

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ВКЛЮЧАЮЩИХ ГИБКУЮ НЕРАСТЯЖИМУЮ НИТЬ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассматривается равновесие механической системы с конечным числом степеней свободы, включающей гибкую нерастяжимую нить, в потенциальном стационарном поле сил. Исследуется вариация потенциальной энергии этой системы при отклонении от положения равновесия обобщенных координат системы и нити в новом положении равновесия, отвечающем фиксированным вариациям упомянутых координат. Указаны условия, при которых определенная положительность указанной вариации потенциальной энергии гарантирует устойчивость равновесия системы.

Предполагается, что система S_1 с лагранжевыми координатами q (q_1, \dots, q_n) в совокупности с нитью образует систему S_2 , допускающую интеграл энергии и равновесие

$$q = 0, \quad x^\circ(q = 0, s), \quad 0 \leq s \leq l$$

где функции $x^\circ(q = 0, s)$ выражают пространственную форму нити в равновесии, а s — дуговая координата точки нити.

Рассматривается задача устойчивости [1] таких равновесий.

По аналогии с [2, 3] вариация потенциальной энергии системы разбивается на два слагаемых: $\delta\Pi(q) + \delta\Pi_2$. Слагаемое $\delta\Pi(q)$ представляет вариацию потенциальной энергии системы S_2 при переходе от равновесия в положение $q \neq 0, x^\circ(q \neq 0, s)$, где функции $x^\circ(q \neq 0, s)$ выражают форму равновесия нити по фиксированном $q \neq 0$.

Слагаемое $\delta\Pi_2$ выражает вариацию потенциальной энергии нити при переходе от формы $x^\circ(q \neq 0, s)$ к форме $x(q \neq 0, s)$, допустимой при том же значении q .

Сформулированы достаточные условия, которым должен удовлетворять функционал $\delta\Pi_2$, чтобы определенная положительность функции $\delta\Pi(q)$ гарантировала устойчивость равновесия.

Принятое определение устойчивости представляет собой естественное обобщение определения Ляпунова и гарантирует малость отклонений вектора q и всех точек нити от положения равновесия, если начальные значения этих отклонений и начальная вариация кинетической энергии достаточно малы.

Показано, что функционал $\delta\Pi_2$ удовлетворяет упомянутым достаточным условиям в широком классе равновесий систем, включающих однородную тяжелую нить, а также для некоторых равновесий легкой нити

в осесимметричном центробежном поле. В двух примерах систем указанных типов выделены устойчивые равновесия среди всех возможных.

1°. Пусть механическая система S_1 имеет лагранжевы координаты $q (q_1, \dots, q_n)$ и в нее включены гибкая, нерастяжимая нить, которая вместе с системой S_1 образует систему S_2 , а силы и связи системы S_2 таковы, что она допускает интеграл энергии

$$H = T_1 + T_2 + \Pi_1 + \Pi_2$$

где $T (q, q')$ — определено-положительная относительно q' , кинетическая энергия, а $\Pi_1 (q)$ — потенциальная энергия системы S_1 , T_2 — кинетическая энергия нити, а

$$\Pi_2 = \int_0^l \mu (s) \pi (x(s)) ds$$

потенциальная энергия нити. Через s обозначено расстояние, отсчитанное вдоль нити от ее точки $A (s = 0)$ до точки $C (s \neq 0)$, $0 \leq s \leq l$. Вторым концом нити $s = l$ обозначим через B .

Предполагается, что нить имеет линейную плотность $\mu (s)$, $\mu (s) \pi (x(s))$ — потенциальная энергия элемента ds , расположенного в точке $x (s)$ трехмерного пространства, где $x (s)$ — трехмерный вектор, подчиненный связям системы, а $\pi (x)$ — непрерывная функция.

Пусть система S_2 допускает некоторое положение равновесия $q = q^\circ = 0$, $x^\circ (q = 0, s)$, $x^\circ (q = 0, s) = 0$ и при любом фиксированном q из области $q^2 \leq a^2$ нить допускает единственное положение равновесия $x^\circ (q, s)$, непрерывно переходящее в равновесие $x^\circ (0, s)$ при $q^2 \rightarrow 0$. Рассмотрим какое-либо допустимое смещение точки C нити с дуговой координатой $s = s_1$

$$\Delta (q, s_1) = x (q, s_1) - x^\circ (q, s_1)$$

и наложим на систему S_2 дополнительную связь $\Delta (q, s_1) = \Delta^\circ$, которая означает, что точка C закреплена в пространстве в точке $x (q, s_1) = x^\circ (q, s_1) + \Delta^\circ$.

Предположим, что условие $(\Delta^\circ(q, s_1))^2 \leq b^2$ совместно со связями системы и выделяет в пространстве векторов $\Delta (q, s_1)$ некоторую замкнутую, ограниченную область $D (q, s_1, b^2)$, а объединение этих областей при пробегании параметра s_1 от нуля до l образует замкнутую ограниченную область $D (q, b^2)$.

Поясним введенное предположение примером. Пусть при фиксированном q нить располагается по поверхности $\varphi (x, q) = 0$, концы нити закреплены в точках A_1, B_1 поверхности, а точка $C (s_1)$ находится в точке C_1 на кривой $x^\circ (q, s)$. Обозначим через $g (D_1, D_2)$ геодезическое расстояние между точками D_1, D_2 поверхности и предположим, что $g (A_1, B_1) < l$. Связи системы требуют соотношений

$$\varphi (x^\circ (q, s_1) + \Delta^\circ (q, s_1), q) = 0, \quad g (A_1, C_2) \leq s_1, \quad g (C_2, B_1) \leq l - s_1$$

которые совместно с условием $(\Delta^\circ)^2 \leq b^2$ выделяют область $D (q, s_1, b^2)$.

