Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 531.36

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

А. С. Озиранер

(Москва)

Устанавливается аналогия между некоторыми свойствами функций Ляпунова и равномерной сходимостью функциональных рядов и последовательностей, удовлетворяющих условиям теоремы Дини. Для автономных систем известные теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных, основанные на использовании функции Ляпунова со знакопостоянной производной, обобщаются в направлении ослабления условий на множество, на котором обращается в нуль производная от функции Ляпунова. Рассматривается устойчивость относительно части переменных по линейному приближению.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \qquad (\mathbf{X}(t, 0) \equiv 0) \tag{1.1}$$

в которой $\mathbf{x} = (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$ — вещественный n-вектор, $m > 0$, $p \geqslant 0$, $n = m + p$. Предположим, что

а) правые части системы (1.1) в области

$$t \geqslant 0, \qquad \| \mathbf{y} \| \leqslant H > 0, \qquad 0 \leqslant \| \mathbf{z} \| < \infty \tag{1.2}$$

непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения;

б) решения системы (1.1) $\mathbf{z}$-продолжимы, т. е. любое решение $\mathbf{x}(t)$ определено при всех $t \geqslant 0$, для которых $\| \mathbf{y}(t) \| \leqslant H$.

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ — решение системы (1.1), определенное начальными условиями $\mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ (здесь приняты обозначения обзорной статьи [1]).

Определение. Движение $\mathbf{x} = 0$ называется асимптотически $\mathbf{y}$-устойчивым равномерно по $\mathbf{x}_0$, если оно $\mathbf{y}$-устойчиво и для каждого $t_0 \geqslant 0$ существует такое $\delta(t_0) > 0$, что

$$\| \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \| \underset{\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \delta(t_0)}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{1.3}$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon, t_0) > 0$, при котором из $\| \mathbf{x}_0 \| \leqslant \delta$ следует $\| \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0) \| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0 + T$.

Замечание. В отличие от определения, принятого в [2], число $\delta(t_0)$ может зависеть от t_0.

В работе [3] доказана общая теорема об асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости. Оказывается, что условия этой теоремы гарантируют равномерность по $\mathbf{x}_0$.

Теорема 1. Если непрерывная функция $V(t, \mathbf{x})$ такова, что

$$V(t, \mathbf{x}) \geqslant a(\|\mathbf{y}\|) \quad (a(0) = 0) \tag{1.4}$$

где $a(r)$ — непрерывная монотонно возрастающая на $[0, H]$ функция, и для любого $t_0 \geqslant 0$ существует $\delta(t_0) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \delta$ следует $V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \downarrow 0$[1] при $t \to \infty$, то движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически у-устойчиво равномерно по $\mathbf{x}_0$.

Доказательство. Движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически у-устойчиво [3]. Покажем, что

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \underset{\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \delta(t_0)}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{1.5}$$

По условию, для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ и $\mathbf{x}_0$ с $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \delta(t_0)$ найдется $T(\varepsilon, t_0, \mathbf{x}_0) > 0$, при котором $V(t_0 + T, \mathbf{x}(t_0 + T; t_0, \mathbf{x}_0)) < \varepsilon$. В силу непрерывности функции V и непрерывной зависимости решения от начальных условий существует такая окрестность $O(\mathbf{x}_0)$ точки $\mathbf{x}_0$, что

$$V(t_0 + T, \mathbf{x}(t_0 + T; t_0, \mathbf{x}_0')) < \varepsilon \quad \text{при } \mathbf{x}_0' \in O(\mathbf{x}_0) \tag{1.6}$$

Ввиду монотонного убывания функции V из (1.6) следует

$$V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0')) < \varepsilon \text{ при } t \geqslant t_0 + T(\varepsilon, t_0, \mathbf{x}_0), \quad \mathbf{x}_0' \in O(\mathbf{x}_0)$$

Компактная область $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \delta$ оказывается покрытой системой окрестностей $\{O(\mathbf{x}_0)\}$, из которой можно выделить конечное подпокрытие $O_1, \ldots, O_s$ с соответствующими числами $T_1, \ldots, T_s$. Положим $T(\varepsilon, t_0) = \max\{T_1, \ldots, T_s\}$. Тогда $V(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0 + T(\varepsilon, t_0)$, если только $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \delta(t_0)$, что и доказывает (1.5). Из (1.5), согласно (1.4), вытекает (1.3). Теорема доказана.

