

НЕКОТОРЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Е. Ф. Афанасьев, Г. П. Черепанов

(Москва)

На основе функционально-инвариантных решений волнового уравнения, предложенных В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым, предлагается замкнутое решение одного класса автомобильных проблем динамической теории упругости. Этот класс охватывает следующие задачи: а) полуплоскость, произвольно нагруженная на границе (в том числе случай, когда концы нагруженных участков движутся с произвольными постоянными скоростями); б) контактная задача для полуплоскости, когда концы контактных площадок перемещаются с произвольными постоянными скоростями; в) совокупность произвольно нагруженных разрезов вдоль одной и той же прямой, движущихся с постоянными скоростями, причем скорости разных концов разрезов могут быть различными. Решение указанных задач сводится в простейших случаях к совокупности задач Дирихле или смешанных задач Келдыша — Седова теории аналитических функций комплексного переменного. Процедура нахождения решения оказывается принципиально не более сложной, чем для аналогичных задач статики и стационарной динамики (решение последних задач найдено в основном Г. В. Колосовым, Н. И. Мусхелишвили, Л. А. Галиным и Радоком). Вначале выводятся общие представления решения через аналитические функции комплексного переменного для произвольного индекса автомобильности, и дано описание общего метода решения. Затем метод демонстрируется на некоторых конкретных задачах из указанного класса. Рассмотрение ограничено плоскими задачами для однородного и изотропного тела, однако метод нетрудно обобщить на случай анизотропного кусочно-однородного тела, когда верхняя и нижняя полуплоскости имеют различные упругие постоянные.

В 1932 г. В. И. Смирнов и С. Л. Соболев обнаружили класс решений волнового уравнения, в котором решение представляется через аналитическую функцию комплексного переменного [1] (см. приложение). В этот класс входят, в частности, автомобильные задачи. Методом Смирнова — Соболева было проанализировано несколько интересных задач из теории дифракции упругих плоских волн на разрезе [2, 3] и угле, однако в большинстве решений динамических задач теории упругости, полученных за последние 20 лет, использовались гораздо более громоздкие методы, требующие большого объема вычислительных работ. Перечислим некоторые наиболее известные из таких решений.

Решена задача о внезапном появлении прямолинейного полубесконечного неподвижного разреза в постоянном поле растягивающих напряжений [4], а также задача, в которой тот же разрез двигался с неизменной скоростью с момента его появления [5]. Исследовано [6] распространение разреза с постоянной скоростью в обе стороны, при этом начальная длина его равна нулю, а поле растягивающих напряжений считается постоянным (соответствующая осесимметричная задача рассмотрена в [7, 8]). Аналогичные задачи рассмотрены в работах [9-11]. В работе [12] рассмотрены некоторые динамические задачи о распространении трещин и приведен довольно подробный обзор литературы. В работах [13-15] задача Броберга [6] была обобщена на случай анизотропного материала и на случай произвольно заданной на щели нормальной нагрузки, сохраняющей автомобильность задачи. Все указанные решения автомобильны с индексом (0, 0) (см. монографию [17], а также п. 1 данной статьи).

К этим задачам примыкают также контактная задача об ударе клином по полуплоскости [18], задача о движении с постоянной скоростью сосредоточенной силы по границе полуплоскости, начиная с некоторого начального момента [19], контактная задача об ударе плоского штампа о полуплоскость [20]. В задачах [18–20] индекс автомодельности иной. Большое число аналогичных автомодельных задач рассмотрено для акустического приближения, которому соответствует сложный сдвиг в теории упругости (см., например, [21]).

В недавних работах [22, 23] одновременно и независимо была решена задача о движении с постоянной скоростью полубесконечного разреза (как в задаче Бейкера); к берегам разреза приложены сосредоточенные силы. Это решение можно использовать в качестве функции Грина в случае произвольных статических нагрузок. Используя характерное свойство коэффициента интенсивности напряжений в полученном решении, удалось обобщить его на случай произвольной непостоянной скорости движения разреза при произвольных внешних нагрузках [22].

В данной работе развивается общий подход к автомодельным задачам динамической теории упругости, который позволяет получать их решение весьма просто в замкнутом виде. Этот подход основан на общих представлениях решения через аналитические функции комплексного переменного, которые позволяют сразу формулировать указанные автомодельные задачи как некоторые проблемы Римана — Гильберта для полуплоскости (в простейших случаях получается задача Дирихле и смешанная задача Келдыша — Седова). Проблема Римана — Гильберта для полуплоскости легко решается при помощи стандартных методов, изложенных, например, в монографиях [24, 25]. В п. 2–4 рассмотрены также некоторые конкретные задачи о штампах, о движущихся нагрузках и щелях. Указанный общий подход применялся ранее авторами для решения различных частных задач [23–30].

1. Общие представления. Метод решения. Пусть однородное и изотропное упругое тело находится в условиях плоской деформации. Основные уравнения динамической теории упругости в данном случае имеют следующий вид:

$$(1.1) \quad u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = -\frac{\partial v_2}{\partial y}$$

$$(1.2) \quad \Delta u_k = \frac{1}{c_k^2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad \Delta v_k = \frac{1}{c_k^2} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} \quad (k = 1, 2)$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Здесь $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ — составляющие смещения по осям x и y декартовых координат соответственно, c_1 и c_2 — скорости продольной и поперечной волн ($c_1 > c_2$).

Компоненты σ_x , σ_y , τ_{xy} тензора напряжений согласно закону Гука равны (μ — постоянная Ламе)

$$(1.3) \quad \sigma_x = \mu \left[\frac{c_1^2}{c_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

$$\sigma_y = \mu \left[\frac{c_1^2}{c_2^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right]$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Укажем класс автомодельных плоских задач динамической теории упругости, решение которых при помощи комплексных переменных z_1 и z_2 ,

где

$$(1.4) \quad z_k = \frac{xt - iy \sqrt{t^2 - c_k^{-2}(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2} \quad (k = 1, 2)$$

сводится к краевой задаче Римана — Гильберта из теории аналитических функций одной комплексной переменной (в простейших случаях — к задаче Дирихле или к смешанной задаче Келдыша — Седова). Этот класс охватывает следующие задачи [17].

Первая основная задача (задача А): а) бесконечное упругое полупространство $y \geq 0$ имеет любое число нагруженных участков вдоль оси x , концы этих участков, имеющие координаты x_n , перемещаются с постоянными скоростями V_n , так что $x_n = V_n t$ (в частности скорости некоторых концов могут быть равными нулю);

б) в начальный момент времени $t = 0$ полупространство покоится;

в) нормальные и касательные нагрузки на указанных участках представляют собой произвольные линейные комбинации следующих функций;

$$(1.5) \quad \frac{d^m f_n(x)}{dx^m} \frac{d^k f_l(t)}{dt^k}$$

где

$$(1.6) \quad f_i(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < 0 \\ \xi^i & \text{при } \xi > 0 \end{cases}$$

Здесь k, l, m, n — произвольные целые положительные числа.

Вторая основная задача (задача В): а) бесконечное упругое пространство имеет любое число разрезов вдоль оси x , концы разрезов x_n перемещаются с постоянными скоростями V_n , так что $x_n = V_n t$ (в частности некоторые V_n могут равняться нулю);

б) в начальный момент времени $t = 0$ пространство покоится;

в) нормальные и касательные нагрузки на разрезах представляют собой произвольные линейные комбинации функций (1.5) (см. также (1.6)), при этом нагруженные участки могут не совпадать с разрезами, а двигаться со своими скоростями.

Контактная задача (задача С): а) бесконечное упругое полупространство $y \geq 0$ имеет любое число нагруженных участков вдоль оси x , концы этих участков, имеющие координаты x_n , перемещаются с постоянными скоростями, так что $x_n = V_n t$;

б) в начальный момент времени $t = 0$ пространство покоится;

в) на нагруженных участках поставлены граничные условия одного из трех типов; 1) нормальное и касательное смещения заданы как некоторые произвольные линейные комбинации из функции вида (1.5), (1.6) (шероховатый штамп); 2) касательное напряжение равно нулю, а нормальное смещение является линейной комбинацией функции вида (1.5), (1.6) (гладкий штамп); 3) касательное напряжение прямо пропорционально нормальному напряжению (т. е. задается кулонов закон сухого трения $\tau_{xy} = k\sigma_y$), а нормальное смещение — линейная комбинация функций вида (1.5), (1.6).

При $m > n$ первый сомножитель в (1.5) с точностью до численного коэффициента представляет собой $(m - n + 1)$ -ю производную дельта-функции Дирака; это же замечание относится ко второму сомножителю с очевидным соответствием индексов $m \rightarrow k, n \rightarrow l$.

Тип автомодельности задачи A, B или C определяется двумя числами $m - n$ и $k - l$. Пару чисел $(m - n, k - l)$ будем называть индексом автомодельности задачи A, B, C . При решении задач указанного выше типа следует вначале определить индекс автомодельности граничной задачи или же представить граничные условия в виде линейной суперпозиции автомодельных задач с различными индексами. Затем для каждого индекса нужно вывести соответствующие общие представления через аналитические функции, а потом уже решать конкретные краевые задачи теории аналитических функций, получающиеся из граничных условий. В общем случае граничных условий, приведенных выше, приходится решать краевую задачу Римана — Гильберта с разрывными коэффициентами для одного комплексного переменного на полуплоскости; эта задача хорошо изучена, и ее замкнутое решение не доставляет трудностей (см., например, монографии [24, 25]).

Отметим сразу же следующие два обстоятельства.

1). Произвольная непрерывная функция двух переменных x и t в любой замкнутой области может быть равномерно аппроксимирована некоторым многочленом, т. е. суммой членов вида $x^m t^n$. Каждому такому члену в граничных условиях задач A, B и C (см. (1.5) и (1.6)) отвечает определенный индекс автомодельности. Следовательно, случай, когда заданные нагрузки или смещения представляют собой произвольные непрерывные функции, сводится к рассматриваемому. Кроме того, произвольную функцию x и t можно представить в виде линейной суперпозиции δ_0 -образных и δ_1 -образных функций, для каждой из которых решение будет автомодельным и может быть использовано в качестве функции Грина.