Обозначим через $x (q, s) = x (\cdot)$ совокупность допустимых положений нити в области $D (q, b^2)$, выделим обозначением $x (\cdot, \Delta^\circ, s_1)$ допустимые

положения, согласные с дополнительной связью $\Delta(s_1) = \Delta^\circ$, а обозначением $x^\circ(\cdot, \Delta^\circ, s_1)$ выделим среди кривых $x(\cdot, \Delta^\circ, s_1)$ возможные равновесия. Заметим, что в этих обозначениях кривые $x^\circ(\cdot)$, $x^\circ(\cdot, 0, s_1)$ совпадают при любом s_1 вследствие предположения о единственности равновесия $x^\circ(\cdot)$.

Обозначим через $\delta\Pi_2(x_2(\cdot), x_1(\cdot))$ вариацию потенциальной энергии нити при переходе от кривой $x_1(\cdot)$ к кривой $x_2(\cdot)$ и сформулируем главное предположение, касающееся свойств равновесий $x^\circ(\cdot, \Delta^\circ, s_1)$.

Пусть равновесие $x^\circ(\cdot, 0, s_1)$ отвечает строгому (изолированному) минимуму

$$(1.1) \quad \delta\Pi_2(x(\cdot), x^\circ(\cdot, 0, s_1)) > 0$$

а среди равновесий $x^\circ(\cdot, \Delta^\circ, s_1)$ можно выделить равновесия $X^\circ(\cdot, \Delta^\circ, s_1)$, реализующие минимум (не обязательно строгий), среди кривых, согласных с дополнительной связью $\Delta(s_1) = \Delta^\circ$

$$(1.2) \quad \delta\Pi_2(x(\cdot, \Delta^\circ, s_1), X^\circ(\cdot, \Delta^\circ, s_1)) \geq 0$$

а этот последний минимум непрерывен по совокупности аргументов Δ°, s_1

$$(1.3) \quad \delta\Pi_2(X^\circ(\cdot, \Delta_1^\circ, s_1), X^\circ(\cdot, \Delta_2^\circ, s_2)) \rightarrow 0$$

при

$$|\Delta_1^\circ - \Delta_2^\circ| + |s_2 - s_1| \rightarrow 0$$

Лемма 1.1 При выполнении условий (1.1) — (1.3) функционал $\delta\Pi_2$ определенно-положителен и непрерывен в метрике

$$\rho_2(x(\cdot), x^\circ(\cdot, 0, s_1)) = \max_{0 \leq s \leq l} (x(\cdot) - x^\circ(\cdot, 0, s_1))^2$$

Доказательство. Зададим положительное число $\varepsilon_2 \leq b^2$ и рассмотрим функцию

$$P(\Delta^\circ, s_1) = \delta\Pi_2(X^\circ(\cdot, \Delta^\circ, s_1), x^\circ(\cdot, 0, s_1))$$

Эта величина — однозначная функция переменных Δ°, s_1 , так как из условия (1.3) следует, что даже в том случае, когда величинам Δ°, s_1 отвечает несколько равновесий $X_j^\circ(\cdot, \Delta^\circ, s_1)$, $j = 1, 2, \dots$, значения функционала

$$\delta\Pi_2(X_m^\circ(\cdot, \Delta^\circ, s_1), x^\circ(\cdot, 0, s_1)) = \delta\Pi_2(X_k^\circ(\cdot, \Delta^\circ, s_1), x^\circ(\cdot, 0, s_1))$$

для этих кривых одинаковы.

Согласно (1.1), функция $P(\Delta^\circ, s_1)$ положительна при $(\Delta^\circ)^2 > 0$, согласно (1.3), — непрерывна в области $D(q, b^2)$. Разделим область D на области

$$D_2 = D(q, b^2) \cap [(\Delta^\circ)^2 \leq \varepsilon_2], \quad D_3 = D(q, b^2) \setminus D_2$$

и обозначим через $\varepsilon_1(\varepsilon_2)$ минимум функции $P(\Delta^\circ, s_1)$ в области D_3 .

Рассмотрим какую-либо кривую $x_1(\cdot)$, обозначим через s_1 одну из точек максимума по s функции $(x_1(q, s) - x^\circ(q, s, 0, s_2))^2$ и положим $\Delta^\circ(s_1) = x_1(q, s_1) - x^\circ(q, s_1, 0, s_2)$. Пусть функция $x_1(\cdot)$ удовлетворяет оценке

$$(1.4) \quad \delta\Pi_2(x_1(\cdot), x^\circ(\cdot, 0, s_1)) < \varepsilon_1(\varepsilon_2)$$

Из оценок (1.1), (1.2), (1.4) вытекает оценка $(\Delta^\circ(s_1))^2 < \varepsilon_2$ и оценка $\rho_2(x_1(\cdot), x^\circ(\cdot, 0, s_2)) < \varepsilon_2$. В итоге показано, что по любому $\varepsilon_2 > 0$ можно указать $\varepsilon_1(\varepsilon_2) > 0$ так, чтобы из оценки (1.4) следовала оценка $\rho_2 < \varepsilon_2$. Последнее свойство совпадает с определением определенной положительности [4] функционала $\delta\Pi_2$ в метрике ρ_2 .

