Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 531.31

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ ГОЛОНОМНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЧАСТИЧНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

П. Хагедорн

(ФРГ)

Доказывается теорема о неустойчивости равновесия диссипативной системы в случае отсутствия максимума силовой функции. Диссипация частичная и отсутствует только в одной из степеней свободы. Доказательство основано не на линеаризации дифференциальных уравнений, а на прямом методе Ляпунова, и использует несколько видоизмененную форму теоремы Н. Н. Красовского. Неустойчивость устанавливается для систем с произвольными нелинейными диссипативными силами и изолированным равновесием.

1. Постановка задачи. Пусть $q' = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ — обобщенные координаты голономной механической системы с n степенями свободы (здесь и далее штрих означает транспонирование). Предположим, что кинетическая энергия представляет собой квадратичную форму обобщенных скоростей $q_1^{\cdot}, q_2^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$

$$2T(q, q^{\cdot}) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}(q)\, q_i^{\cdot} q_j^{\cdot} = (q^{\cdot})' A(q)\, q^{\cdot} \tag{1.1}$$

где $A(q) = \| a_{ij} \|$. Предположим, что в некоторой окрестности точки $q = 0$ функции $a_{ij}(q)$ непрерывно дифференцируемы, матрица A — симметричная, а квадратичная форма (1.1) определенно-положительна по $q^{\cdot}$.

Пусть силовая функция $U(q)$ также непрерывно дифференцируема и, кроме консервативных сил, действуют только диссипативные силы, так что уравнения движения имеют вид

$$d / dt\, (\partial L / \partial q_i^{\cdot}) - \partial L / \partial q_i = Q_i(q, q^{\cdot}) \tag{1.2}$$

Здесь

$$L(q, q^{\cdot}) = T(q, q^{\cdot}) + U(q)$$

причем для всех значений $(q, q^{\cdot})$ в некоторой окрестности $(q = 0,\ q^{\cdot} = 0)$

$$D(q, q^{\cdot}) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(q, q^{\cdot})\, q_i^{\cdot} \leqslant 0 \tag{1.3}$$

Обобщенные диссипативные силы $Q_i(q, q^{\cdot})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны по q и $q^{\cdot}$ и $Q_i(q, 0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, для всех значений q. Поскольку T определенно положительна, то уравнения движения всегда могут быть приведены к стандартной форме

(1.4) $$q^{\cdot\cdot} = f(q, q^{\cdot})$$

Каждое решение системы (1.4) соответствует возможному движению.

Предположим, что рассматриваемая система (1.4) удовлетворяет условиям существования (для $t \geqslant 0$) и единственности решения, и обозначим решение, соответствующее начальным значениям $q(t=0) = q_0$ и $q^{\cdot}(t=0) = q_0^{\cdot}$, через $q(q_0, q_0^{\cdot}, t)$.

Далее, предположим, что система имеет положение равновесия в $q = 0$, так что

(1.5) $$\partial U / \partial q_i = 0 \quad \text{при } q = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости по Ляпунову этого тривиального решения. Без уменьшения общности полагаем, что $U(0) = 0$.

Если в точке $q = 0$ функция U имеет строгий максимум (строгий в смысле определения Бурбаки [1]: «maximum relatif strict»), то из теоремы Ляпунова немедленно следует, что положение равновесия устойчиво. Действительно, выбирая за функцию Ляпунова $T - U$, в силу системы (1.2) имеем

$$d(T - U)/dt = \sum_{i=1}^{n} Q_i(q, q^{\cdot})\, q_i^{\cdot}$$

что и показывает устойчивость равновесия. При $D(q, q^{\cdot}) \equiv 0$ имеем теорему Лагранжа — Дирихле. Если $D(q, q^{\cdot})$ определенно отрицательна по $q^{\cdot}$ и положение равновесия изолировано, т. е. если существует некоторая окрестность точки $q = 0$, в которой нет других положений равновесия,— то равновесие асимптотически устойчиво.

Если силовая функция $U(q)$ не имеет максимума в $q = 0$, то в системах без диссипации ($D(q, q^{\cdot}) = 0$) равновесие, по-видимому, неустойчиво во всех интересных для практики случаях. Однако на уровне строгих теоретических исследований на функцию $U(q)$ должны быть наложены дополнительные условия. Это показывается хорошо известным контрпримером Пенлеве [2].