2). Из решения краевых задач A, B и C решения соответствующих статических и стационарных динамических задач плоской теории упругости получаются как некоторые предельные случаи. Укажем соответствующие предельные переходы:

Предельная квазистатическая задача

$$(1.7) \quad V_n \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad V_n t \rightarrow a_n$$

предельная квазистационарная динамическая задача

$$(1.8) \quad V_n = V + \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad \varepsilon_n t \rightarrow a_n$$

Здесь V и a_n — некоторые константы.

Следовательно, указанный класс решений динамической теории упругости, по существу, является некоторым аналогом плоской статической задачи для полуплоскости [31], а также плоской стационарной динамической задачи для полуплоскости [32, 33].

Выведем общие представления для наиболее употребительных типов автомодельности. Из анализа размерностей следует, что для каждого ин-

декса автомодельности существуют функции, удовлетворяющие волновому уравнению и являющиеся однородными функциями x, y, t нулевого измерения. Это следующие функции:

1° смещения u и v , задача C , индекс $(1,0)$;

2° напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, задачи A и B , индекс $(0,0)$;

3° потенциалы смещения φ и ψ , задачи A и B , индекс $(1,1)$; напомним, что

$$(1.9) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

4° функции Lu и Lv , задача C , индекс (m, n) ;

5° функции $L\sigma_x, L\sigma_y, L\tau_{xy}$ задачи A и B , индекс (m, n) .

В 4° и 5° под L подразумевается следующий линейный дифференциальный оператор:

$$(1.10) \quad L = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial t^n}$$

Указанные однородные функции x, y, t нулевого измерения представим в виде суммы двух слагаемых; одно из них, очевидно, удовлетворяет волновому уравнению для продольных волн, а другое — волновому уравнению для поперечных волн. Первое из этих слагаемых может быть представлено как действительная часть некоторой аналитической функции от z_1 , а второе — как действительная часть другой аналитической функции от z_2 (см. приложение и формулу (1.11)). При $y = 0$ имеем

$$(1.11) \quad z_1 = z_2 = t / x \quad (y=0)$$

Вводя комплексное переменное z , вещественная часть которого равна t / x , граничные задачи вида A, B или C одного индекса сводим к краевой задаче Римана — Гильберта от одного комплексного переменного z , но для нескольких функций. Впрочем в рассматриваемых случаях все функции могут быть выражены через одну, и задача приводится к стандартной задаче Римана — Гильберта для одной функции. В простейших случаях получается задача Дирихле и смешанная задача Келдыша — Седова.

Найдем общие представления для указанных пяти случаев. 1°

1°. Смещения u и v — однородные функции. Согласно формулам (1.2) и (1.4), имеем

$$(1.12) \quad u = \operatorname{Re} [f_1(z_1) + f_2(z_2)], \quad v = \operatorname{Re} [f_3(z_1) + f_4(z_2)]$$

Четыре неизвестные функции комплексных переменных должны удовлетворять двум условиям (1.1), которые принимают следующий вид:

$$(1.13) \quad \operatorname{Re} \left[f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial y} \right] = \operatorname{Re} \left[f_3'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} \right]$$

$$\operatorname{Re} \left[f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right] = - \operatorname{Re} \left[f_4'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial y} \right]$$

Дифференцируя (П. 7), найдем

$$(1.14) \quad \frac{\partial z_k}{\partial x} = \frac{z_k \sqrt{c_k^{-2} - z_k^2}}{yz_k - x \sqrt{c_k^{-2} - z_k^2}}, \quad \frac{\partial z_k}{\partial y} = \frac{c_k^{-2} - z_k^2}{yz_k - x \sqrt{c_k^{-2} - z_k^2}} \quad (k = 1, 2)$$

Отсюда

$$(1.15) \quad \sqrt{c_1^{-2} - z_1^2} f_1'(z_1) = z_1 f_3'(z_1) \\ z_2 f_2'(z_2) = -\sqrt{c_2^{-2} - z_2^2} f_4'(z_2)$$

Таким образом, однородные смещения u и v при помощи (1.12) представляются через четыре аналитические функции, связанные двумя равенствами (1.15). А представления для напряжений получаются из (1.12), (1.14), (1.15) по формулам (1.3)

$$(1.16) \quad \sigma_x = \mu \operatorname{Re} \left[\frac{c_2^{-2} - 2(c_1^{-2} - z_1^2)}{z_1^2} f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} + 2f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right] \\ \sigma_y = \mu \operatorname{Re} \left[\frac{c_2^{-2} - 2z_1^2}{z_1^2} f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} - 2f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right] \\ \tau_{xy} = \mu \operatorname{Re} \left[2f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{c_2^{-2} - 2z_2^2}{z_2 \sqrt{c_2^{-2} - z_2^2}} f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right]$$

2°. Напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} — однородные функции. Согласно закону Гука, первые производные смещений по координатам будут также однородными функциями. Следовательно, их можно представить в виде

$$(1.17) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re} [f_1(z_1) + f_2(z_2)], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{Re} [f_3(z_1) + f_4(z_2)] \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{Re} [f_5(z_1) + f_6(z_2)], \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{Re} [f_7(z_1) + f_8(z_2)]$$

Восемь неизвестных функций комплексных переменных в (1.17) должны удовлетворять следующим шести условиям, четыре из которых — следствия (1.1):

$$(1.18) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right)$$

Окончательно, используя формулы (1.14), находим представления

$$(1.19) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{Re} [g_1(z_1) + g_2(z_2)], \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{Re} [g_3(z_1) + g_4(z_2)] \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{Re} [g_5(z_1) + g_6(z_2)], \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{Re} [g_6(z_1) - g_2(z_2)]$$

Здесь шесть неизвестных функций комплексного переменного должны удовлетворять следующим четырем равенствам, вытекающим из (1.18):

$$(1.20) \quad z_1 g_3'(z_1) = \sqrt{c_1^{-2} - z_1^2} g_1'(z_1), \quad z_1 g_6'(z_1) = \sqrt{c_1^{-2} - z_1^2} g_3'(z_1) \\ z_2 g_2'(z_2) = -\sqrt{c_2^{-2} - z_2^2} g_5'(z_2), \quad z_2 g_4'(z_2) = -\sqrt{c_2^{-2} - z_2^2} g_2'(z_2)$$

Подставляя (1.19) в формулы (1.3), получим напряжения

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \mu \operatorname{Re} \left\{ \frac{c_1^2}{c_2^2} [g_1(z_1) + g_6(z_1)] - 2g_6(z_1) + 2g_2(z_2) \right\} \\ \sigma_y &= \mu \operatorname{Re} \left\{ \frac{c_1^2}{c_2^2} [g_1(z_1) + g_6(z_1)] - 2g_1(z_1) - 2g_2(z_2) \right\} \\ \tau_{xy} &= \mu \operatorname{Re} \{ 2g_3(z_1) + g_4(z_2) + g_5(z_2) \} \end{aligned}$$

3°. *Потенциалы φ и ψ — однородные функции.* Так как φ удовлетворяет волновому уравнению для продольных волн, а ψ — для поперечных волн, то функции φ и ψ можно представить в виде

$$(1.22) \quad \varphi = \operatorname{Re} f_1(z_1), \quad \psi = \operatorname{Re} f_2(z_2)$$

Подставляя (1.21) в (1.3) и (1.9), имеем

$$(1.23) \quad \begin{aligned} u &= \operatorname{Re} \left[f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} + f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial y} \right] \\ v &= \operatorname{Re} \left[f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial y} - f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

$$(1.24) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= -\mu \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{c_2^{-2} - 2(c_1^{-2} - z_1^2)}{z_1} f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} + 2z_2 f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial y} \right] \\ \sigma_y &= -\mu \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{c_2^{-2} - 2z_1^2}{z_1} f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} - 2z_2 f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial y} \right] \\ \tau_{xy} &= -\mu \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial t} \left[2z_1 f_1'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{c_2^{-2} - 2z_2^2}{z_2} f_2'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

4°. *Функции Lu, Lv — однородные.* В этом случае для любого линейного дифференциального оператора L будут, очевидно, справедливы представления (1.12), (1.16), в которых вместо смещений u, v и напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ нужно подставить Lu, Lv и $L\sigma_x, L\sigma_y, L\tau_{xy}$, соответственно.

5°. *Функции $L\sigma_x, L\sigma_y, L\tau_{xy}$ — однородные.* В этом случае будут иметь место представления (1.19) — (1.21), в которых вместо смещений u, v и напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ нужно подставить Lu, Lv и $L\sigma_x, L\sigma_y, L\tau_{xy}$ соответственно.

Таким образом, во всех указанных представлениях, по существу, участвуют только две независимые неизвестные функции комплексного переменного, как и в статических задачах теории упругости.

Общие представления задач, симметричных относительно оси x . Выделим достаточно широкий класс задач динамической теории упругости (симметричных относительно оси x), при решении которых ставится граничное условие

$$(1.25) \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0$$

В этом случае можно получить общее представление решения через одну аналитическую функцию (одного и того же вида для всех указанных выше типов автомодельности).

Граничное условие (1.25) на основании представлений (1.12) и (1.16), (1.17) и (1.21), (1.22) — (1.23) приводит к следующему дополнительному равенству:

однородные смещения

$$(1.26) \quad 2 \sqrt{c_1^{-2} - z^2} \sqrt{c_2^{-2} - z^2} f_1'(z) + (c_2^{-2} - 2z^2) f_2'(z) = 0$$

однородные напряжения

$$(1.27) \quad 2g_3(z) + g_4(z) + g_5(z) = 0$$

однородные потенциалы

$$(1.28) \quad 2z \sqrt{c_1^{-2} - z^2} f_1'(z) + (c_2^{-2} - 2z^2) f_2'(z) = 0$$

Это равенство вместе с равенствами (1.15), (1.20) или (1.22) позволяет выразить все величины только через одну неизвестную аналитическую функцию комплексного переменного.

Аналогичный класс задач в статической теории упругости был найден Вестергардом [34].