Непрерывность, т. е. соотношения

$$\delta\Pi_2(x_1(\cdot), x^\circ(\cdot, 0, s_2)) \rightarrow 0 \text{ при } \rho_2(x_1(\cdot), x^\circ(\cdot, 0, s_2)) \rightarrow 0$$

служат простым следствием непрерывности функции $\pi(x)$.

Лемма 1.1 доказана.

Сформулируем определение и теорему, являющиеся естественным обобщением определения устойчивости Ляпунова и известной теоремы Лагранжа, вводя полную метрику

$$\rho = q^2 + q'^2 + T_2 + \rho_2(x(\cdot), x^\circ(\cdot, 0, s_1))$$

и вариацию $\delta\Pi(q)$ потенциальной энергии системы S_2 при переходе из равновесия $q = 0, x^\circ(0, s, 0, s_1)$ в положение

$$q \neq 0, x^\circ(q \neq 0, s, 0, s_1)$$

Определение. Если по любому $\varepsilon_1 > 0$ можно указать $\varepsilon_2(\varepsilon_1) > 0$ так, чтобы из оценки $\rho(t=0) < \varepsilon_2$ следовала оценка $\rho(t > 0) < \varepsilon_1$, то равновесие является устойчивым по метрике ρ .

Теорема. Если $\delta\Pi(q)$ — определено-положительная функция координат q , а $\delta\Pi_2$ удовлетворяет свойствам (1.1) — (1.3), то равновесие устойчиво по метрике ρ .

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что из леммы 1.1 и условий теоремы следует определенная положительность и непрерывность функционала δH в метрике ρ , а затем применим результаты [4].

2. Рассмотрим две задачи для однородной ($\mu = \mu_0 = \text{const}$) нити.

Задача 2.1. При фиксированном q концы нити A ($s = 0$), B ($s = l$) фиксированы в пространстве, а сама нить свободно провисает под действием тяжести. Направляя ось x горизонтально направо, а ось y вертикально вверх и располагая обе оси в вертикальной плоскости, содержащей точки A, B , получим $\pi_1 = gy$.

Задача 2.2. При фиксированных q концы нити A, B укреплены на плоскости P , вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной прямой x , а сама нить свободно скользит по плоскости P . Направляя ось y перпендикулярно к оси x в плоскости P , получим $\pi_2 = -\frac{1}{2}\omega^2 y^2$.

Обозначая через $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ координаты точек A, B , поставим задачу отыскания кривых $y_{(1),(2)}$, реализующих абсолютные минимумы интегралов

$$\Pi_2^{(1),(2)} = \int_{x_1}^{x_2} \pi_{1,2} \sqrt{1 + y_x'^2} dx$$

подчиненных изопериметрическим условиям

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = l$$

Для того, чтобы искомые кривые $y_{(1),(2)}^\circ(x)$, отвечающие абсолютному минимуму, лежали среди экстремалей интегралов

$$G^{(1),(2)} = \Pi_2^{(1),(2)} + \lambda_{(1),(2)} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

достаточно двух дополнительных условий.

2.3. Кривые $y_{(1),(2)}^{\circ}(x)$ допускают непрерывную первую производную по x .

2.4. Не имеют прямолинейных участков.

Предположим, что $x_2 > x_1$, и наметим кратко план доказательства существования кривой $y_{(1)}^{\circ}(x)$ и выполнение свойств 2.3, 2.4.

2.5. Заменяем нить системой однородных отрезков Δ_i ; $i = 1, \dots, p$, соединенных идеальными шарнирами и имеющих одинаковую длину l/p . После этого функционал $\Pi_2^{(1)}$ перейдет в функцию $\Pi_p^1(\alpha)$, где α — вектор размерности p , а его компоненты α_i — углы между отрезками Δ_i и осью x , стесненные условиями крепления

$$(l/p) (\cos \alpha_1 + \dots + \cos \alpha_p) + x_1 - x_2 = f_{1,p}(\alpha) = 0$$

$$(l/p) (\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_p) + y_1 - y_2 = f_{2,p}(\alpha) = 0$$

Покажем, что абсолютный минимум достигается на строго выпуклой ломаной. Действительно, если ломаная вогнута между шарнирами g_1, g_2 , то симметричное отражение ломаной относительно середины отрезка g_1, g_2 уменьшает потенциальную энергию. Можно также показать, что в абсолютном минимуме ни один из отрезков Δ_{i+1} не может быть продолжением отрезка Δ_i , т. е. ломаная строго выпукла и не имеет вертикальных участков. Доказательство также проводится от противного построением допустимого перемещения, уменьшающего потенциальную энергию.

Из изложенного выше следует, что абсолютный минимум функции $\Pi_{2,p}^{(1)}(\alpha)$ лежит в стационарной точке функции (v_1, v_2 — некоторые константы)

$$G_p^{(1)} = \Pi_{2,p}^{(1)}(\alpha) + v_1 f_{1,p}(\alpha) + v_2 f_{2,p}(\alpha)$$

Анализ уравнений стационарной точки показывает, что существует только одна строго возрастающая последовательность $\alpha_{1,p}, \dots, \alpha_{p,p}$, удовлетворяющая условию стационарности. Эта последовательность отвечает выпуклой ломаной. Можно показать, что ступенчатая функция

$$\alpha_p(x) = \alpha_{i,p}, \quad x \in \left(\sum_{j=1}^{i-1} \cos \alpha_{j,p}, \sum_{j=1}^i \cos \alpha_{j,p} \right)$$

выражающая зависимость угла наклона ломаной от координаты x , сходится при $p \rightarrow \infty$ к некоторой строго возрастающей функции $\alpha(x)$, непрерывной и заключенной в пределах $+\pi/2 > \alpha > -\pi/2$. Этим завершается доказательство свойств 2.3, 2.4 для кривой $y_{(1)}^{\circ}(x)$.