Математические трудности, возникающие при доказательстве таких теорем о неустойчивости, весьма значительны в случаях как диссипативных, так и недиссипативных систем (см. [2-6]). Лишь в случаях, когда функция $D(q, q^{\cdot})$ определенно отрицательна по $q^{\cdot}$, положение равновесия $q = 0$ изолировано и в любой сколь угодно малой окрестности $q = 0$ имеются точки, в которых U принимает положительные значения; известно тривиальное решение этой проблемы: равновесие неустойчиво. Это может быть выведено из модификации теоремы Ляпунова (см. например, теорему 15.1 в [7]).

С другой стороны, предположим, что диссипация частичная. В этом случае еще неизвестно, будет ли из отсутствия максимума $U(q)$ в определенном выше смысле следовать, что $q = 0$ обязательно неустойчиво.

В принципе, нужно принимать во внимание возможность стабилизации диссипативными силами ранее неустойчивого равновесия. Этот вопрос крайне труден и общие результаты неизвестны до сих пор. Ниже будет доказана неустойчивость для случая изолированного равновесия, если диссипация определенная по $n-1$ обобщенной координате и если в любой сколь угодно малой окрестности $q=0$ найдутся точки q^i, такие что $U(q^i)>0$. Говорят, что диссипация сводится к $n-1$ координате, если $Q_n\equiv 0$, что и предполагается ниже.

Понадобится следующая теорема А о неустойчивости тривиального решения $x=0$ дифференциального уравнения $x^{\cdot}=X(x)$.

Теорема А. Пусть выполнены следующие условия:

1°. Функция $V(x)$ определена и непрерывно дифференцируема в

$$G=\{x\mid \|x\|\leqslant H\},\qquad V(0)=0,\ H>0$$

2°. $dV/dt\geqslant 0$ в G вдоль траекторий уравнения $x^{\cdot}=X(x)$.

3°. Существует последовательность $x^1, x^2, \ldots, V(x^i)>0,\ i=1,2,\ldots,$ $x^i\to 0$ при $i\to\infty$ и некоторое число H_1, $H>H_1>0$, такие что ни одно из решений $x(x^i,t)$ не содержит полутраектории, начинающейся в $G_1=\{x\mid \|x\|\leqslant H_1\}$, вдоль которой $dV/dt\equiv 0$.

Тогда $x=0$ неустойчиво.

Говорят, что решение $x(x^\circ,t)$ содержит полутраекторию, начинающуюся в G_1, вдоль которой $dV/dt\equiv 0$, если существует некоторое $t_*\geqslant 0$, такое что для $0\leqslant t\leqslant t_*$ решение целиком лежит в G_1, и если для $t\geqslant t_*$ имеем $dV/dt\equiv 0$ (для всех $x(x^\circ,t_{**})$ таких, что $x(x^\circ,t)\in G_1$, $t_*\leqslant t\leqslant t_{**}$.

Эта теорема представляет собой непосредственное следствие теоремы 15.1 Н. Н. Красовского [7], где требуется, чтобы не существовало полутраекторий, вдоль которых $dV/dt\equiv 0$. Однако такие полутраектории можно допустить, если они начинаются вне определенной фиксированной окрестности $x=0$. Доказательство от этого не меняется.

2. Теорема о неустойчивости для систем с частичной диссипацией. Дадим точную формулировку анонсированной выше теоремы о неустойчивости.

Теорема. Пусть голономная диссипативная механическая система с n степенями свободы имеет равновесие в $q=0$ и удовлетворяет следующим условиям:

1°. Равновесие изолировано;

2°. В сколь угодно малой окрестности $q=0$ имеются точки q^i, такие что $U(q^i)>0$ $(U(0)=0)$;

3°. Функция

$$D(q,q^{\cdot})=\sum_{j=1}^{n-1}Q_j(q,q^{\cdot})q^{\cdot}_j$$

определенно-отрицательна по $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_{n-1}$ для всех q из некоторой окрестности $q=0$, а $Q_n(q,q^{\cdot})\equiv 0$;

4°. Входящие в выражение кинетической энергии коэффициенты a_{sn} $(s=1,2,\ldots,n-1)$ не зависят от q_n, а a_{nn} — константа.