Введем следующие обозначения:

в случае, когда функции Lu , Lv однородны

$$(1.29) \quad \begin{aligned} u^\circ &= Lu, & v^\circ &= Lv \\ \sigma_x^\circ &= L\sigma_x, & \sigma_y^\circ &= L\sigma_y, & \tau_{xy}^\circ &= L\tau_{xy} \end{aligned}$$

в случае, когда функции $L\sigma_x$, $L\sigma_y$, $L\tau_{xy}$ однородны

$$(1.30) \quad \begin{aligned} u^\circ &= \frac{\partial}{\partial t} Lu, & v^\circ &= \frac{\partial}{\partial t} Lv \\ \sigma_x^\circ &= \frac{\partial}{\partial t} L\sigma_x, & \sigma_y^\circ &= \frac{\partial}{\partial t} L\sigma_y, & \tau_{xy}^\circ &= \frac{\partial}{\partial t} L\tau_{xy} \end{aligned}$$

в случае, когда потенциалы φ , ψ однородны

$$(1.31) \quad \begin{aligned} u^\circ &= \int_0^t u(x, y, \tau) d\tau, & v^\circ &= \int_0^t v(x, y, \tau) d\tau \\ \sigma_x^\circ &= \int_0^t \sigma_x(x, y, \tau) d\tau, & \sigma_y^\circ &= \int_0^t \sigma_y(x, y, \tau) d\tau, & \tau_{xy}^\circ &= \int_0^t \tau_{xy}(x, y, \tau) d\tau \end{aligned}$$

Во всех указанных случаях функции u° и v° будут однородными. При помощи введенных обозначений все общие представления через одну аналитическую функцию можно привести к следующему одному виду:

$$(1.32) \quad u^\circ = \operatorname{Re} [U_1(z_1) + U_2(z_2)], \quad v^\circ = \operatorname{Re} [V_1(z_1) + V_2(z_2)]$$

$$(1.33) \quad \sigma_x^\circ = \frac{\mu}{c_2^{-2}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{[c_2^{-2} - 2(c_1^{-2} - z_1^2)](c_2^{-2} - 2z_1^2)}{c_1^{-2} - z_1^2} W'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial y} - 4z_2^2 W'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial y} \right\}$$

$$\sigma_y^\circ = \frac{\mu}{c_2^{-2}} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(c_2^{-2} - 2z_1^2)^2}{c_1^{-2} - z_1^2} W'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial y} + 4z_2^2 W'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial y} \right\}$$

$$\tau_{xy}^\circ = \frac{\mu}{c_2^{-2}} \operatorname{Re} \left\{ 2(c_2^{-2} - 2z_1^2) W'(z_1) \frac{\partial z_1}{\partial x} - 2(c_2^{-2} - 2z_2^2) W'(z_2) \frac{\partial z_2}{\partial x} \right\}$$

Здесь функции $U_k(z)$ и $V_k(z)$ выражаются через функцию $W(z)$ так:

$$(1.34) \quad \begin{aligned} U_1'(z) &= \frac{z(c_2^{-2} - 2z^2)}{c_2^{-2} \sqrt{c_1^{-2} - z^2}} W'(z), & V_1'(z) &= \frac{c_2^{-2} - 2z^2}{c_2^{-2}} W'(z) \\ U_2'(z) &= -\frac{2z \sqrt{c_2^{-2} - z^2}}{c_2^{-2}} W'(z), & V_2'(z) &= \frac{2z^2}{c_2^{-2}} W'(z) \end{aligned}$$

Функции $v^{\circ}(x, 0, t)$ и $\sigma_y^{\circ}(x, 0, t)$ выражаются через функцию $W(z)$ следующим образом:

$$(1.35) \quad y = 0, \quad v^{\circ} = \operatorname{Re} W(z) \quad (z = t/x)$$

$$(1.36) \quad y = 0, \quad \sigma_y^{\circ} = \frac{1}{t} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\mu}{c_2^{-2}} \frac{zS(z)}{\sqrt{c_1^{-2} - z^2}} W'(z) \right\}$$

Здесь и в дальнейшем через $S(z)$ обозначается функция

$$(1.37) \quad S(z) = (c_2^{-2} - 2z^2)^2 + 4z^2 \sqrt{c_1^{-2} - z^2} \sqrt{c_2^{-2} - z^2}$$

аналитическая во внешности разрезов $(-c_2^{-1}, -c_1^{-1})$ и (c_1^{-1}, c_2^{-1}) плоскости z и действительная вне этих разрезов при $\operatorname{Im} z = 0$.

Отметим, что единственным действительным корнем уравнения $S(z) = 0$ является величина, обратная скорости волн Рейли.

В задачах с заданными внешними нагрузками удобно использовать функцию $F(z)$, аналитическую в верхней (и нижней) полуплоскости

$$(1.38) \quad F(z) = -\frac{\mu}{c_2^{-2}} \frac{zS(z)}{\sqrt{c_1^{-2} - z^2}} W'(z)$$

Отметим следующую формулу, вытекающую из соотношений (1.36) и (1.38):

$$(1.39) \quad y = 0, \quad \sigma_y^{\circ} = t^{-1} \operatorname{Re} F(z) \quad (z = t/x)$$

2. Первая основная задача. Граничные условия первой основной задачи для полуплоскости будут следующими:

$$(2.1) \quad \sigma_y = f_1(x, t), \quad \tau_{xy} = f_2(x, t) \quad \text{при } y = 0$$

Задача 2.1. Задача о действии мгновенного сосредоточенного импульса 1, приложенного к границе полуплоскости, формулируется следующим образом:

$$(2.2) \quad \sigma_y = -I\delta_1(x)\delta_1(t), \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0$$

где $\delta_1(x)$ — функция Дирака. Это классическая задача Лэмба.

В этом случае потенциалы φ и ψ будут однородными и можно использовать формулы (1.31) — (1.39). При помощи формул (1.39) и (1.31) граничные условия (2.2) запишутся так:

$$(2.3) \quad \operatorname{Im} z = 0, \quad \operatorname{Re} F(z) = -I\delta_1\left(\frac{x}{t}\right) \quad \left(z = \frac{t}{x}\right)$$

Здесь использовано соотношение

$$t\delta_1(x) = \delta_1\left(\frac{x}{t}\right)$$

из теории обобщенных функций.

Условие (2.3) можно записать таким образом:

$$(2.4) \quad \operatorname{Im} z = 0, \quad \operatorname{Re} F\left(\frac{1}{z}\right) = -I\delta_1(z)$$

Решение задачи Дирихле (2.4) имеет вид [24, 25]

$$(2.5) \quad F\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{Pi}{\pi z}, \quad F(z) = -\frac{Pi}{\pi} z$$

По формуле (1.38) находим

$$(2.6) \quad W'(z) = \frac{iIc_2^{-2} \sqrt{c_1^{-2} - z^2}}{\pi \mu S(z)}$$

Задача 2.2. Пусть постоянная сосредоточенная сила P при $t \geq 0$ приложена перпендикулярно к границе полуплоскости и движется с постоянной скоростью V вдоль оси x , при $t < 0$ полуплоскость покоилась. Граничные условия этой задачи будут следующими:

$$(2.7) \quad \sigma_y = -P\delta_1(x - Vt)\delta_0(t), \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0$$

где $\delta_0(t)$ — функция Хевисайда. По определению, $\delta_0'(t) = \delta_1(t)$.

В этом случае смещения, очевидно, будут однородными функциями.

Согласно формулам (1.39) и (1.29), в которых $L = 1$, граничные условия (2.7) можно записать следующим образом:

$$(2.8) \quad \text{Im } z = 0, \quad \text{Re } F(z) = -P\delta_1(x - Vt)t\delta_0(t) \\ (z = t/x, \quad t > 0)$$

Так как при $t > 0$

$$\delta_0(t) = 1, \quad t\delta_1(x - Vt) = \delta_1(x/t - V)$$

то граничное условие (2.8) запишется так:

$$(2.9) \quad \text{Im } z = 0, \quad \text{Re } F\left(\frac{1}{z}\right) = -P\delta_1(z - V)$$

Решение задачи Дирихле (2.9) имеет следующий вид:

$$F\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{Pi}{\pi(z - V)}$$

т. е.

$$(2.10) \quad F(z) = -\frac{iPV^{-1}z}{\pi(V^{-1} - z)}$$

По формуле (1.38) имеем

$$(2.11) \quad W'(z) = \frac{Pic_2^{-2}V^{-1} \sqrt{c_1^{-2} - z^2}}{\pi \mu S(z)(V^{-1} - z)}$$

Смещения и напряжения находятся отсюда по формулам (1.29), (1.32) — (1.34) при $L = 1$. При $V = 0$ из (2.11) получается соответствующее решение для неподвижной силы. Решению задачи 2.2 методом интегральных преобразований посвящена статья [19].

Задача 2.3 Пусть на границе полуплоскости $y > 0$ с постоянной скоростью V в обе стороны оси x распространяется постоянное давление p ; при $|x| > Vt$ граница свободна от нагрузок

$$(2.12) \quad \sigma_y = -p, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < Vt \\ \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| > Vt$$

В этой задаче напряжения, очевидно, будут однородными функциями. Согласно формулам (1.30) и (1.39), в которых нужно положить $L = 1$, граничные условия (2.12) примут вид

$$(2.13) \quad \operatorname{Im} z = 0, \quad \operatorname{Re} F(z) = -pVt [\delta_1(x - Vt) + \delta_1(x + Vt)] \\ (z = t/x, t > 0)$$

Так как при $t > 0$,

$$t\delta_1(x - Vt) = \delta_1\left(\frac{x}{t} - V\right), \quad t\delta_1(x + Vt) = \delta_1\left(\frac{x}{t} + V\right)$$

то граничные условия (2.13) можно записать так:

$$(2.14) \quad \operatorname{Im} z = 0, \quad \operatorname{Re} F\left(\frac{1}{z}\right) = -pV [\delta_1(z - V) + \delta_1(z + V)]$$

Решение задачи Дирихле (2.14) имеет следующий вид:

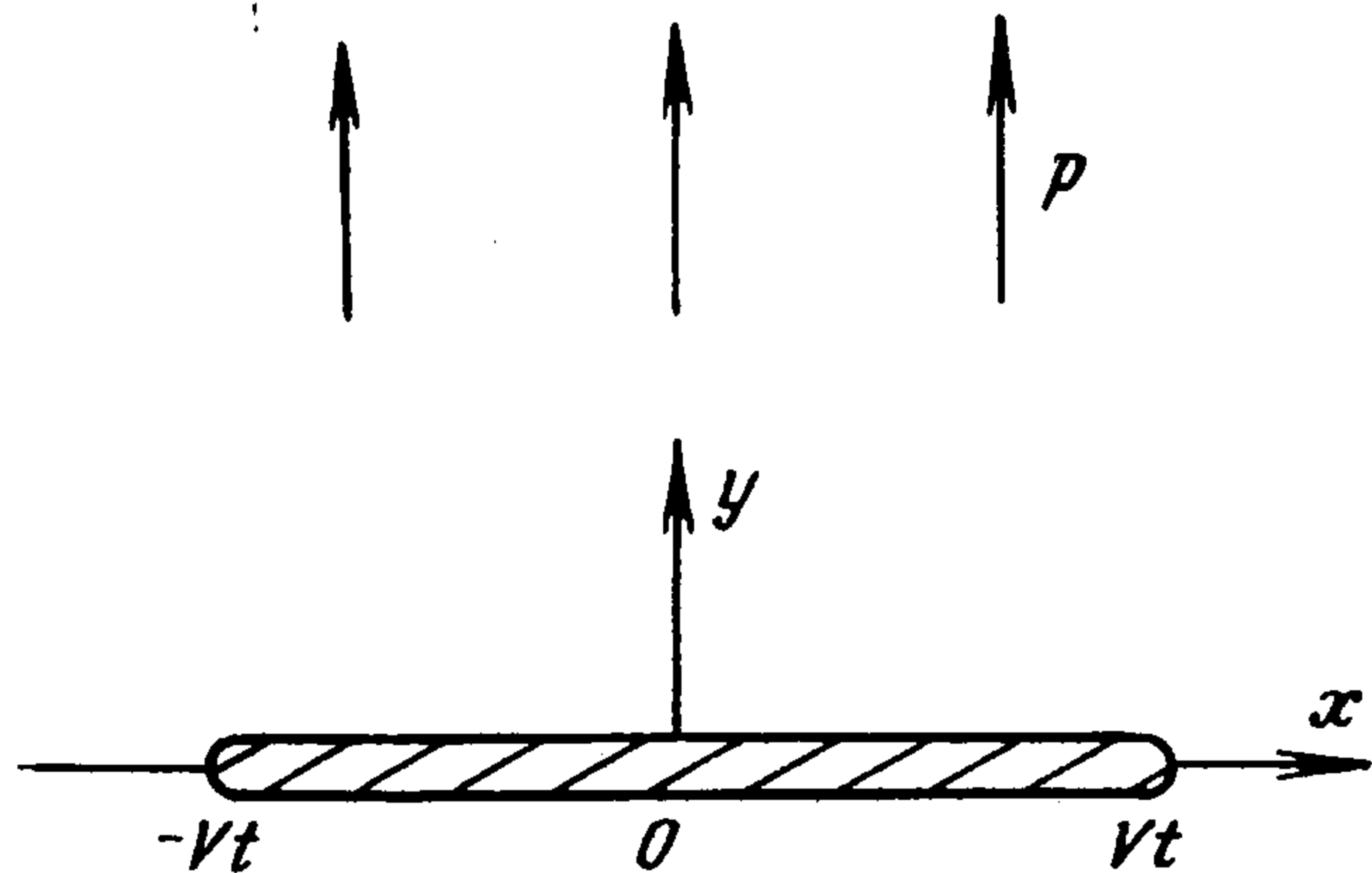
$$(2.15) \quad F\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{pVi}{\pi(z - V)} - \frac{pVi}{\pi(z + V)}$$

т. е.

$$F(z) = -\frac{2pV^{-1}iz}{\pi(V^{-2} - z^2)} \\ W'(z) = \frac{2pV^{-1}c_2^{-2}i \sqrt{c_1^{-2} - z^2}}{\pi\mu(V^{-2} - z^2)S(z)}$$

Смещения и напряжения находятся отсюда по формулам (1.30), (1.32) — (1.34) при $L = 1$.

3. Задачи со щелями. Рассмотрим некоторые задачи о движении трещин с постоянными скоростями; эти задачи представляют интерес для механики разрушения.



Фиг. 1

Задача 3.1. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в начале координат появляется разрез и начинает распространяться с постоянной скоростью V в обе стороны оси x ; берега разреза подвержены постоянной нормальной нагрузке p (фиг. 1). Примем $V < c_R$, где c_R — скорость поверхностных волн Рейли.

Граничные условия задачи для полуплоскости $y > 0$ имеют вид

$$(3.1) \quad \sigma_y = -p, \quad \tau_{xy} = 0 \\ \text{при } y = 0, \quad |x| < Vt$$

$$v = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| > Vt$$

При этом в невозмущенной области

$$(3.2) \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 \geq c_1^2 t^2$$

В этой задаче напряжения, очевидно, будут однородными функциями. Согласно формуле (1.30) при $L = 1$, а также (1.35) и (1.36), граничные

условия (3.1) приводят к следующей краевой задаче:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \operatorname{Im} z = 0, \quad |\operatorname{Re} z| < V^{-1}, \quad \operatorname{Re} W(z) = 0 \\ \operatorname{Im} z = 0, \quad |\operatorname{Re} z| > V^{-1}, \quad \operatorname{Im} W'(z) = 0 \end{aligned}$$

Для решения этой задачи необходимо знать поведение аналитической функции $W(z)$ при $|z| \rightarrow V^{-1}$ и при $z \rightarrow \infty$. Бесконечно-удаленной точке плоскости z соответствует начало координат физической плоскости, где смещение u равно нулю, а смещение v ограничено. Принимая во внимание представления (1.30), (1.33) и (1.34), отсюда имеем

$$(3.4) \quad z \rightarrow \infty, \quad \operatorname{Re} W(z) = O(1), \quad \operatorname{Im} W(z) = 0$$

Интегрируя второе условие (3.3) с учетом (3.4), его можно записать так:

$$(3.5) \quad \operatorname{Im} z = 0, \quad |\operatorname{Re} z| > V^{-1}, \quad \operatorname{Im} W(z) = 0$$

Смещение v вблизи конца щели $x = Vt$ обращается в нуль прямо пропорционально [17] множителю $(Vt - x)^{1/2}$; следовательно, согласно формулам (1.30), (1.32) и (1.34), функция $W(z)$ ведет себя так:

$$(3.6) \quad W(z) = O[(z \pm V^{-1})^{-1/2}] \quad \text{при } z \rightarrow \mp V^{-1}$$

Решение краевой задачи (3.3) — (3.6) имеет вид [24,25]

$$(3.7) \quad W(z) = \frac{Az + B}{\sqrt{z^2 - V^{-2}}}$$

$$(\sqrt{z^2 - V^{-2}} = z + O(z^{-1}), \quad z \rightarrow \infty)$$

где A и B — некоторые постоянные (постоянная A — вещественна). Согласно условию симметрии, смещение v на щели четная функция x , поэтому, отсюда, согласно формулам (1.35) и (3.7), находим $B = 0$. Следовательно

$$(3.8) \quad W(z) = \frac{Az}{\sqrt{z^2 - V^{-2}}}, \quad W'(z) = -\frac{AV^{-2}}{(z^2 - V^{-2})^{3/2}}$$

При помощи формул (1.35) и (1.36) отсюда находим смещение на щели и напряжение σ_y на продолжении щели

$$(3.9) \quad v = AV^{-1} \sqrt{(Vt)^2 - x^2} \quad \text{при } y = 0, \quad |x| \leq Vt$$

$$(3.10) \quad \sigma_y = A\mu \left(\frac{c_2}{V}\right)^2 \operatorname{Re} \int_{c_1^{-1}}^{t/x} \frac{S(\tau) d\tau}{\sqrt{c_1^{-2} - \tau^2} (\tau^2 - V^{-2})^{3/2}} \quad \text{при } y = 0, \quad Vt < x < c_1 t.$$

Постоянную A определим из условия (3.1), которое с учетом (3.10) принимает вид

$$(3.11) \quad A\mu \left(\frac{c_2}{V}\right)^2 \operatorname{Re} \int_{c_1^{-1}}^M \frac{S(\tau) d\tau}{\sqrt{c_1^{-2} - \tau^2} (\tau^2 - V^{-2})^{3/2}} = -p \quad (V^{-1} < M \leq \infty)$$

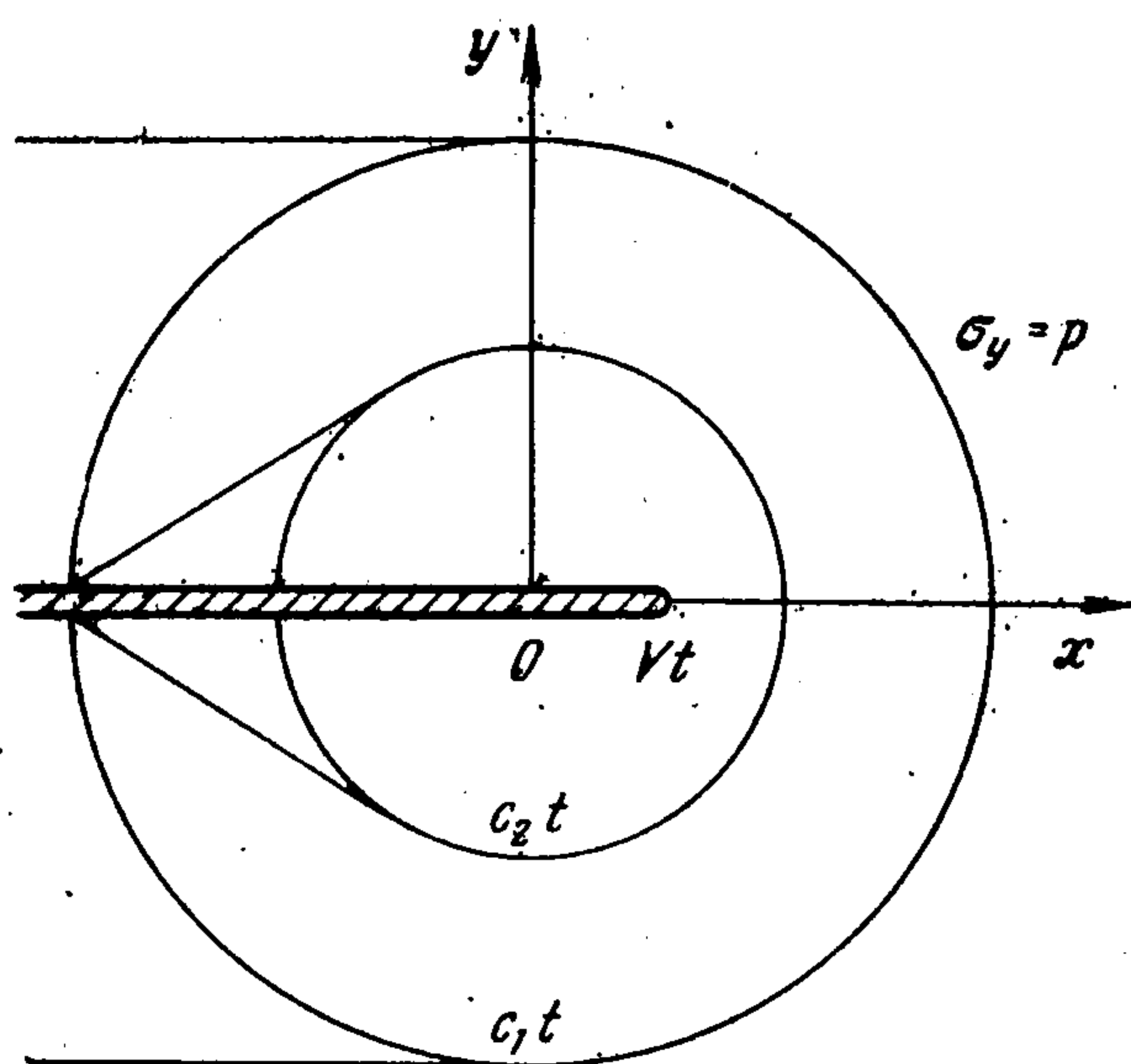
Вычисление интеграла в (3.11), существующего в смысле главного значения, приводит к следующему выражению:

$$(3.12) \quad A = \frac{pV^2}{\mu c_2^2 J}, \quad J = \frac{1}{V^{-1}(V^{-2} - c_1^{-2})} \{ [c_2^{-4} + 4c_1^{-2}(V^{-2} - c_1^{-2})] K(\omega_1) - \\ - [c_2^{-4} - 4V^{-2}(c_1^{-2} + c_2^{-2}) + 8V^{-4}] E(\omega_1) - \\ - 4c_2^{-2}(V^{-2} - c_1^{-2}) K(\omega_2) + 8V^{-2}(V^{-2} - c_1^{-2}) E(\omega_2) \}, \\ \omega_k = \sqrt{1 - \frac{c_k^{-2}}{V^{-2}}} \quad (k = 1, 2)$$

Здесь K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Вычисление всех величин, представляющих физический интерес, имеется в работе Броберга [6], решение которого гораздо более сложно.

Если на полученное решение наложить однородное растяжение $\sigma_y = p$, то, очевидно, получится решение задачи о распространении разреза со свободными берегами.

Предположим теперь, что нагрузка на разрезе в задаче Броберга возрастает прямо пропорционально времени, т. е. вместо (3.1) имеется



Фиг. 2

граничное условие $\sigma_y = -pt$, где $p = \text{const}$. Решение этой задачи получается, очевидно, из решения задачи Броберга, если в последнем смещения и напряжения заменить соответственно на скорости и производные по времени от напряжений.

Задача 3.2. Найдём решение задачи Бейкера [5]: полубесконечный разрез $x < 0, y = 0$ появляется внезапно в момент времени $t = 0$ и начинает распространяться вдоль оси x с постоянной скоростью V (фиг. 2).

Граничные условия имеют вид

$$(3.13) \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad x < Vt \\ v = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad x > Vt$$

При помощи (1.35) — (1.39) условия (3.13) приводят к следующей краевой задаче Гильберта:

$$(3.14) \quad \text{Im } z = 0, \quad \text{Re } z < c_1^{-1}, \quad \text{Re } z > V^{-1}, \quad \text{Re } F(z) = 0 \\ \text{Im } z = 0, \quad c_2^{-1} \leq \text{Re } z \leq V^{-1}, \quad \text{Im } F(z) = 0 \\ \text{Im } z = 0, \quad c_1^{-1} < \text{Re } z \leq c_2^{-1}, \quad \text{Im } \frac{F(z)}{S(z)} = 0$$

Решение этой задачи, симметричное относительно действительной оси, при асимптотическом условии (3.6) имеет вид [24,25]

$$(3.15) \quad F(z) = \frac{\text{Ai}(z - c_R^{-1})}{\sqrt{z - c_1^{-1}}(z - V^{-1})^{3/2}} \exp \Gamma(z)$$

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}} \text{arctg} \frac{4\tau^2 \sqrt{(\tau^2 - c_2^{-2})(c_2^{-2} - \tau^2)}}{(c_2^{-2} - 2\tau^2)^2} \frac{d\tau}{\tau - z}$$

Здесь радикал $\sqrt{z - V^{-1}}$ однозначен в плоскости z с разрезом $(-\infty, V^{-1})$ вдоль вещественной оси, $\sqrt{z - V^{-1}} > 0$ при $\text{Im } z = 0, \text{Re } z > V^{-1}$, A — вещественная постоянная, определяемая из условия при $x^2 + y^2 \gg \gg c_1^2 t^2$ (фиг. 2) и равная

$$(3.16) \quad A = \frac{P}{J}, \quad J = \text{Re} \int_M^{c_1^{-1}} \frac{(\tau - c_R^{-1}) \exp \Gamma^-(\tau)}{\tau \sqrt{\tau - c_1^{-1}}(V^{-1} - \tau)^{3/2}} d\tau \quad (V^{-1} < M \leq \infty)$$

где $\Gamma^-(z)$ — предельное значение функции $\Gamma(z)$ снизу. Исследование решения можно найти в работе Бейкера [5], в которой для отыскания решения была применена громоздкая техника Винера — Хопфа.

Задача 3.3. Пусть под действием мгновенных сосредоточенных в начале координат импульсов величины I , направленных вдоль оси y и в противоположном направлении симметрично относительно оси x , начинает распространяться разрез $-Vt \leq x \leq Vt, y = 0$. Берега разреза свободны от нагрузок, начальные условия — нулевые. Граничные условия для полуплоскости $y > 0$ имеют вид

$$(3.17) \quad \sigma_y = -I\delta_1(x) \delta_1(t), \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, |x| < Vt$$

$$v = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, |x| > Vt \quad (V < c_R)$$

В этом случае потенциалы смещения ϕ и ψ будут однородными функциями. Согласно (1.35) и (1.36) приходим к следующей задаче:

$$(3.18) \quad \text{Im } z = 0, \quad |\text{Re } z| < V^{-1}, \quad \text{Re } W'(z) = 0$$

$$\text{Im } z = 0, \quad |\text{Re } z| > V^{-1}, \quad \text{Im} \left[\frac{zS(z)}{\sqrt{z^2 - c_1^{-2}}} W'(z) \right] = \frac{Ic_2^{-2}}{\mu} \delta_1\left(\frac{x}{t}\right)$$

$(z = t/x)$

Задача (3.18) может быть записана в виде

$$(3.19) \quad \text{Im } z = 0, \quad |\text{Re } z| < V, \quad \text{Im} \frac{1}{z^2} W'\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{Ic_2^{-2}}{2\mu(c_2^{-2} - c_1^{-2})} \delta_1(z)$$

$$\text{Im } z = 0, \quad |\text{Re } z| > V, \quad \text{Re} \frac{1}{z^2} W'\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

так как $S(z) = -2z^2(c_2^{-2} - c_1^{-2}) + O(1)$ при $z \rightarrow \infty$.

На основании формул (1.31) и (1.36) при $z \rightarrow V^{-1}$ функция $W(z)$ имеет порядок $O(\sqrt{z - V^{-1}})$, так как напряжения σ_y в конце трещины имеет особенности вида $r^{-1/2}$.

Решение задачи Келдыша — Седова (3.19) при указанном асимптотическом условии имеет вид

$$(3.20) \quad \frac{1}{z^2} W' \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{I c_2^{-2} \sqrt{z^{-2} - V^{-2}}}{2\pi\mu (c_2^{-2} - c_1^{-2})}$$

Отсюда

$$(3.21) \quad W'(z) = \frac{I c_2^{-2}}{2\pi\mu (c_2^{-2} - c_1^{-2})} \frac{\sqrt{z^2 - V^{-2}}}{z^2}$$

Смещения и напряжения определяются при помощи представлений (1.31) — (1.36). Например, смещения берегов разреза равны

$$(3.22) \quad v = \frac{I c_2^{-2} V^{-1}}{2\pi\mu (c_2^{-2} - c_1^{-2})} \frac{\sqrt{(Vt)^2 - x^2}}{t} \quad (y = 0, |x| < Vt)$$

Для механики разрушения основной интерес представляет поле напряжения вблизи конца разреза, описываемое коэффициентом интенсивности напряжений K_I

$$(3.23) \quad K_I = \lim_{x \rightarrow Vt} [\sigma_y \sqrt{2\pi(x - Vt)}]$$

В рассматриваемом случае этот коэффициент равен

$$(3.24) \quad K_I = - \frac{IS(V^{-1})}{2\pi^{1/2} V^{-1/2} (V^{-2} - c_1^{-2})^{1/2} (c_2^{-2} - c_1^{-2}) t^{3/2}}$$

Задача 3.4. Приведем решение задачи, аналогичной предыдущей, считая, что разрез распространяется под действием возрастающей во времени силы pt , сосредоточенной в начале координат.

Граничные условия будут следующими:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \sigma_y = -pt\delta_1(x), \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, |x| < Vt \\ v = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, |x| > Vt \quad (V < c_R) \end{aligned}$$

В этом случае, очевидно, напряжения — однородные функции.

Решение граничной задачи (3.25) находим аналогично предыдущему. Оно имеет вид

$$(3.26) \quad W'(z) = \frac{pc_2^{-2}}{2\pi\mu (c_2^{-2} - c_1^{-2})} \frac{z^2}{(z^2 - V^{-2})^{3/2}}$$

При этом, согласно (1.30), (1.32) и (3.26), получено смещение берегов разреза (при $y = 0, |x| < Vt$) и коэффициент интенсивности напряжений

$$(3.27) \quad v = \frac{pc_2^{-2}t}{2\pi\mu (c_2^{-2} - c_1^{-2})} \left[\ln \left| \frac{Vt + \sqrt{(Vt)^2 - x^2}}{x} \right| - 2 \frac{\sqrt{(Vt)^2 - x^2}}{Vt} \right]$$

$$(3.28) \quad K_I = - \frac{pS(V^{-1})t^{1/2}}{2\pi^{1/2} (V^{-2} - c_1^{-2})^{1/2} (c_2^{-2} - c_1^{-2})}$$

При помощи развитого метода нетрудно построить также решения для движущейся щели с движущимися импульсами или сосредоточенными силами. Используя эти решения в качестве функций Грина, можно построить аналитическое решение задачи в случае произвольно нагруженной щели. Анализ получающегося решения не входит в цели данной статьи.