Доказательство свойств 2.3, 2.4 в задаче 2.2 удастся провести по аналогичной схеме, но при существенном предположении о том, что точки A, B не разделяются осью x , так что при подходящем выборе оси y можно одновременно удовлетворить оценкам $y_2 \geq y_1 \geq 0$. При таком выборе оси можно доказать, что функция $y_{(2)}^{\circ}(x)$ будет строго вогнутой ($\alpha(x)$ монотонно убывает).

Кривая $y_{(1)}^{\circ}(x)$ — хорошо известная цепная линия, построение кривой $y_{(2)}^{\circ}(x)$ требует подробностей.

Пусть точки A, B лежат на оси x , $A(0, 0)$, $B(\xi > 0, 0)$, тогда [5] все стационарные кривые функционала $G^{(2)}$ находятся в классе эллиптических синусов

$$(2.1) \quad y = \sqrt{b_1^2 - a_1^2} \operatorname{sn}(x \sqrt{2} / a_1 k')$$

$$k'^2 = 1 - k^2, \quad k^2 = (b_1^2 - a_1^2) / (b_1^2 + a_1^2)$$

Величина $k^2 (l / \xi)$ определяется единственным образом из уравнения

$$\frac{(l - \xi)}{(l + \xi)} = \frac{k^2 \int_0^1 (1 - t^2)^{1/2} (1 - k^2 t^2)^{-1/2} dt}{\int_0^1 (1 - k^2 t^2)^{1/2} (1 - t^2)^{-1/2} dt}$$

Функция $t = \operatorname{sn} z$ является обращением эллиптического интеграла

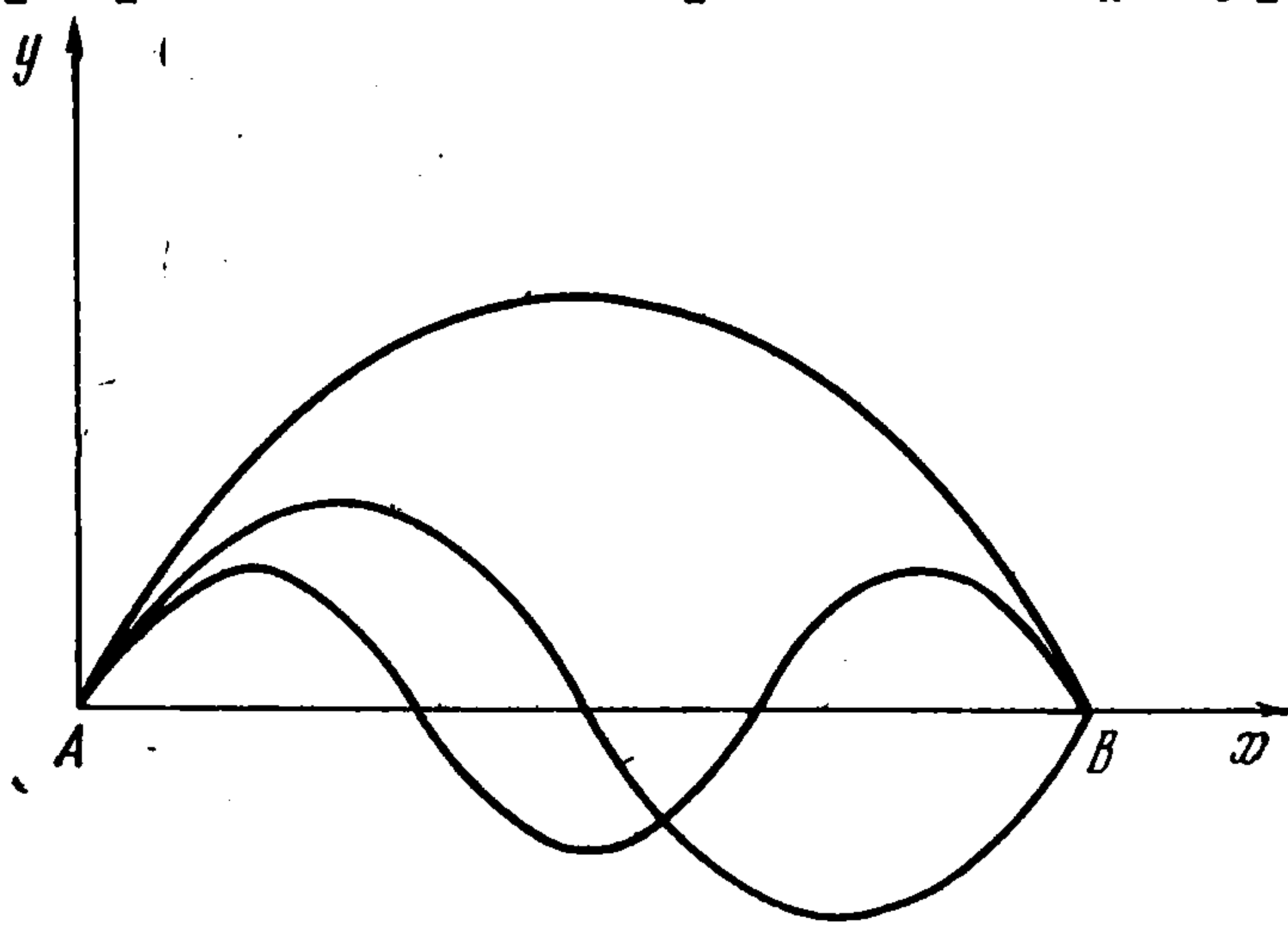
$$z = \int_0^t (1 - t^2)^{-1/2} (1 - k^2 t^2)^{-1/2} dt$$

