отрезке $k<N$ корней, то $\Phi\ \{R(t)\}>0$.

Можно показать, исследуя соответствующие определители, что

$$\Phi\{L_j(t)\,t^{u_s}\}=\begin{cases}0,\ 0\leqslant s<j,\ m\geqslant s>j\\ \det C,\ s=j\end{cases} \tag{3.3}$$

Здесь $L_j(s)$ определяется выражением (3.1).

В дальнейшем понадобится следующая лемма.

Лемма. Если многочлен

$$u(t)=a_0t^{u_0}+\ldots+a_pt^{u_p},\qquad t>0$$

имеет $k<p$ перемен знака в точках $\tau_1,\ldots,\tau_k$ ($\tau_i>0$), то существует многочлен

$$w^k(t)=b_0(t)^{u_{q_0}}+\ldots+b_kt^{u_{q_k}}$$

имеющий точно k действительных положительных корней, расположенных в тех же точках $\tau_1,\ldots,\tau_k$, причем среди показателей может не быть одного наперед заданного, например, u_j. Здесь индексы (различные) $q_0,\ldots, q_k$ берутся из последовательности $\{0, 1,\ldots, p\}$, $q_i\neq j$.

Для доказательства предположим, что показатели $u_{q_0},\ldots,u_{q_k}$, среди которых нет u_j, определены и остается лишь найти коэффициенты $b_0,\ldots,b_{j-1}, b_{j+1},\ldots,b_k$ полинома $w^k(t)$ из системы уравнений

$$\sum_{i=0}^{k}b_i\tau_s^{u_{q_i}}=0\qquad (s=1,\ldots,k) \tag{3.4}$$

Коэффициент b_0 положим равным единице. Тогда для того, чтобы эта система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы были равны ранги матриц A_1 и A_2, где

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} \tau_1^{u_{q_1}} & \ldots & \tau_1^{u_{q_k}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_k^{u_{q_1}} & \ldots & \tau_k^{u_{q_k}} \end{matrix} \right\|, \qquad A_2 = \left\| \begin{matrix} \tau_1^{u_{q_0}} & \tau_1^{u_{q_1}} & \ldots & \tau_1^{u_{q_k}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_k^{u_{q_0}} & \tau_k^{u_{q_1}} & \ldots & \tau_k^{u_{q_k}} \end{matrix} \right\|$$

Следовательно, индексы $q_0,\ldots, q_k$ должны быть такими, чтобы выполнялось это условие разрешимости. Покажем, что такой выбор всегда можно произвести. Действительно, точки $\tau_1,\ldots,\tau_k$ — корни многочлена $u(t)$, т. е.

$$\sum_{i=0}^{p} a_i \tau_s^{u_i} = 0 \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

Разделим систему на a_j и перепишем ее в таком виде:

$$\sum_{i=0}^{p} a_i' \tau_s^{u_i} = -\tau^{u_j}, \qquad a_i' = \frac{a_i}{a_j} \qquad (s = 1, \ldots, k)$$

Поскольку $\tau_1,\ldots, \tau_k$ — разные корни многочлена $u(t)$, ранг основной матрицы этой системы, рассматриваемой относительно коэффициентов $a_0',\ldots,a_p'$ ($a_j' = 0$), равен k. Это означает, что найдутся такие k столбцов основной матрицы, из которых можно составить матрицу A_1 с рангом k. Поскольку $k \leqslant p - 1$, то найдется еще один столбец, присоединив который к матрице A_1 получим матрицу A_2 с тем же рангом. Следовательно, показатели $u_{q_0},\ldots,u_{q_k}$ можно выбрать такими, чтобы система (3.4) имела решение и определяла многочлен $w^k(t)$, который по теореме Декарта имеет не более k действительных корней, т. е. его корни — $\tau_1,\ldots,\tau_k$, что и доказывает лемму.