4. Контактные задачи. Задача 4.1. Пусть клиновидный штамп с углом раствора 2α с постоянной скоростью v_0 вдавливаются в полуплоскость (фиг. 3). Клинь считается тупым и симметричным относительно оси y . В начальный момент времени $t = 0$ вершина клина совпадала с началом координат. Трение между клином и упругой полуплоскостью отсутствует. Начальные условия нулевые.

Граничные условия задачи таковы:

$$(4.1) \quad v = v_0 t - ctg \alpha |x|, \quad \tau_{xy} = 0$$

при $y = 0, |x| < Vt$

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, |x| > Vt$$

Ограничимся случаем $V < c_R$; величина V подлежит определению из решения.

В рассматриваемой задаче скорости являются однородными функциями, поэтому будем пользоваться представлениями (1.29), (1.32) — (1.39) при $L = \partial/\partial t$.

Граничные условия (4.1) приводят к следующей краевой задаче:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \text{Im } z = 0, \quad |\text{Re } z| < V^{-1}, \quad \text{Re } F(z) = 0 \\ \text{Im } z = 0, \quad |\text{Re } z| > V^{-1}, \quad \text{Im } F(z) = 0 \end{aligned}$$

Ищется то решение краевой задачи (4.2), которое удовлетворяет следующим физическим условиям: 1) напряжение ограничено вблизи площадки контакта $x = \pm Vt$, 2) в угловой точке $x = 0$ напряжения имеют интегрируемую особенность, 3) напряжения $\sigma_y(x, 0, t)$ на контактной площадке представляет собой четную функцию x . Эти условия, как можно показать, позволяют построить единственное решение краевой задачи (4.2) в следующем виде (A — вещественная постоянная):

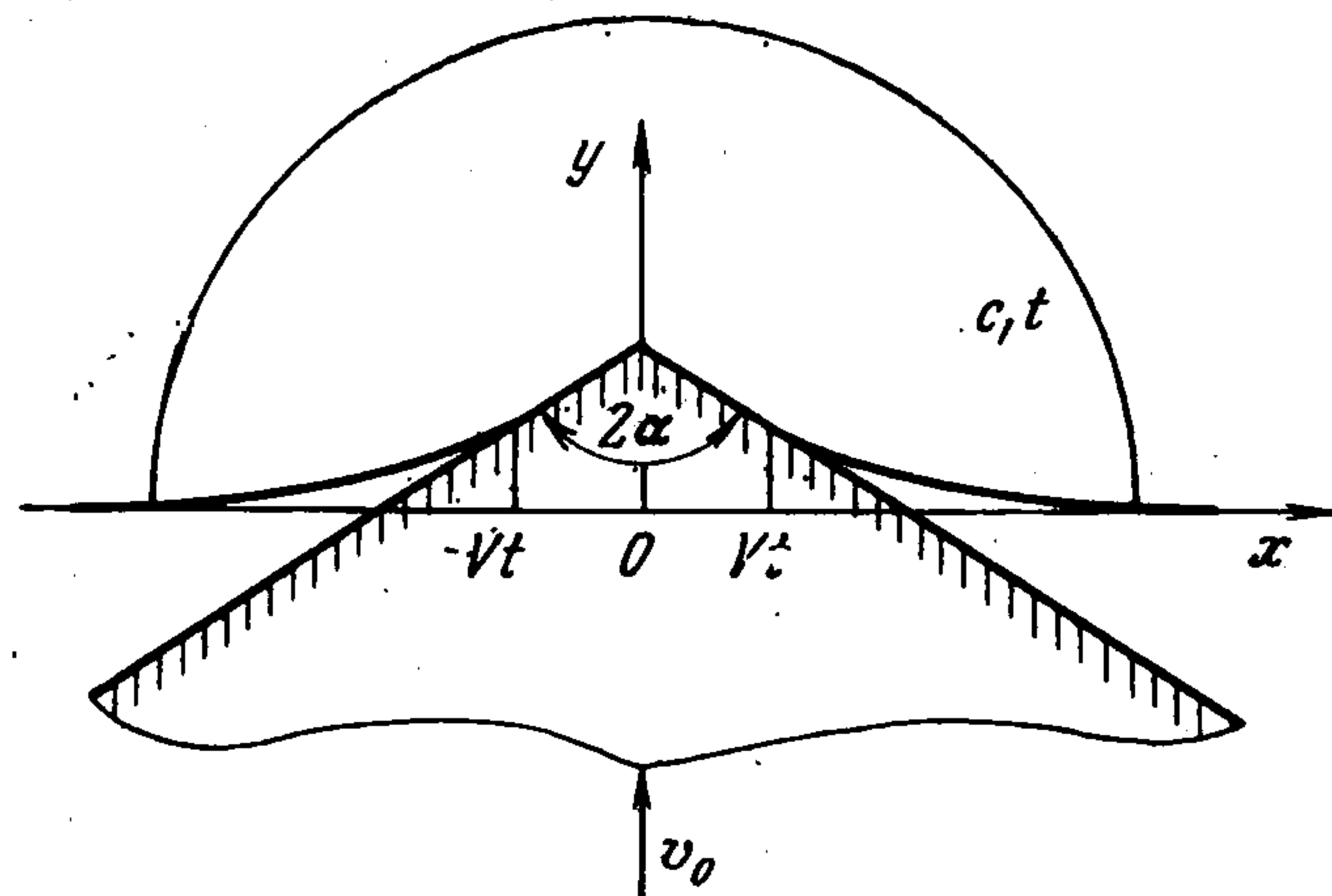
$$(4.3) \quad F(z) = - \frac{Az}{\sqrt{z^2 - V^{-2}}}$$

Величины A и V найдем из следующих условий под штампом:

$$(4.4) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v_0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -ctg \alpha \quad \text{при } y = 0, 0 < x < Vt$$

Эти условия при помощи (1.29), (1.35) и (1.38) принимают вид

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \frac{Ac_2^{-2}}{\mu} \text{R} \int_{c_1^{-1}}^{V^{-1}} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{S(\tau)} = v_0 \\ \frac{Ac_2^{-2}}{\mu} \text{Re} \int_{i^{-1}}^{V^{-1}} \frac{\tau\varphi(\tau) d\tau}{S(\tau)} = ctg \alpha, \quad \varphi(\tau) = - \frac{\sqrt{\tau^2 - c_1^{-2}}}{\sqrt{V^{-2} - \tau^2}} \end{aligned}$$



Фиг. 3

Из (4.5) получим постоянную A и уравнение для V

$$(4.6) \quad A = \frac{\mu v_0}{c_2^{-2} J_1}, \quad \frac{J_1(V)}{J_2(V)} = v_0 \operatorname{tg} \alpha$$

$$J_1 = \operatorname{Re} \int_{c_2^{-1}}^{V^{-1}} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{S(\tau)} + \int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}} \frac{(c_2^{-2} - 2\tau^2)^2 \varphi(\tau) d\tau}{S(\tau) S_1(\tau)}$$

$$J_2 = \operatorname{Re} \int_{c_2^{-1}}^{V^{-1}} \frac{\tau \varphi(\tau) d\tau}{S(\tau)} + \int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}} \frac{\tau (c_2^{-2} - 2\tau^2)^2 \varphi(\tau) d\tau}{S(\tau) S_1(\tau)}$$

$$S_1(\tau) = (c_2^{-2} - 2\tau^2)^2 - 4\tau^2 \sqrt{c_1^{-2} - \tau^2} \sqrt{c_2^{-2} - \tau^2}$$

При помощи формул (4.3) и (1.39) при $L = \partial / \partial t$ получим распределение давления под штампом и величину суммарной силы

$$(4.7) \quad \sigma_y = -A \ln \left| \frac{Vt + \sqrt{(Vt)^2 - x^2}}{x} \right| \quad \text{при } y = 0, \quad |x| \leq Vt$$

$$(4.8) \quad P = - \int_{-Vt}^{Vt} \sigma_y(x, 0, t) dx = \pi AVt$$

Эта задача гораздо более сложным путем рассматривалась Б. В. Костровым [18]. Однако автор принял значение скорости V равным $V =$

$= v_0 \operatorname{tg} \alpha$, в то время как величина V должна находиться из решения задачи согласно уравнению (4.6).

Задача 4.2. Рассмотрим равноускоренное вдавливание в полуплоскость симметричного относительно оси y параболического штампа (фиг. 4). Начальные условия считаются нулевыми.