Заметим, что $k^2 (l / \xi)$ монотонно возрастает от 0 до 1 при возрастании l / ξ от 1 до ∞ . Постоянная a_1 при данных l и ξ может принимать счетный набор значений

$$a_1(m) = \xi \sqrt{2} / 2mKk', \quad m = 1, 2, \dots$$

$$K = \int_0^1 ((1 - t^2)(1 - k^2 t^2))^{-1/2} dt$$

Это значит, что существует счетное множество равновесий. Первые три равновесия изображены на фигуре, причем вторая и третья полуволны получаются из первой преобразованием подобия относительно точки $A(0, 0)$ с коэффициентами $1/2$ и $1/3$.



Геометрически очевидно, что минимум потенциальной энергии достигается на первой полуволне. Из предыдущего следует, что он является абсолютным. Строгость минимума очевидна.

Покажем, что вторая, третья и остальные кривые вообще не реализуют минимума. Для этого переведем нить из второго положения ($m = 2$) в соседнее допустимое, преобразуя подобно верхнюю и нижнюю полуволны относительно точек A, B с коэффициентами $1 + u, 1 - u$, где $0 < u < 1$. Если через $\Pi_2^{(2)}$ ($m = 2$) обозначить потенциальную энергию второго положения равновесия, то нетрудно проверить, что потенциальные энергии преобразованных полуволен примут значения $1/2 (1 + u)^3 \Pi_2^{(2)}$ ($m = 2$), $1/2 (1 - u)^3 \Pi_2^{(2)}$ ($m = 2$), а вариация $\Delta \Pi_2^{(2)}$ при этом преобразовании

будет равна $3u^2\Pi_2^{(2)} (m = 2) < 0$, так как

$$\Pi_2^{(2)} (m = 2) < 0$$

2.6. Покажем теперь, что если точки A, B не разделяются осью x , то всегда существует единственная кривая Γ длины l , принадлежащая с точностью до сдвига вдоль оси x семейству (2.1), проходящая через A, B и имеющая не больше одной полуволны на отрезке $[x_1, x_2]$.

Обозначая

$$\Delta x = x_2 - x_1 > 0, \Delta y = y_2 - y_1 > 0, y_1 / \Delta x = \eta, \Delta y / \Delta x = \zeta$$

рассмотрим семейство прямых

$$(2.2) \quad y = \zeta x + e, \quad e > 0$$

зависящее от положительного параметра e , и подсемейство семейства (2.1), зависящее от параметра b_1^2 , в котором равенство $a_1^2 = b_1^2 - 1$ выделяет кривые с единичной амплитудой $1 = b_1^2 - a_1^2$.

Если начальное (при $x = 0$) значение производной на линии указанного подсемейства удовлетворяет оценке

$$(2.3) \quad y_x'(x = 0) = \sqrt{2} / \sqrt{b_1^2 - 1} > \zeta$$

то прямая $y = \zeta x + e$ будет иметь две точки $(x_1(e), y_1(e)), (x_2(e), y_2(e))$ пересечения с первой полуволной, причем отношение $y_1(e) / (x_2(e) - x_1(e))$ будет монотонно возрастать от нуля до бесконечности при увеличении параметра e от нуля до значения e_1 , при котором прямая $y = \zeta x + e_1$ касается первой полуволны, а точки пересечения сливаются. Это значит, что для любого $b_1^{(1)}$, согласного с оценкой (2.3), равенство $\eta = y_1(e) / [x_2(e) - x_1(e)]$ выполнится при единственном значении e . Преобразование подобия относительно точки $(0, 0)$ с коэффициентом

$$\Delta x / (x_2(e) - x_1(e))$$

и сдвиг вдоль x приведут к кривой Γ_1 , на которой выполнены условия крепления и которая с точностью до сдвига принадлежит семейству (2.1). Уменьшая величину $b_1^{(1)}$ до значения $b_1^{(2)}$ (увеличивая начальную производную) и повторяя операцию, получим кривую Γ_2 , причем по построению очевидно, что длина дуги $(\overline{AB})_2 = l_2 > l_1 = (\overline{AB})_1$ — длины дуги кривой Γ_1 .

Итак отношение $l / \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ — строго монотонная функция параметра b_1^2 , пробегающая интервал $(1, \infty)$ при изменении b_1^2 в пределах $\zeta < \sqrt{2} / \sqrt{b_1^2 - 1} < \infty$, т. е. кривая Γ существует и единственна.

2.7. Кривая Γ реализует искомый абсолютный минимум, т. е. является кривой $y_{(2)}^\circ(x)$.

Продолжим кривую Γ по уравнению эллиптического синуса до пересечения с осью x в точках A', B' . Получим кривую Γ' с длиной l' , которая, как показано выше, реализует абсолютный минимум для нити длиной l'

с креплениями в A' , B' . Очевидно, что допустимые деформации кривой Γ лежат среди допустимых деформаций кривой Γ' . Следовательно, кривая Γ реализует абсолютный минимум.