Замечания. 1) Аналогичные рассуждения могут применяться [4] к системам с бесконечным числом степеней свободы.

2) Теорема 1 устанавливает аналогию между некоторыми свойствами функций Ляпунова и равномерной сходимостью функциональных рядов и последовательностей, удовлетворяющих условиям теоремы Дини [5].

Следствие 1 [6]. Если система (1.1) ω-периодична по t, а ее правые части в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ удовлетворяют условию Липшица по $\mathbf{x}$, и выполнены условия теоремы 1, то движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически у-устойчиво равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$.

Действительно, по теореме 1 существует такое $\delta(0) = \delta_0 > 0$, что

$$\|\mathbf{y}(t; 0, \mathbf{x}_0)\| \underset{\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \delta_0}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

Но тогда движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически у-устойчиво равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$ из области $t_0 \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \lambda$, где $\lambda > 0$ таково, что $\|\mathbf{x}(\omega; \tau, \mathbf{x}_0)\| \leqslant \delta_0$, если $\tau \in [0, \omega]$, $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \lambda$.

---

[1] Запись $V \downarrow 0$ означает «V стремится к нулю, монотонно убывая (в широком смысле)».

Таким образом, в теореме 1 работы [6] можно отказаться от требования ω-периодичности по t функции V.

Аналогичные дополнения справедливы для теорем [4,7].

Следствие 2 [4]. Если функция $V(t, \mathrm{x})$ удовлетворяет неравенству (1.4), ее производная $V^{\cdot}(t, \mathrm{x}) \leqslant -W(t, \mathrm{x})$, причем $W(t, \mathrm{x}) \geqslant b(\|\mathrm{y}\|)$ ($b(r)$ — функция типа $a(r)$), а $W^{\cdot} \leqslant 0$, то движение $\mathrm{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво равномерно по x_0. Если, кроме того, система (1.1) ω-периодична по t, то асимптотическая y-устойчивость равномерна по $\{t_0, \mathrm{x}_0\}$.

Следствие 3 [7]. Если функция $V(t, \mathrm{x})$ удовлетворяет неравенству (1.4), $V^{\cdot} \leqslant 0$, и для любого $\eta > 0$ из $V(\tau, \mathrm{x}) \geqslant \eta$, $\|\mathrm{y}\| \leqslant H$ следует $V^{\cdot}(\tau, \mathrm{x}) \leqslant -m_\eta(\tau)$, причем

$$\int_0^\infty m_\eta(\tau)\, d\tau = +\infty$$

то движение $\mathrm{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво равномерно по x_0. Если, кроме того, система (1.1) ω-периодична по t, то асимптотическая y-устойчивость равномерна по $\{t_0, \mathrm{x}_0\}$.

Доказательство. Если выполнены условия следствия 2 (следствия 3), то, как показано в [4] (в [7]), для любого $t_0 \geqslant 0$ существует $\delta(t_0) > 0$ такое, что из $\|\mathrm{x}_0\| \leqslant \delta$ следует

$$W(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) \downarrow 0 \quad (V(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) \downarrow 0) \text{ при } t \to \infty.$$

Поэтому применимы теорема 1 и следствие 1, что и завершает доказательство[1].

2. Рассматривается автономная система

$$\mathrm{x}^{\cdot} = \mathrm{X}(\mathrm{x}) \tag{2.1}$$

В работах [3,8] для системы (2.1) предложены критерии асимптотической y-устойчивости и y-неустойчивости, использующие функции $V(\mathrm{x})$ со знакопостоянной производной $V^{\cdot}$ при некоторых требованиях к множеству $M = \{\mathrm{x}\colon V^{\cdot}(\mathrm{x}) = 0\}$. Эти условия на множество M можно несколько ослабить.