Предположим теперь, что многочлен $L_j(t)$ имеет $k < m$ перемен знака. Тогда в соответствии с леммой можно составить такой многочлен:

$$w_j^k(t) = t^{u_{q_0}} + \sum_{i=1}^{k} b_i t^{u_{q_i}}, \qquad q_i \neq j \qquad (i = 0, 1, \ldots, k)$$

что многочлен $\bar{L}_j(t) = \vartheta L_j(t) w_j^k(t)$ при соответствующем выборе знака константы ϑ будет неотрицательным на отрезке $[t_0, T]$. Поэтому должно выполняться неравенство $\Phi\{\bar{L}_j(t)\} > 0$, поскольку $k < m \leqslant N$. Но из (3.2) вытекает, что $\Phi\{\bar{L}_j(t)\} = 0$.

Полученное противоречие показывает, что число перемен знака многочлена $L_j(t)$ (при $t > 0$) равно m.

Из хода доказательства ясно, что $L_j(t)$ не может обратиться в нуль на концах отрезка $[t_0, T]$. В противном случае можно было бы исключить в функционале Φ концы отрезка и доказать, что, например, на отрезке $[t_1, T]$ полином $L_j(t)$ имеет m корней. Но тогда бы оказалось, что на всей положительной полуоси $t > 0$ этот многочлен имеет $m + 1$ корень, что противоречит теореме Декарта.

Таким образом, все балластные точки находятся внутри интервала измерений (t_0, T).

Рассмотрим применение теоремы 3 при а) $u_0 = 0$, б) $u_0 > 0$.

В случае а) из доказанной теоремы вытекает следствие.

Следствие. При $u_0 = 0$ на отрезке наблюдений $[t_0, T]$ существуют $m+1$ различных оптимальных моментов измерений, причем два из них соответствуют концам этого отрезка. Эти моменты чередуются с балластными.

Действительно, поскольку многочлен $L_j(t)$ в интервале (t_0, T) имеет m простых корней, то его производная имеет в этом же интервале не менее $m-1$ простых корней. Но при $u_0 = 0$ многочлен $L_j^{\bullet}(t)$ по теореме Декарта не более $m-1$ раз обращается в нуль, поэтому все $m-1$ корней находятся внутри интервала (t_0, T). Отсюда следует, что двумя недостающими оптимальными точками могут быть только концы отрезка измерений.

На основании полученных результатов исследуем зависимость точности оценок от длины интервала измерений, которую назовем базой. Во многих прикладных задачах считается, что с ростом базы точность оценок возрастает. В данном случае существует строгое доказательство этого предположения.

Теорема 4. При $u_0 = 0$ и оптимальном расположении измерений дисперсия оценок убывает с уменьшением t_0 и (независимо) с ростом T.

Для доказательства положим, что оптимальные моменты измерений $t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, T$ при фиксированных значениях t_0, T уже найдены. (Согласно следствию из теоремы граничные моменты t_0, T также являются оптимальными.) Считая теперь величины t_0, T переменными, а $t_1, \ldots, t_{m-1}$ — постоянными, вычислим дифференциал дисперсии оценки какого-либо параметра x_j. Получим

$$dK_{jj} = -\frac{2}{(\det C)^2}\,[L_j(t_0)\,L_j^{\bullet}(t_0)\,dt_0 + L_j(T)\,L_j^{\bullet}(t)\,dT] \quad (dt_0 < 0,\ dT > 0)$$

Все корни многочленов $L_j(t)$ и $L_j^{\bullet}(t)$ лежат слева от T, поэтому при $t = T$ эти многочлены имеют один и тот же знак — знак коэффициента старшего члена. Следовательно, $L_j(T)\ L_j^{\bullet}(T) > 0$.

Из распределения корней многочленов $L_j(t)$ и $L_j^{\bullet}(t)$ следует, что

$$\operatorname{sign} L_j(t_0) = (-1)^m \operatorname{sign} L_j(T) \qquad \operatorname{sign} L_j^{\bullet}(t_0) = (-1)^{m-1} \operatorname{sign} L_j^{\bullet}(T)$$

Но при $t = T$ $\operatorname{sign} L_j(t) = \operatorname{sign} L_j^{\bullet}(t)$, поэтому $L_j^{\bullet}(t_0)\ L_j(t_0) < 0$, что и доказывает теорему.

Рассмотрим теперь случай б): $u_0 > 0$.

Теорема 5. При $u_0 > 0$ точность оценок монотонно растет с увеличением T.