В итоге проведенных рассмотрений можно считать установленными два утверждения.

2.8. При любой допустимой связи $\Delta(q, s_1) = \Delta^\circ$ в задаче 2.1 существует единственная кривая $X^\circ(\cdot, \Delta^\circ, s_1)$. Эта кривая состоит из двух отрезков цепных линий, проходящих через точку $C_1(x^\circ(q, s) + \Delta^\circ)$ и лежащих в вертикальных плоскостях, содержащих пары (A, C_1) , (C_1, B) .

2.9. В задаче 2.2 при условиях $y_2 > y_1 > 0$ и нити, расположенной по кривой $y_{(2)}^\circ(x)$, также существует единственная кривая $X^\circ(\cdot, \Delta^\circ, s_1)$, которая состоит из двух неполных полуволи эллиптического синуса. Единственность указанной кривой является следствием предыдущих рассмотрений для всех областей $(\Delta^\circ)^2 \leq b^2$, не содержащих точек $y < 0$.

Если одна или обе точки $(y_1 = 0, y_2 > 0)$ A , B лежат на оси x , то область $(\Delta^\circ)^2 \leq b^2$ содержит всегда смещения точки $C(s_1)$ в область $y < 0$ при значениях s_1 , достаточно близких к нулю.

Обозначая через x_3, y_3 координаты точки C_1 , будем при $y_3 \geq 0$ выбирать кривую $X^{\circ+}$ в виде двух неполных, положительных полуволи, а при $y_3 < 0$ будем отражать точку $B(x_2, y_2)$ в точку $B'(x_2, -y_2)$ и выбирать кривую в виде двух отрицательных неполных полуволи, проводя их через пары (A, C_1) , (C_1, B') . Любая кривая, соединяющая точки (C_1, B) , должна пересечь хотя бы один раз ось x в точке E . Отражая кривую (B, E) симметрично оси x , получим кривую (A, E, B') , потенциальная энергия которой заведомо не меньше, чем энергия кривой $X^{\circ-}$. Итак свойство (1.2) для кривых $X^{\circ-}$ выполнено. Очевидно справедливо и свойство (1.3).

Кривая $X^{\circ-}$ не допускается условиями крепления при $y_2 > 0$ и формально не принадлежит классу X° . Однако при доказательстве леммы 1.1 нигде не использовался тот факт, что кривые X° являются допустимыми равновесиями. Последнее требование не является необходимым, хотя резко облегчает поиск кривых, удовлетворяющих условиям (1.2), (1.3).

3. Рассмотрим частный случай задачи 2.1, вводя обозначения независимо от предыдущего.

Пусть тяжелое твердое тело (маятник) может вращаться вокруг горизонтальной оси O , а точки A, B крепления концов нити расположены на твердом теле в вертикальной плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Пусть O_1 — середина отрезка AB , a — длина отрезка AB , m_1, m_2 — массы тела и нити, l — длина, m_2/l — плотность нити, G — центр тяжести тела, в которое дополнительно в точку O_1 помещена точечная масса m_2 и b — расстояние GO . Проведем из точки O_1 горизонтальную ось x направо, а вертикальную ось y вверх и обозначим через φ угол между направлением A, B и осью x .

В этой системе координат условия крепления примут вид

$$(3.1) \quad x_{1,2} = \pm (a/2) \cos \varphi, \quad y_{1,2} = \pm (a/2) \sin \varphi$$

Если нить располагается по выпуклой ($\alpha > 0$) цепной линии

$$(3.2) \quad y = \alpha \operatorname{ch} [(x - \beta) / \alpha] - \gamma$$

то величины α , β , γ определяются в зависимости от параметров a , l и угла φ по условиям крепления (3.1) и уравнению сохранения длины

$$(3.3) \quad l = \alpha (\operatorname{sh} [(x_1 - \beta) / \alpha] - \operatorname{sh} [(x_2 - \beta) / \alpha])$$

Сумму $\Pi_1 + \Pi_2$ потенциальных энергий тела и нити представим в виде суммы $\Pi_3 + \Pi_4$, потенциальной энергии тела с дополнительной массой m_2 и потенциальной энергии нити при неподвижной точке O_1 .

При вычислении энергии Π_3 будем рассматривать два различных способа крепления.

3.1. Прямая OG проходит через точку O_1 перпендикулярно к отрезку AB . Тогда, предполагая, что при $\varphi = 0$ центр тяжести G лежит выше точки O , получим

$$(3.4) \quad \Pi_3^{(1)} = (m_1 + m_2) gb \cos \varphi, \quad \Pi_3^{(1)'} = -M_3^{(1)} = -(m_1 + m_2) gb \sin \varphi$$

где производная $\Pi_3^{(1)'}$ равна моменту сил тяжести относительно точки O , взятому с обратным знаком.