Теорема 2 [3,8]. Предположим, что каждое решение системы (2.1), начинающееся в некоторой окрестности точки $\mathrm{x} = 0$, ограничено, и пусть функция $V(\mathrm{x})$ такова, что $V(\mathrm{x}) \geqslant a(\|\mathrm{y}\|)$, а ее производная в силу системы (2.1)

$$V^{\cdot}(\mathrm{x}) = 0 \quad \text{при } \mathrm{x} \in M, \qquad V^{\cdot}(\mathrm{x}) < 0 \quad \text{при } \mathrm{x} \overline{\in} M \tag{2.2}$$

---

[1] *Дополнение при корректуре.* Недавно автору стала известна работа [14], опубликованная после того, как настоящая статья была сдана в печать. Оказалось, что в следствии 2 условия на функцию V можно несколько ослабить, заменив неравенство (1.4) требованием ограниченности снизу функции V. При этом доказательство [4] того, что $W(t, \mathrm{x}(t; t_0, \mathrm{x}_0)) \downarrow 0$ при $t \to \infty$, сохраняется.

Обозначим $M_1 = \{\mathbf{x}\colon V(\mathbf{x}) > 0\}$, $M_0 = M_1 \cap M$. Если множество M_0 не содержит целых траекторий [1] при $t \in [0, \infty)$, то движение $\mathbf{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$.

Доказательство. В силу y-устойчивости движения $\mathbf{x} = 0$ для любого $\varepsilon \in (0, H)$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \delta$ следует $\|\mathbf{y}(t; 0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant 0$. Покажем, что из $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \delta$ вытекает $V(\mathbf{x}(t; 0, \mathbf{x}_0)) \downarrow 0$ при $t \to \infty$. Ввиду $V^\cdot \leqslant 0$ существует $\lim V(\mathbf{x}(t; 0, \mathbf{x}_0)) = V_* \geqslant 0$ при $t \to \infty$. Если $V_* > 0$, то

$$V(\mathbf{x}(t; 0, \mathbf{x}_0)) \geqslant V_* > 0 \quad \text{при } t \geqslant 0 \tag{2.3}$$

В силу ограниченности решения, для некоторой последовательности $t_k \to \infty$ будет $\mathbf{x}(t_k; 0, \mathbf{x}_0) \to \mathbf{x}_*$, причем по непрерывности $V(\mathbf{x}_*) = V_*$. Если допустить, что $V(\mathbf{x}(t; 0, \mathbf{x}_*)) \equiv V_* > 0$ при $t \geqslant 0$, то $V^\cdot(\mathbf{x}(t; 0, \mathbf{x}_*)) \equiv 0$, и, следовательно, $\mathbf{x}(t; 0, \mathbf{x}_*) \in M_1 \cap M = M_0$, что противоречит условию. Поэтому при некотором $T > 0$ будет $V(\mathbf{x}(T; 0, \mathbf{x}_*)) < V_*$. В силу непрерывной зависимости решения от начальных условий и непрерывности функции V для числа $T > 0$ существует такое N, что при всех $k > N$

$$V(\mathbf{x}(T; 0, \mathbf{x}(t_k; 0, \mathbf{x}_0)) < V_* \tag{2.4}$$

Используя групповое свойство автономных систем

$$\mathbf{x}(T; 0, \mathbf{x}(t_k; 0, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}(T + t_k; 0, \mathbf{x}_0)$$

из (2.4) получаем $V(\mathbf{x}(T + t_k; 0, \mathbf{x}_0)) < V_*$, что противоречит неравенству (2.3). Следовательно, $V_* = 0$, откуда по теореме 1 вытекает требуемый результат.