Граничные условия задачи

$$(4.9) \quad v = \frac{1}{2}gt^2 - bx^2, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < Vt$$

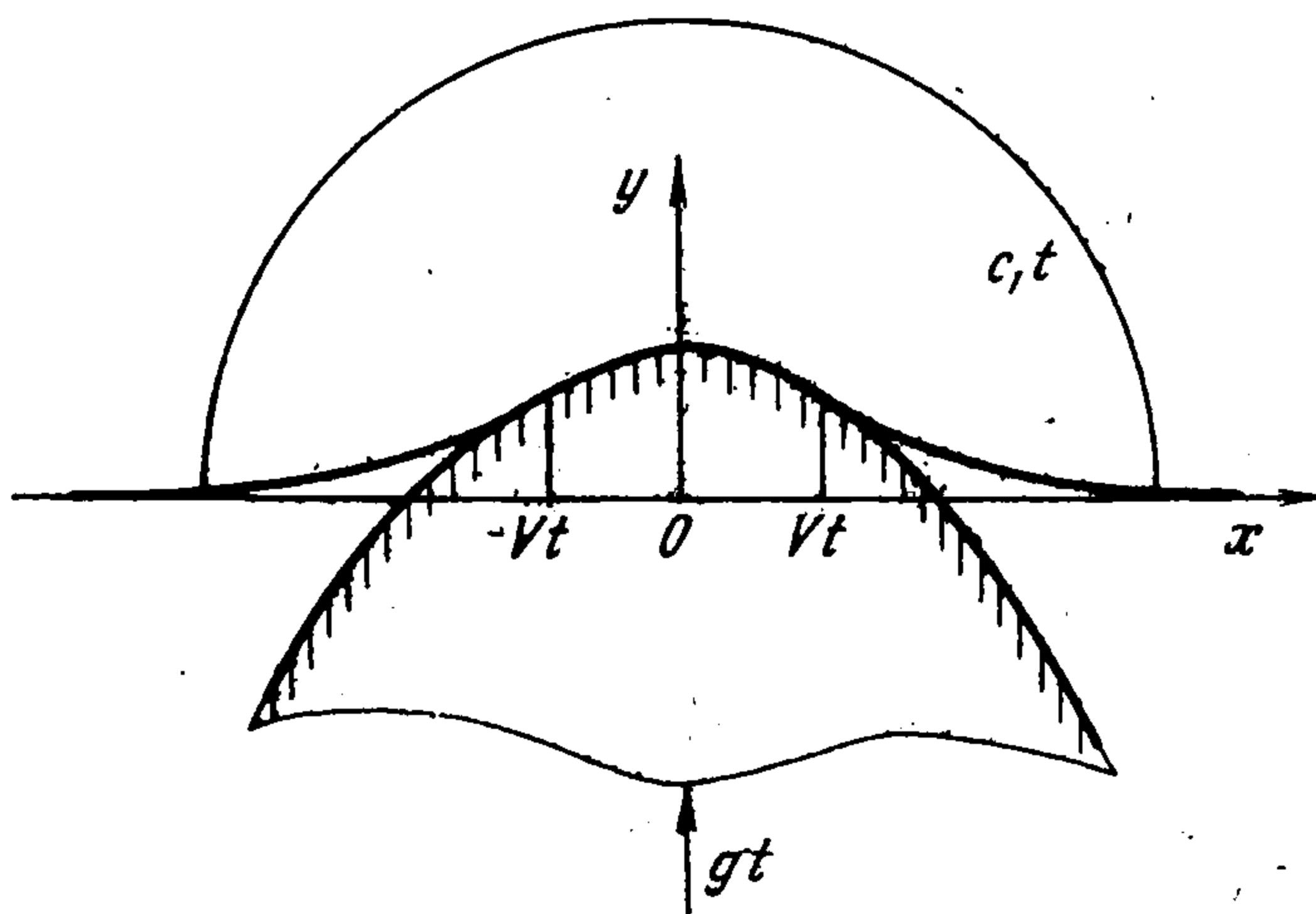
$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad |x| > Vt$$

где b и g — заданные постоянные. Величина V должна быть определена в процессе решения.

В этой задаче ускорения будут однородными функциями, так что следует применять представления (1.29), (1.32) — (1.39) при $L = \partial^2 / \partial t^2$.

Граничные условия (4.9) приводят к краевой задаче (4.2) для функции $F(z)$. Ищем решение этой задачи, удовлетворяющее следующим физическим условиям: 1) напряжения ограничены вблизи концов площадки контакта $x = \pm Vt$ и в начале координат при $x = 0$; 2) напряжение $\sigma_y(x, 0, t)$ на контактной площадке представляет собой четную функцию x . Эти дополнительные условия позволяют построить единственное решение краевой задачи (4.2) в следующем виде:

$$(4.10) \quad F(z) = \frac{2AV^{-1}z}{(z^2 - V^{-2})^{3/2}}$$



Фиг. 4

Здесь A — вещественная постоянная. Величины A и V найдем из условий под штампом, вытекающих из (4.9)

$$(4.11) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = g, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2b \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < Vt$$

Эти условия при помощи формул (4.10), (1.29), (1.35) и (1.38) можно привести к следующим соотношениям:

$$(4.12) \quad A = \frac{\mu g}{c_2^{-2} J_1}, \quad \frac{J_1(V)}{J_2(V)} = \frac{g}{2b}$$

$$J_1 = -\operatorname{Re} \int_{c_1^{-1}}^M \frac{V \tau^2 - c_1^{-2} d\tau}{S(\tau)(V^{-2} - \tau^2)^{3/2}}, \quad J_2 = \operatorname{Re} \int_{c_1^{-1}}^M \frac{\tau^2 V \tau^2 - c_1^{-2} d\tau}{S(\tau)(V^{-2} - \tau^2)^{3/2}}$$

$(V^{-1} < M \leq \infty)$

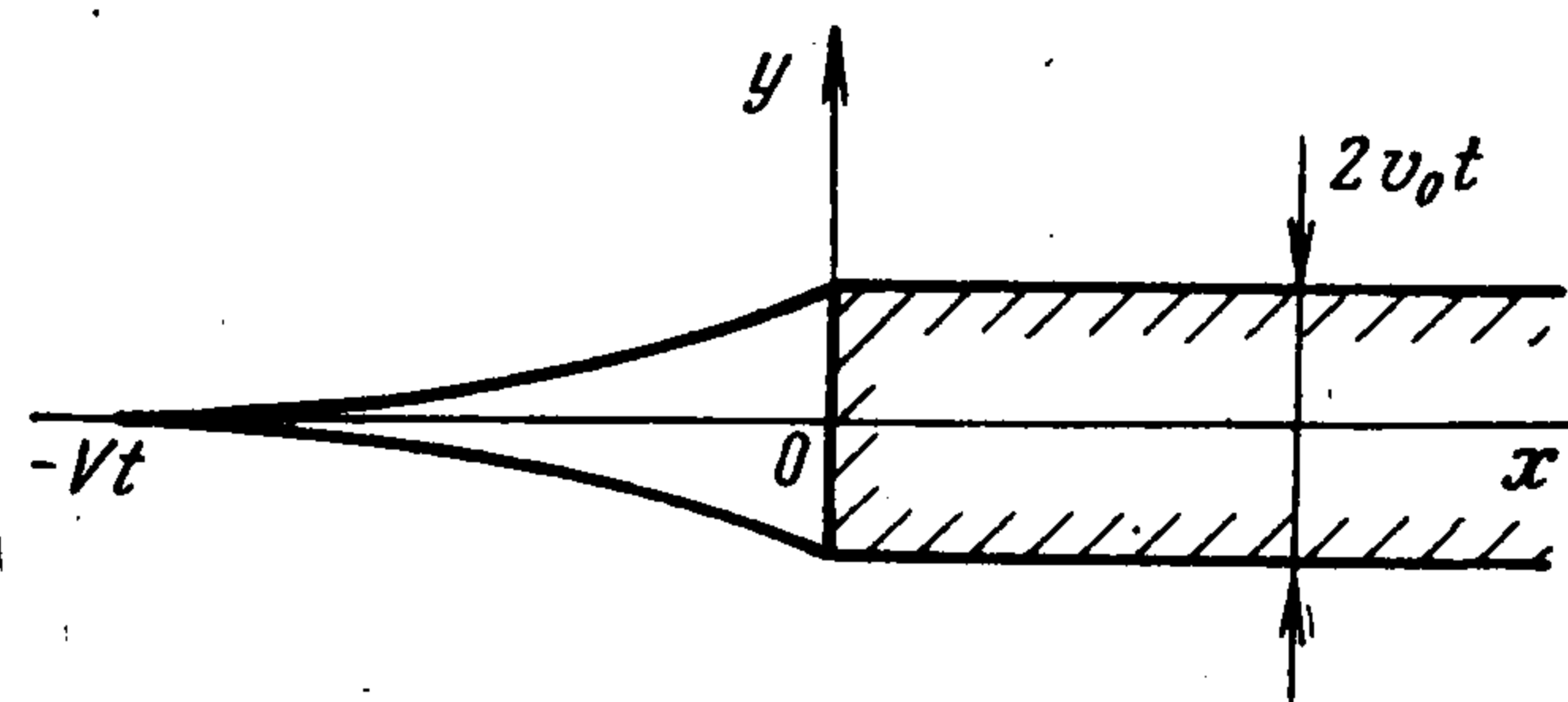
которые служат для определения A и V (второе является уравнением относительно V). Из (4.10) и (1.39) найдем распределение напряжения под штампом и величину суммарной силы, действующей на штамп

$$(4.13) \quad \sigma_y = -2A \sqrt{(Vt)^2 - x^2} \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < Vt$$

$$(4.14) \quad P = - \int_{-Vt}^{Vt} \sigma_y(x, 0, t) dx = \pi A V^2 t^2$$

Заметим, что на основании (4.7) и (4.13) распределение давления под штампом в рассмотренных динамических задачах совпадает со статическим, если ширину контактной площадки брать равной $2Vt$.

Задача 4.3. Рассмотрим динамическую задачу о расклинивании хрупкого тела. Пусть в упругой плоскости в начальный момент времени $t = 0$ начинает расширяться с постоянной скоростью v_0 в обе стороны перпендикулярно к оси x полубесконечный клин (фиг. 5). Одновременно из конца клина на его продолжении начинает распространяться с постоянной скоростью V прямолинейная трещина; берега щели свободны от напряжений. Начальная толщина клина считается равной нулю; остальные начальные условия — также нулевые. Очевидно, задача симметрична относительно оси x . Поэтому достаточно найти решение в полуплоскости $y > 0$.



Фиг. 5

Граничные условия задачи имеют вид

$$(4.15) \quad \begin{aligned} v &= v_0 t, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad x > 0 \\ \sigma_y &= 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad -Vt < x < 0 \\ v &= 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad x < -Vt \end{aligned}$$

В этой задаче скорости будут однородными функциями, поэтому будем пользоваться формулами (1.29) и (1.32) — (1.36) при $L = \partial / \partial t$.