Тогда равновесие неустойчиво.

Доказательство. Равновесие $q = 0$ изолировано, поэтому существует число $H^* > 0$, такое что $q = 0$ — единственное положение равновесия системы в $G^* = \{(q, q^{\cdot}) \mid \|q\| + \|q^{\cdot}\| < H^*\}$.

Для доказательства теоремы о неустойчивости понадобятся две леммы, отвечающие двум типам последовательностей вида

$$(q^i, (q^{\cdot})^i) \in G^*, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

$$(q^i, (q^{\cdot})^i) \to (0, 0) \quad \text{при } i \to \infty$$

$$T(q^i, (q^{\cdot})^i) - U(q^i) < 0$$

Такие последовательности всегда могут быть найдены, если выполнены условия теоремы.

Тип. 1. Назовем $(q^i, (q^{\cdot})^i)$, $i = 1, 2, \ldots$, последовательностью типа 1, если существует некоторое число H_1^*, $H^* > H_1^* > 0$, такое что ни одно из движений $q(q^i, (q^{\cdot})^i, t)$, $q^{\cdot}(q^i, (q^{\cdot})^i, t)$ (решений (1.4)) не содержит полутраектории, начинающейся в $G_1^* = \{(q, q^{\cdot}) \mid \|q\| + \|q^{\cdot}\| < H_1^*\}$, вдоль которой $D(q, q^{\cdot}) \equiv 0$.

Лемма 1. Если для некоторой механической системы выполнены все условия теоремы о неустойчивости и существует последовательность типа 1, то равновесие $q = 0$ неустойчиво.

Это немедленно следует из теоремы А. Положив $V = -T + U$, имеем $V^{\cdot} = -D$, и все требования теоремы А выполнены.

Тип 2. Назовем $(q^i, (q^{\cdot})^i)$ последовательностью типа 2, если существует число H_2^*, $H^* > H_2^* > 0$, такое что все движения $q(q^i, (q^{\cdot})^i, t)$, $q^{\cdot}(q^i, (q^{\cdot})^i, t)$ содержат полутраектории, начинающиеся в $G_2^* = \{(q, q^{\cdot}) \mid \|q\| + \|q^{\cdot}\| \leqslant H_2^*\}$, вдоль которых $D(q, q^{\cdot}) \equiv 0$.

Лемма 2. Если для некоторой механической системы выполнены все условия теоремы о неустойчивости и существует последовательность типа 2, то равновесие $q = 0$ неустойчиво.

Для доказательства рассмотрим одно из движений $q(q^i, (q^{\cdot})^i, t)$ для произвольного i. Покажем, что для каждого i фазовая точка достигает границы области G_2^* за конечное время. Если $D \equiv 0$, то $q_1^{\cdot} = q_2^{\cdot} = \ldots = \dot{q}_{n-1} = 0$, $q_1^i = c_1^i$, $q_2^i = c^i_2, \ldots, q^i_{n-1} = c^i_{n-1}$ ($c_s^i = \text{const}$, $s = 1, 2, \ldots, n-1$). Так как $n - 1$ первые координаты постоянны, то движение имеется только в одной степени свободы. (Для этого случая, как будет показано, можно без особых трудностей показать неустойчивость.)

Обозначим через t_i величину t такую, что $D(q(q^i, (q^{\cdot})^i, t), q^{\cdot}(q^i, (q^{\cdot})^i, t)) \equiv 0$ для $t \geqslant t_i$. Точка $(q(q^i, (q^{\cdot})^i, t), q^{\cdot}(q^i, (q^{\cdot})^i, t))$ принадлежит G_2^*.

Докажем, что алгебраическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial q_n} U(c_1^i, c_2^i, \ldots, c^i_{n-1}, q_n) = 0 \tag{2.1}$$

не имеет решения в G_2^* на рассматриваемой траектории ($t \geqslant t_i$).