Пример [4, 6]. Рассмотрим автономную механическую систему

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^\cdot} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij} q_j^\cdot - \frac{\partial f}{\partial q_i^\cdot} \quad (i = 1, \ldots, n;\ g_{ij} = -g_{ji}) \tag{2.5}$$

Взяв в качестве функции Ляпунова полную энергию $H = T + U$ системы, получим

$$H^\cdot = -2f \tag{2.6}$$

Предположим, что

1) система (2.5) имеет частное решение $\mathbf{q} = \mathbf{q}^\cdot = 0$ (положение равновесия);

2) потенциальная энергия $U(q_1, \ldots, q_n)$ определенно-положительна относительно $q_1, \ldots, q_m$ $(m < n)$, а диссипативная функция $f(q_1^\cdot, \ldots, q_n^\cdot)$ — определенно-положительная относительно всех скоростей квадратичная форма;

3) из каких-либо механических соображений известно [6], что координаты $q_{m+1}, \ldots, q_n$ в возмущенном движении ограничены;

4) в множестве $U(\mathbf{q}) > 0$ нет положений равновесия.

Учитывая (2.6), на основании теоремы 2 заключаем, что положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^\cdot = 0$ асимптотически устойчиво относительно $q_1, \ldots, q_m, q_1^\cdot, \ldots, q_n^\cdot$ равномерно по $\{t_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_0^\cdot\}$.

---

[1] В отличие от теоремы [3, 8] в данном случае лишь часть множества $M \setminus \{\mathbf{x} = 0\}$ не должна содержать целые траектории.

В этом примере соответствующая теорема [3, 8] не применима: множество $H^{\cdot} = 0$ может содержать целые траектории, отличные от $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$, так как положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$, вообще говоря, не изолировано.

Теорема 2 перестает быть верной, если отказаться от требования ограниченности решений, что показывает пример системы

$$y^{\cdot} = -\frac{y}{1+z^2}, \quad z^{\cdot} = z$$

Общее решение которой, не ограниченное по z, имеет вид

$$y = y_0 \exp\left[-\int_0^t \frac{d\tau}{1+z_0^2 \exp(2\tau)}\right], \qquad z = z_0 \exp(t)$$

Решение $y = z = 0$ не является асимптотически y-устойчивым, так как при $z_0 \neq 0$

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{1+z_0^2 \exp(2\tau)} < +\infty$$

Однако функция $2V = y^2$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Действительно, множество $M = \{(y, z) : V^{\cdot} = 0\}$ есть ось $y = 0$. При $y \neq 0$ имеем $V > 0$. Поэтому пересечение $M \cap \{y, z) : V > 0\}$ пусто и, следовательно, не содержит целых траекторий.

Теорема 3 [8]. Предположим, что: 1) каждое решение системы (2.1), начинающееся в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{z}$-ограничено; 2) функция $V(\mathbf{x})$ такова, что $V(\mathbf{0}) = 0$ и в любой окрестности начала координат существуют точки $\mathbf{x}$, для которых $V(\mathbf{x}) < 0$; 3) производная $V^{\cdot}$ удовлетворяет условию (2.2).

Обозначим $M_1 = \{\mathbf{x}: V(\mathbf{x}) < 0\}$, а $M_0 = M_1 \cap M$. Если M_0 не содержит целых траекторий при $t \in [0, \infty)$, то движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\mathbf{y}$-неустойчиво.

Доказательство. Допустим противное и выберем $\mathbf{x}_0$ из условий $V(\mathbf{x}_0) < 0$, $\| \mathbf{y}(t; 0, \mathbf{x}_0) \| < H$ при $t \geqslant 0$. Тогда

$$V(\mathbf{x}(t; 0, \mathbf{x}_0)) \leqslant V(\mathbf{x}_0) < 0 \tag{2.7}$$

и, следовательно, $\| \mathbf{x}(t; 0, \mathbf{x}_0) \| \geqslant \eta > 0$. Множество Γ^+ ω-предельных точек решения $\mathbf{x}(t; 0, \mathbf{x}_0)$ не пусто (в силу ограниченности решений) и инвариантно [9], причем $\Gamma^+ \subset M$ [10, 11]; в силу (2.7) $\Gamma^+ \subset M_1$. Итак, $\Gamma^+ \subset M_0 = M_1 \cap M$. Следовательно, множество M_0 содержит траекторию, что невозможно. Теорема доказана.

Теорема 4 [8]. Пусть выполнены условия 1) — 3) теоремы 3, а также 4) $V(\mathbf{0}, \mathbf{z}) \geqslant 0$ для любого $\mathbf{z}$; 5) множество $\{\mathbf{x}: \mathbf{y} = \mathbf{0}\}$ инвариантно.