Согласно теореме 3, многочлен $L_j(t)$ имеет m простых корней в интервале (t_0, T) и, следовательно, производная $L_j^{\bullet}(t)$ имеет не менее $m-1$ простых (лежащих между корнями многочлена $L_j(t)$) корней. Можно показать, что m-й положительный корень $L_j^{\bullet}(t)$, который должен существовать по теореме Декарта, меньше наименьшего положительного корня многочлена $L_j(t)$. Достаточно учесть, что в точке $t = 0$ функция $L_j(t)$ также обращается в нуль, поэтому между наименьшим положительным корнем многочлена $L_j(t)$ и точкой $t = 0$ должна найтись точка $t = t^* > 0$, где $L_j^{\cdot}(t^*) = 0$. Таким образом, все положительные корни многочленов $L_j(t)$ и $L_j^{\cdot}(t)$ меньше T, так что при $t = T$ оба многочлена имеют одинаковый знак — знак коэффициента при старшем члене. Дальнейшие рассуждения совпадают с изложенными при доказательстве теоремы 4, но в отличие от случая $u_0 = 0$ левый конец заданного отрезка может и не быть оптимальным моментом, вследствие чего уменьшение значения t_0 не всегда приводит к уменьшению дисперсии оценок.

Для иллюстрации этого обстоятельства рассмотрим пример. Пусть

$$y(t) = x_0 t^{u_0} + x_1 t^{u_1}, \quad u_1 > u_0 > 0, \quad t \in [t_0, T]$$

Дисперсия оценки параметра x_0 после двух измерений в оптимальном случае равна

$$\sigma^2 = \frac{\bar{t}^{2u_1} + T^{2u_1}}{(\bar{t}^{u_0}T^{u_1} - \bar{t}^{u_1}T^{u_0})^2} = \frac{1}{T^{2u_0}} \frac{1 + \tau^{2u_1}}{(\tau^{u_1} - \tau^{u_0})^2}, \qquad \tau = \frac{\bar{t}}{T} \tag{3.5}$$

где $\bar{t}$ выбрано таким, чтобы при заданном T выражение (3.5) имело минимум. Уравнение экстремальных точек функции

$$\varphi(\tau) = \frac{1 + \tau^{2u_1}}{(\tau^{u_1} - \tau^{u_0})^2}, \qquad 0 < \tau < 1$$

имеет вид

$$(u_1 - u_0)\tau^{2u_1} + u_1\tau^{u_1 - u_0} - u_0 = 0 \tag{3.6}$$

Согласно теореме Декарта, это уравнение имеет один положительный корень τ^*. Поскольку многочлен в левой части (3.6) при $\tau = 0$ меньше нуля, а при $\tau = 1$ — больше нуля, $0 < \tau^* < 1$. Именно это значение τ^* обеспечивает абсолютный минимум функции $\varphi(\tau)$ и, следовательно, σ^2, так что оптимальным значением $\bar{t}$ является величина $\bar{t} = \tau^* T$.

Таким образом, если $\bar{t} > t_0$, то один из оптимальных моментов измерений находится внутри отрезка $[t_0, T]$, если же $t_0 \geqslant \bar{t}$, то этот момент совпадает с левым концом этого отрезка.

Аналогичные выводы имеют место для случая любого m, при этом величина $\bar{t}$ может зависеть еще и от числа измерений.

Автор благодарит Т. М. Энеева, Ф. Л. Черноусько, Ю. С. Тумашева за внимание к работе.

Поступила 14 XII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рудаков В. М.* Об оптимальном выборе моментов навигационных наблюдений. Космич. исследования, 1969, № 3.
2. *Ершов В. Г.* Об оптимизации программы траекторных измерений. Космич. исследования, 1970, № 1.
3. *Elfving G.* Optimum allocation in linear regression theory. Ann. Math. Statistics, 1952, vol. 23, No. 2, p. 255.
4. *Бахшиян Б. Ц., Эльясберг П. Е.* Выбор оптимальной стратегии определения орбит. Автоматика и телемеханика, 1970, № 3.
5. *Бахшиян Б. Ц.* Выбор оптимальных моментов независимых траекторных измерений. Космич. исследования, 1970, № 1.
6. *Черноусько Ф. Л.* Об оптимизации процесса наблюдений. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.