Рассмотрим уравнения движения

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs} q_s^{\cdot\cdot} + \frac{1}{2} \sum_{u=1}^{n} \sum_{v=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{ru}}{\partial q_v} + \frac{\partial a_{rv}}{\partial q_u} - \frac{\partial a_{uv}}{\partial q_r} \right) q_u^{\cdot} q_v^{\cdot} - \frac{\partial U}{\partial q_r} = 0$$

$$r = 1, 2, \ldots, n$$

которые следуют из (1.2) при $Q_r = 0$. Из $q_s = c_s^i$, $s = 1, 2, \ldots, n-1$, и предположения 4° теоремы о неустойчивости (предположение 4° теоремы о неустойчивости можно заменить ослабленным условием $2\partial a_{rn} / \partial q_n = \partial a_{nn} / \partial q_r$, $r = 1, 2, \ldots, n$), имеем

$$a_{rn} q_n^{\cdot\cdot} - \partial U / \partial q_r = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots, n \tag{2.2}$$

Если $\partial U / \partial q_n = 0$ для некоторого значения q_n, то и $q_n^{\cdot\cdot} = 0$, поскольку $a_{nn} > 0$. Тогда из первых $n-1$ уравнений (2.2) следует, что в этой же точке $\partial U / \partial q_r = 0$ ($r = 1, 2, \ldots, n-1$). В любой точке G_2^*, кроме центра, это невозможно, поскольку равновесие изолировано. Однако к началу координат фазовая точка приблизиться не может, потому что $h_i = T - U < 0$. Это означает, что уравнение (2.1) не имеет решения на рассматриваемой траектории.

Движение $q(q^i, (q^i)^{\cdot}, t)$ имеет место только в одной степени свободы (соответствующей q_n), поэтому оно должно принадлежать к одному из следующих типов:

1°. $(q(t),\ q^{\cdot}(t)) \in G_2^*, \quad t \geqslant t_i$

$(g(t),\ g^{\cdot}(t)) \to (g^*, 0) \in G_2^*$ при $t \to \infty$

$g'(t) = (c_1^i, c_2^i, \ldots, c_{n-1}^i, q_n(t)),\ (g^{\cdot}(t))' = (0, 0, \ldots, 0, q_n^{\cdot}(t))$

$(g^*)' = (c_1^i, c_2^i, \ldots, c_{n-1}^i, q_n^*)$

2°. $(q(t), q^{\cdot}(t)) \in G_2^*$; $t \geqslant t_i$ и $q_n(q^i, (q^{\cdot})^i, t)$ периодическая;

3°. $(q(t), q^{\cdot}(t))$ достигает границы G_2^* за конечное время.

Для движений в более чем одной степени свободы такая простая классификация отсутствует.

В случае 1° в точке $(g^*, 0) \in G_2^*$ было бы положение равновесия, что следует из непрерывности правых частей (1.4). Это равновесие отличалось бы от $q = 0$, $q^{\cdot} = 0$, так как $h_i < 0$. Следовательно, случай 1° может быть исключен (по предположению, в G_2^* существует единственное положение равновесия в начале координат).

В случае 2° функция $q_n(t)$ изменяется в закрытом интервале $[g_1, g_2]$. Функция $|\partial U / \partial q_n|$ непрерывна по q_n и, следовательно, достигает минимального значения на этом интервале. Из изложенного выше известно, что этот минимум не равен нулю. Следовательно, существует число $a_i > 0$, такое, что $|\partial U / \partial q_n| > a_i$ на рассматриваемом движении, т. е. функция $U(c_1^i, c_2^i, \ldots, c_{n-1}^i, q_n)$ строго монотонна по q_n, и уравнение $h_i = -U(q_n)$ имеет не более одного решения в $[g_1, g_2]$. Следовательно, имеется не более одной точки с нулевой скоростью в движении $q(q^i, (q^{\cdot})^i, t)$ для $t \geqslant t_i$.

Это противоречит предположению о периодичности решения, и случай 2° также можно исключить.

Следовательно, возможен только случай 3°. Таким образом, существует последовательность $(q^i, (q^{\cdot})^i) \to (0, 0)$, $i = 1, 2, \ldots$, причем каждое решение $(q\,(q^i, (q^{\cdot})^i, t),\ q^{\cdot}\,(q^i, (q^{\cdot})^i, t))$ достигает границы области G_2^* за конечное время. Равновесие неустойчиво, и доказательство леммы 2 завершено.