Обозначим $M_1 = \{\mathbf{x}: V(\mathbf{x}) < 0\}$, $M_0 = M_1 \cap (M \setminus \{\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{0}\})$. Если M_0 не содержит целых траекторий при $t \in [0, \infty)$, то движение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\mathbf{y}$-неустойчиво.

Доказательство. Допустим противное и выберем $\mathbf{x}_0$, как и при доказательстве теоремы 3. Множество Γ^+ не пусто. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}(t_n; 0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_* \in \Gamma^+$$

Если $\lim \| \mathrm{y}(t;\ 0,\ \mathrm{x}_0) \| = 0$ при $t \to \infty$, то $\mathrm{y}_* = \mathbf{0}$ и, переходя к пределу в неравенствах

$$\lim_{t\to\infty} V(\mathrm{x}(t;\ 0,\ \mathrm{x}_0)) \leqslant V(\mathrm{x}_0) < 0$$

получим $0 \leqslant V(\mathbf{0},\ \mathrm{z}_*) < V(\mathrm{x}_0)$, что невозможно. Следовательно, $\| \mathrm{y}(t_n;\ 0,\ \mathrm{x}_0) \| \geqslant \eta > 0$ для некоторой последовательности $t_n \to \infty$, и можно считать $\mathrm{y}_* \neq \mathbf{0}$. Согласно 5), $\| \mathrm{y}(t;\ 0,\ \mathrm{x}_*) \| \neq 0$ при всех $t \geqslant 0$, откуда в силу инвариантности Γ^+ и свойств $\Gamma^+ \subset M$ и $\Gamma^+ \subset M_1$ следует $\mathrm{x}(t;\ 0,\ \mathrm{x}_*) \in M_1 \cap (M \setminus \{\mathrm{x}\colon \mathrm{y} = \mathbf{0}\})$ при любом $t \geqslant 0$, что невозможно. Теорема доказана.

3. Рассмотрим линейную систему

$$\mathrm{x}^{\cdot} = L\mathrm{x} \tag{3.1}$$

где L — постоянная матрица. Известна следующая теорема.

Теорема А [1]. Для того, чтобы решение $\mathrm{x} = \mathbf{0}$ системы (3.1) было асимптотически устойчивым по m переменным $y_1, \ldots, y_m$ [2], необходимо и достаточно, чтобы система (3.1) имела вид

$$\mathrm{y}^{\cdot} = A\mathrm{y}, \qquad \mathrm{z}^{\cdot} = B\mathrm{y} + C\mathrm{z} \tag{3.2}$$

(A, B и C — матрицы соответствующих порядков), а корни уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ имели отрицательные действительные части.

Рассмотрим возмущенную систему

$$\mathrm{y}^{\cdot} = A\mathrm{y} + \mathrm{f}(t,\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}), \qquad \mathrm{z}^{\cdot} = B\mathrm{y} + C\mathrm{z} + \mathrm{g}(t,\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}) \tag{3.3}$$

Теорема 5. Если $\operatorname{Re}\lambda_j(A) < 0$ и в области (1.2)

$$\| \mathrm{f}(t,\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}) \| \leqslant h \| \mathrm{y} \| \tag{3.4}$$

где h — достаточно малая постоянная, то движение $\mathrm{x} = \mathbf{0}$ системы (3.3) экспоненциально-асимптотически y-устойчиво равномерно по $\{t_0,\ \mathrm{y}_0\}$ в целом по z_0, т. е.

$$\| \mathrm{y}(t;\ t_0,\ \mathrm{x}_0) \| \leqslant M \| \mathrm{y}_0 \| \exp\left[-\alpha(t - t_0)\right]$$
$$(M > 0,\ \alpha > 0 - \mathrm{const},\ 0 \leqslant \| \mathrm{z}_0 \| < \infty)$$

Доказательство. По условию $\operatorname{Re}\lambda_j(A) < 0$, поэтому, согласно теореме Ляпунова, уравнение $\operatorname{grad} V(\mathrm{y}) \cdot A\mathrm{y} = -\| \mathrm{y} \|^2$ имеет однозначное решение в виде определенно-положительной квадратичной формы $V(\mathrm{y})$. Ее производная в силу (3.3)

$$V^{\cdot}(t,\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}) = -\| \mathrm{y} \|^2 + \operatorname{grad} V(\mathrm{y}) \cdot \mathrm{f}(t,\ \mathrm{y},\ \mathrm{z})$$

При достаточно малом h имеем [12] $V^{\cdot} \leqslant -\beta V$ ($\beta = \mathrm{const} > 0$), откуда и вытекает требуемый результат.