3.2. Прямая OG совпадает с прямой AB . Тогда, предполагая, что при $\varphi = 0$ центр тяжести G лежит левее точки O , получим

$$(3.5) \quad \Pi_3^{(2)} = -(m_1 + m_2) gb \sin \varphi, \quad \Pi_3^{(2)'} = -M_3^{(2)} = -(m_1 + m_2) gb \cos \varphi$$

Слагаемое Π_4 и момент $M_4 = -\Pi_4'$ будут иметь вид

$$(3.6) \quad \Pi_4 = \frac{m_2 g}{l} \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$(3.7) \quad \Pi_4' = \frac{m_2 g}{l} \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Подсчеты устанавливают равенства

$$(3.8) \quad \Pi_4' = (a^2 / 2) \sin \varphi \cos \varphi u_1(z)$$

$$(3.9) \quad u_1 = (z \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z) / \operatorname{sh} z, \quad z = (a \cos \varphi) / 2 a$$

$$(3.10) \quad \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2 \varphi} / a \cos \varphi = \operatorname{sh} z / z$$

Формулы (3.9) указывают вид функции $u_1(z)$ и связь между z и величинами a , φ , α , а уравнение (3.10) определяет единственную функцию $z(\sin \varphi, l/a) > 0$, монотонно возрастающую по обоим аргументам в области $D[\sin \varphi \geq 0, l/a \geq 0]$ с соблюдением соотношений

$$(3.11) \quad z(\sin \varphi \geq 0, l/a) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad l/a \rightarrow \infty$$

$$(3.12) \quad z(\sin \varphi, l/a > 1) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \sin \varphi \rightarrow 1$$

Обозначая через $\Pi_{(1)'}'$, $\Pi_{(2)'}'$ производные по φ от сумм $\Pi_3^{(1)} + \Pi_4$, $\Pi_3^{(2)} + \Pi_4$ соответственно, получим

$$(3.13) \quad \Pi_{(1)'}' = gm_2 \sin \varphi [(a^2 / 2l) u_1(z) \cos \varphi - b(m_1 + m_2) / m_2]$$

$$(3.14) \quad \Pi_{(2)'}' = gm_2 \cos \varphi [(a^2 / 2l) u_1(z) \sin \varphi - b(m_1 + m_2) / m_2]$$

Заметим, что в формуле (3.8) в случае $\sin \varphi < 0$ нужно поставить $-\sin \varphi$, поэтому в формулах (3.13), (3.14) нужно при $\varphi < 0$ заменить знак у первого слагаемого в скобке.

3.1.1. Войдем в подробности анализа случая 3.1 В этом случае существуют два равновесия: верхнее ($\varphi = 0$) и нижнее ($\varphi = \pi$). Существование наклонного ($\pi / 2 > \varphi > 0$) равновесия зависит от существования нуля квадратной скобки. Заменяя в квадратной скобке $\cos \varphi$ по уравнению (3.10) под видом

$$\cos \varphi = \sqrt{l^2 - a^2} / a \sqrt{(\operatorname{sh} z / z)^2 - 1}$$

получим, что вопрос о существовании наклонного равновесия эквивалентен вопросу о существовании положительного решения уравнения

$$u_2(z) = zu_1(z) / \sqrt{\operatorname{sh}^2 z - z^2} - 2bl(m_1 + m_2) / a \sqrt{l^2 - a^2} m_2 = 0$$

Вычисляя производную $u_2'(z)$, получим

$$u_2'(z) = \frac{z}{(\operatorname{sh}^2 z - z^2)^{3/2}} \left[\left(\frac{\operatorname{sh} z}{z} - \frac{z}{\operatorname{sh} z} \right)^2 - \left(\operatorname{ch} z - \frac{\operatorname{sh} z}{z} \right)^2 \right]$$

Знак производной $u_2'(z)$ повторяет знак функции

$$u_3(z) = 2 \operatorname{sh} z / z - \operatorname{ch} z - z / \operatorname{sh} z$$

которая допускает представление в виде

$$u_3(z) = -(z \operatorname{sh} z)^{-1} \sum_{n=3}^{\infty} (2z)^{2n} \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{4(2n-1)!} \right)$$

Последнее равенство устанавливает оценку $u_2'(z) < 0$, которая совместно с равенством

$$\lim (zu_1(z) / \sqrt{\operatorname{sh}^2 z - z^2}) = 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty$$

позволяет сформулировать вывод.

Если $u_2(z(\sin \varphi = 0, l/a)) > 0$, то верхнее ($\varphi = 0$) положение равновесия устойчиво, а наклонное $\pi / 2 < \varphi < 0$ существует и отвечает максимуму потенциальной энергии.

Если $u_2(z(\sin \varphi = 0, l/a)) < 0$, то верхнее ($\varphi = 0$) положение равновесия отвечает максимуму потенциальной энергии, а наклонного равновесия не существует.

Нижнее ($\varphi = \pi$) положение равновесия всегда устойчиво. Представляют интерес две задачи.

Задача 3.1.2. При фиксированной массе нити и расстоянии a между точками крепления выбрать длину l так, чтобы максимизировать возвращающий момент, возникающий при отклонении от верхнего равновесия.

Заменяя l в квадратной скобке выражения (3.13) по формуле $l = a \operatorname{sh} z / z$, приходим к задаче о максимуме по z функции

$$u_4(z) = zu_1(z) / \operatorname{sh} z$$

Знак производной $u_4'(z)$ повторяет знак функции

$$u_5(z) = z - 2 \operatorname{th} z / (2 - \operatorname{th}^2 z)$$

Функция $u_5(z)$ строго убывает от нуля до точки $\operatorname{th} z = \sqrt{2/3}$, а затем строго возрастает до ∞ . Это значит, что функция $u_4(z)$ допускает единственный стационарный максимум при $z > 0$ в точке

$$z_1^2 \approx 2.51, \quad (l/a)_1 \approx 1.48$$

Это уравнение устанавливает наиболее выгодную длину нити в смысле задачи 3.1.2.