Доказательство теоремы о неустойчивости теперь очевидно. Рассмотрим произвольную последовательность $(q^i, (q^{\cdot})^i) \in G^*$, $i = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую условиям

$$(q^i, (q^{\cdot})^i) \to (0, 0) \quad \text{при } i \to \infty$$
$$T\,(q^i, (q^{\cdot})^i) - U\,(q^i) < 0, \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Из этой последовательности постараемся выделить подпоследовательность типа 1. Если это возможно, то неустойчивость следует из леммы 1. Если это невозможно, то должно существовать некоторое p, такое что для $i > p$ все члены последовательности соответствуют движениям, которые содержат полутраектории, начинающиеся в G^*, вдоль которых $D\,(q, q^{\cdot}) \equiv 0$. Это означает, что существует последовательность типа 2. Тогда неустойчивость гарантируется леммой 2, и доказательство теоремы о неустойчивости завершено.

Требование теоремы о неустойчивости можно слегка ослабить. Не обязательно требовать, чтобы $Q_n\,(q, q^{\cdot}) = 0$ для всех $(q, q^{\cdot}) \in G^*$, но достаточно потребовать, чтобы Q_n равнялось нулю в $G^{**} \subset G^*$, где

$$G^{**} = G^* \cap \{(q, q^{\cdot}) \mid T\,(q, q^{\cdot}) - U\,(q) \leqslant 0\}$$

Это очевидно, так как при доказательстве теоремы рассматривались только движения с начальными условиями $(q^i, (q^{\cdot})^i) \in G^{**}$ и фазовые точки могли достичь границы G^{**} только в точках, принадлежащих также и границе G^*.

3. Некоторые нерешенные вопросы. В предложенной здесь теореме о неустойчивости речь идет исключительно о системах с диссипацией, отсутствующей только в одной из степеней свободы. Движения, на которых не происходит диссипации энергии и которые, возможно, существуют, могут тогда рассматриваться как решения уравнения движения системы с одной степенью свободы. С другой стороны, в случае консервативной системы с одной степенью свободы можно показать, что каждое движение с отрицательной механической энергией $T - U < 0$ покидает некоторую окрестность изолированного положения равновесия. В случае систем с несколькими спепенями свободы это еще не доказано. Если бы такое доказательство было получено, последовало бы обобщение предложенной теоремы на случай систем с произвольной частичной диссипацией.

Четаев [4] доказал, что все движения с нулевыми начальными значениями импульсов покидают окрестность положения равновесия. Этого, однако, недостаточно для обобщения предложенной теоремы о неустойчивости, так как такое утверждение должно относиться ко всем движениям, начинающимся в G^{**}.

Может быть, удастся вывести это свойство при помощи геометрических соображений. Если проблема сформулирована на основании принципа Якоби, то задача сводится к вопросу о поведении геодезических линий в псевдо-римановом пространстве. По-видимому, ответ может быть найден при помощи теорем существования вариационного исчисления (см. например, [5]).

Автор полагает, что справедливо следующее обобщение предложенной теоремы о неустойчивости. Пусть дискретная голономная автономная диссипативная (D $(q, q^{\cdot})$ постоянно отрицательна) система имеет изолированное положение равновесия в $q = 0$. В сколь угодно малой окрестности равновесия имеются точки q^i, в которых U $(q^i) > 0$; тогда равновесие неустойчиво (U $(0) = 0$).

Условия, что положение равновесия изолировано и U может принимать положительные значения, существенны.

Поступила 14 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bourbaki N.* Éléments de mathématique, Fs. 9, Paris Herrmann, 1958.
2. *Painlevé P.* Sur la stabilité de l'équilibre. Compt. rend. Acad. sci. Paris, 1904, t. 138, N⁰ 25.
3. *Cetajev N. G.* Sur la réciproque du théoréme de Lagrange. Compt. rend. Acad. sci. Paris, 1930, t. 190, N⁰ 6.
4. *Четаев Н. Г.* О неустойчивости равновесия, когда силовая функция не есть максимум. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1938, т. 98, кн. 9.
5. *Hagedorn P.* Die Umkehrung der Stabilitätssätze von Lagrange — Dirichlet und Routh. Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1971, vol. 42, No. 4.
6. *Hagedorn P.* Eine zusätzliche Bemerkung zu meiner Arbeit: Die Umkehrung der Stabilitätssätze von Lagrange — Dirichlet und Routh. Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1972, vol. 47, No. 5.
7. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. Физматгиз, 1959.