Замечание. Согласно (3.4), $\mathrm{f}(t,\ \mathbf{0},\ \mathrm{z}) \equiv \mathbf{0}$, поэтому условие [13] $\mathrm{Y}(t,\ \mathbf{0},\ \mathrm{z}) \equiv \mathbf{0}$ здесь выполнено.

Условие (3.4) легко проверяется, если пространство R_z компактно. Однако оно является весьма жестким, если рассматривается неограничен-

[1] Peiffer K. La méthode direct de Liapounoff appliquée à l'étude de la stabilité partielle (Dissertation). Université Catholique de Louvain, Faculté des sciences, 1968.

[2] По смыслу теоремы здесь предполагается, что решение $\mathrm{x} = \mathbf{0}$ не является асимптотически устойчивым по большему, чем m, числу переменных.

ная область (1.2). Это неудобство устраняется, если заранее известна z-ограниченность решений.

Напомним [7], что решения системы (3.3) называются z-ограниченными равномерно по $\{t_0, \mathbf{x}_0\}$, если для любого компакта $K \subset \mathbf{R}_\mathbf{x}$ существует постоянная $N(K)$ такая, что из $t_0 \geqslant 0$, $\mathbf{x}_0 \in K$ следует

$$\|\mathbf{z}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| \leqslant N \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0 \tag{3.5}$$

Критерий такой ограниченности дан в [7].

Теорема 6. Если выполнено условие (3.5), где $K = \{\mathbf{x}: \|\mathbf{x}\| \leqslant \delta\}$ с достаточно малым $\delta > 0$, $\operatorname{Re} \lambda_j(A) < 0$ и

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \leqslant h \|\mathbf{y}\| \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \|\mathbf{z}\| \leqslant N \tag{3.6}$$

($h = \text{const} > 0$ — достаточно мало), то движение $\mathbf{x} = 0$ системы (3.3) экспоненциально-асимптотически y-устойчиво.

Доказательство. Выбрав функцию $V(\mathbf{y})$, как и при доказательстве теоремы 5, для решений $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ с $\|\mathbf{x}_0\| \leqslant \delta$ при достаточно малом h получим ($\beta = \text{const} > 0$)

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) = V^{\boldsymbol{\cdot}}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \leqslant -\beta \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|^2$$

откуда вытекает требуемый результат.

Условие (3.6) выполняется для широкого класса функций, например, для многочленов (сумма конечная)

$$f_j(t, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \sum a^{(j)}_{i_1 \ldots i_m k_1 \ldots k_p} y_1^{i_1} \ldots y_m^{i_m} z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p}$$

с $i_1 + \ldots + i_m \geqslant 2$, непрерывными и ограниченными коэффициентами a.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 14 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
3. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
4. *Озиранер А. С.* Об устойчивости положений равновесия твердого тела с полостью, содержащей жидкость. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., «Наука», 1966.
6. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости относительно части переменных. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1972, № 1.
7. *Озиранер А. С.* О некоторых теоремах второго метода Ляпунова. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
8. *Risito C.* Sulla stabilità asintotica parziale. Ann. di Math. purra ed appl., 1970, Ser. 4, vol. 84, p. 279—292.
9. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
10. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М., «Мир», 1964.
11. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. М., «Наука», 1967.
12. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
13. *Озиранер А. С.* К вопросу об устойчивости движения относительно части переменных. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1971, № 1.
14. *Salvadori L.* Sul problema della stabilità asiwtotica. Meccanica. J. of Italian Association of Theor. and Appl. Mec., 1972, vol 7, № 4.