Задача 3.1.3. При фиксированных m_2, l выбрать расстояние a , максимизирующее возрастающий момент при отклонении от верхнего равновесия.

Задача 3.1.3 эквивалентна задаче на максимум в области $z > 0$ для функции $u_6(z) = z^2 u_1(z) / \operatorname{sh}^2 z$.

Знак производной $u_6'(z)$ повторяет знак функции

$$u_7(z) = \frac{z^2}{256} \left(-1 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i z^{2i} \right)$$

где в скобках стоит ряд с положительными коэффициентами α_i , сходящийся равномерно в любом отрезке $|z| \leq N$ и стремящийся к ∞ при $z \rightarrow \infty$. Это также указывает на существование единственного стационарного максимума функции $u_6(z)$ при $z_2^2 \approx 1.4$, $(l/a)_2 \approx 1.23$.

3.2.1. Для крепления 3.2 очевидными являются верхнее ($\varphi = -\pi/2$) и нижнее ($\varphi = \pi/2$) положения равновесия, а вопрос о существовании наклонного положения сводится к вопросу о существовании положительного корня уравнения

$$u_8(z) = \sin \varphi u_1(z) - 2bl(m_1 + m_2) / a^2 m_2 = 0$$

$$\sin^2 \varphi = 1 - (l^2 - a^2) / ((\operatorname{sh} z / z)^2 - 1) a^2$$

Функция $u_8(z)$ монотонно возрастает по z от нуля и стремится к единице при $z \rightarrow \infty$ ($\varphi \rightarrow \pi/2$).

Обозначая $v_1 = a^2 m_2 - 2bl(m_1 + m_2)$, сформулируем выводы.

При $v_1 > 0$ существуют и устойчивы наклонные положения равновесия, а верхнее и нижнее отвечают максимуму $\Pi_{(2)}$. При $v_1 < 0$ наклонных равновесий нет, нижнее является устойчивым, а верхнее отвечает максимуму $\Pi_{(2)}$. Следует заметить, что нить в верхнем и нижнем положении свисает по прямой, которая не может быть найдена непосредственно из условий равновесия нити, а только как предел ее равновесий при $|x_1 - x_2| \rightarrow 0$.

Если тело подвешено за свой центр тяжести G_1 , а расстояние $G_1 O_1 = \lambda_3 (a/2)$, $0 < \lambda_3 < 1$, то условие $v_1 > 0$ принимает особенно простой вид $a/l > \lambda_3$.

Последняя оценка показывает, что устойчивые наклонные равновесия нити в тех случаях, когда нить закреплена за концы невесомого стержня A, B и ось вращения расположена близко к одному из концов, существуют только для достаточно коротких нитей.

4. Примером задачи 2.2 может служить точечная масса m_1 , скользящая по оси x под действием силы $F(\xi)$ (зависящей от координаты $\xi = x_2$ массы m_1 и направленной вправо, $F(\xi > 0) > 0$), и нить плотности $\mu_0 = m_2/l$, закрепленная в точках $A(x_1 = 0, y_1 = 0)$, $B(x_2 = \xi > 0, y_2 = 0)$. Предполагается, что нить может скользить в плоскости P , вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси x и содержащей ось y .

Обозначим через $\Pi_2(\xi)$ потенциальную энергию первой полуволны, а через $\Pi_2'(\xi)$ ее производную ξ . Как следствие условий равновесия будем иметь уравнения $\Pi_2'(\xi) = F(\xi) = (T dx/ds)_{x=\xi}$.

Первое уравнение выражает условие стационарности функции $\Pi_1(\xi) + \Pi_2(\xi)$, а второе — равенство горизонтальной проекции натяжения T на правом ($x = \xi$) конце нити и силы $F(\xi)$. С другой стороны, из условий равновесия нити [5] и уравнений (2.1) следует, что проекция $T dx/ds$ постоянна вдоль нити и равна

$$T \frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{8} \omega^2 \frac{\mu_0 \xi^2}{K^2 k'^2}, \quad k'K = \int_0^1 (1 - k^2)^{1/2} ((1 - t^2)(1 - k^2 t^2))^{-1/2} dt$$

Как было отмечено в п. 2, величина $k^2(\xi/l)$ монотонно убывает с возрастанием ξ . Произведение $k'K$, очевидно, также убывает и поэтому изменение ξ от нуля до l увеличивает производную $\Pi_2'(\xi)$ от нуля до значения

$$\Pi_2'(\xi = l) = v_2 = \sqrt{2} \omega^2 l^2 \mu_0 / 2\pi^2$$

Предположим, что $F(\xi)$ не возрастает и непрерывна, тогда условие $v_2 - F(l) > 0$ гарантирует существование некоторого $\xi_1 < l$ устойчивого равновесия, в котором нить имеет форму полуволны, а равновесие $\xi = l$ отвечает максимуму потенциальной энергии $\Pi_1 + \Pi_2$. Если же $v_2 - F(l) < 0$, то устойчивым становится равновесие $\xi = l$, в котором нить прямолинейна.

Поступила 19 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., Гостехтеориздат, 1951.
2. Пожарицкий Г. К. Задача минимума в задаче устойчивости равновесия твердого тела с частичным жидким наполнением. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
3. Пожарицкий Г. К., Румянцев В. В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью. ПММ, 1963, т. 27, вып. 1.
4. Мовчан А. А. Устойчивость процессов по двум метрикам. ПММ, 1960, т. 24, вып. 6.
5. Аппель П., Теоретическая механика, М., Физматгиз, 1960, т. 1.