Первое граничное условие в (4.15) можно представить в виде

$$(4.16) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = v_0 \delta_1(t) \quad \text{при } y = 0, x > 0$$

Граничные условия (4.15) с учетом (4.16) приводят к краевой задаче Келдыша — Седова

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \operatorname{Im} z = 0, & \quad -\infty < \operatorname{Re} z < -V^{-1}, & \operatorname{Im} W'(z) = 0 \\ \operatorname{Im} z = 0, & \quad -V^{-1} < \operatorname{Re} z < \infty, & \operatorname{Re} W'(z) = v_0 \delta_1(z) \end{aligned}$$

Ищем решение этой задачи, которое удовлетворяет следующему условию: напряжения имеют интегрируемую особенность в конце трещины при $x = -Vt$ и в конце клина при $x = 0$. Можно показать, что это дополнительное условие позволяет построить единственное решение краевой задачи (4.17); это решение имеет вид [24, 25]

$$(4.18) \quad W'(z) = \frac{iv_0 V^{-3/2}}{\pi} \frac{Az - 1}{z(z + V^{-1})^{3/2}}$$

где A — вещественная постоянная; радикал $\sqrt{z + V^{-1}} > 0$ на нижнем берегу разреза $(-V^{-1}, +\infty)$ вещественной оси. Эту постоянную определим из условия

$$\sigma_y = 0 \quad \text{при } y = 0, -Vt < x < 0$$

которое принимает вид

$$(4.19) \quad \operatorname{Re} \int_{-c_1^{-1}}^M \frac{i(A\tau - 1) S(\tau) d\tau}{\tau \sqrt{c_1^{-2} - \tau^2} (\tau + V^{-1})^{3/2}} = 0 \quad (-\infty \leq M < -V^{-1})$$

Из (4.19) получим

$$(4.20) \quad \begin{aligned} A &= \frac{J_1}{J_2}, \quad J_1 = \int_{-c_1^{-1}}^{-c_2^{-1}} \frac{\varphi_2(\tau) d\tau}{\tau} + \int_{-c_2^{-1}}^{-V^{-1}} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau} \right] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau + V^{-1}}} - \varphi_0 \\ J_2 &= \int_{-c_1^{-1}}^{-c_2^{-1}} \varphi_2(\tau) d\tau + \int_{-c_2^{-1}}^{-V^{-1}} \frac{d}{d\tau} [\varphi_1(\tau)] \frac{d\tau}{\sqrt{\tau + V^{-1}}} + c_2^{-1} \varphi_0 \\ \varphi_0 &= \frac{2c_2^{-3}}{\sqrt{(c_2^{-2} - c_1^{-2})(V^{-1} - c_2^{-1})}}, \quad \varphi_1(\tau) = \frac{2S(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - c_1^{-2}}} \\ \varphi_2(\tau) &= \frac{(c_2^{-2} - 2\tau^2)^2}{\sqrt{\tau^2 - c_1^{-2}} (\tau + V^{-1})^{3/2}} \end{aligned}$$

По формулам (1.30), (1.35), (1.36) с учетом (4.18) при $L = \partial / \partial t$ и (3.23) находим смещение верхнего берега щели и коэффициент интенсивности напряжений в конце динамической трещины

$$(4.21) \quad v = \frac{2v_0}{\pi} \left[\left(1 + \frac{A}{V} \right) \sqrt{\frac{|x|(Vt+x)}{V}} + t \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{Vt+x}{|x|}} \right]$$

$(y = 0, -Vt \leq x \leq 0)$

$$(4.22) \quad K_I = - \frac{2\sqrt{2} \mu v_0 (1 - AV^{-1}) S(V^{-1}) t^{1/2}}{\pi^{1/2} c_2^{-2} V^{-1/2} (V^{-2} - c_1^{-2})^{1/2}}$$

Усилиями, в основном, Г. В. Колосова, Н. И. Мусхелишвили, Вестергарда, Л. А. Галина и Радока был открыт класс статических и стационарно-динамических задач упругости, эффективное решение которых находилось при помощи методов теории функции комплексного переменного. Развитый в данной работе подход, основанный на функционально-инвариантных решениях Смирнова — Соболева, позволяет применить эти методы для эффективного решения аналогичного класса динамических задач теории упругости.

Приложение: функционально-инвариантные решения волнового уравнения. Рассмотрим волновое уравнение в плоском случае (a^{-1} — скорость распространения волн)

$$(П.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ищем решения волнового уравнения следующего вида [1, 35] :

$$(П.2) \quad u(x, y, t) = f(\tau)$$

где $f(\tau)$ — аналитическая функция τ , переменная τ определяется уравнением

$$(П.3) \quad l(\tau)t + m(\tau)x + n(\tau)y + p(\tau) = 0$$

Здесь $l(\tau)$, $m(\tau)$, $n(\tau)$, $p(\tau)$ — некоторые аналитические функции комплексного переменного τ . Уравнение [(П.3) определяет τ как функцию переменных x , y и t .

Вычисляя вторые производные по x , y и t от функции u при помощи (П.3) и подставляя их в уравнение (П.1), получим уравнение вида (штрих означает дифференцирование по τ)

$$(П.4) \quad \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[f'(\tau) \frac{m^2(\tau) + n^2(\tau) - a^2 l^2(\tau)}{\delta'} \right] = 0,$$

$$\delta' = l'(\tau)t + m'(\tau)x + n'(\tau)y + p'(\tau) = 0$$

Из (П.4) следует, что $f(\tau)$ — решение волнового уравнения (П.1), если коэффициенты вспомогательного уравнения (П.3) удовлетворяют соотношению

$$(П.5) \quad m^2(\tau) + n^2(\tau) - a^2 l^2(\tau) = 0$$

Очевидно, как вещественная, так и мнимая части функции $f(\tau)$ в отдельности тоже удовлетворяют волновому уравнению (П.1) [1].

Построенные решения $f(\tau)$ волнового уравнения были впервые найдены В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым в 1932 г. [1].

Рассмотрим частный случай функционально-инвариантных решений волнового уравнения, когда функция $p(\tau) = 0$.

Учитывая (П.5), положим

$$(П.6) \quad l(\tau) = 1, \quad m(\tau) = -z, \quad n(\tau) = -\sqrt{a^2 - z^2}$$

Тогда уравнение (П.3) примет вид

$$(П.7) \quad t - zx - \sqrt{a^2 - z^2} y = 0$$

или

$$(П.8) \quad 1 - z\xi - \sqrt{a^2 - z^2} \eta = 0 \quad (\xi = x/t, \eta = y/t)$$

Здесь ветвь радикала фиксирована условием (z — новая комплексная переменная)

$$\sqrt{a^2 - z^2} = iz + O(z^{-1})$$

Из (П.7) видим, что решения волнового уравнения $f(z)$ будут функциями аргументов ξ и η , т. е. однородными функциями x , y , t нулевого измерения.

Исследуем подробно уравнение (П.8). Радикал $\sqrt{a^2 - z^2}$ однозначен в плоскости комплексного переменного z с разрезом $(-a, +a)$ вдоль вещественной оси. Решая уравнение (П.8) относительно z , получим

$$(П.9) \quad z = \frac{\xi - i\eta \sqrt{1 - a^2(\xi^2 + \eta^2)}}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{xt - iy \sqrt{t^2 - a^2(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2}$$

Здесь радикалы имеют положительный знак при

$$(П.10) \quad i \sqrt{t^2 - a^2(x^2 + y^2)} > 0, \quad x^2 + y^2 > a^{-2}t^2, \quad y \rightarrow +0$$

При фиксированных ξ и η в силу (П.8) имеем прямую. Будем рассматривать ту часть прямой, на которой $t > 0$, и назовем полупрямую лучом. Согласно (П.10), эти лучи образуют конический пучок с вершиной в начале координат и с углом раствора $\operatorname{arctg} a^{-1}$ при вершине, причем ось пучка — ось t . Уравнение (П.8) или (П.9) приводит в соответствие лучам этого пучка комплексные значения плоскости z с разрезом $(-a, +a)$ вдоль вещественной оси. Отметим, что лучам, образующим поверхность пучка

$$(П.11) \quad \xi^2 + \eta^2 = a^{-2} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = a^{-2}t^2$$

соответствуют точки разреза плоскости z . Оси пучка $x = y = 0$ или $\xi = \eta = 0$ соответствует бесконечно далекая точка плоскости. Полуплоскости $y > 0$ ($y < 0$) соответствует полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ ($\operatorname{Im} z > 0$).

Исследуем значения z для точек (ξ, η) , которые лежат вне упомянутого пучка, т. е. для точек, в которых выполнено неравенство

$$(П.12) \quad \xi^2 + \eta^2 \geq a^{-2} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 \geq a^{-2}t^2$$

Уравнение (П.8) при условии (П.12) дает два вещественных корня, принадлежащих отрезку $(-a, +a)$

$$(П.13) \quad z_{1,2} = \frac{\xi \pm \eta \sqrt{a^2(\xi^2 + \eta^2) - 1}}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{xt \pm y \sqrt{a^2(x^2 + y^2) - t^2}}{x^2 + y^2}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, t_0)$ — некоторая точка вне конического пучка, при этом ее координаты удовлетворяют неравенству (П.12), а z_{10} и z_{20} — соответствующие значения z согласно (П.13). Подставляя значения $z = z_{10}$, $z = z_{20}$ в уравнение (П.8), имеем две плоскости в пространстве xyt , проходящие через точку M_0 . Отсюда всякому значению z , находящемуся на разрезе $(-a, +a)$, соответствует некоторая плоскость в пространстве xyt . Эта плоскость будет проходить через луч поверхности конического пучка, соответствующий значению $z = z_0$, и касаться поверхности. В противном случае плоскость пересекла бы эту поверхность и ее часть попала бы внутрь конического пучка. Тогда получилось бы, что точкам, лежащим внутри пучка, соответствует вещественное значение $z = z_0$. Согласно (П.9) и (П.10), этого быть не может.

Пусть $f(z)$ — аналитическая однозначная функция на плоскости с разрезом $(-a, +a)$ и соответствующее решение

$$(П.14) \quad u(x, y, t) = \operatorname{Re} f(z)$$

определено внутри конического пучка (П.10). Укажем способ непрерывного продолжения этого решения в пространстве вне конического пучка (П.12). Проведем семейство полуплоскостей P_+ , касательных к поверхности пучка (П.11) одного направления, взяв в (П.13), например, только верхний знак плюс. Эти касательные полуплоскости не будут пересекаться и заполнят часть пространства вне пучка. На одной из таких плоскостей $f(z)$ сохраняет постоянное значение и можно определить однозначным образом решение $u(x, y, t)$ вне пучка, пользуясь той же формулой (П.14), которая дает решение внутри конического пучка. Аналогичным способом можно продолжить решение вне конического пространства по полуплоскостям P_- другого направления. Можно функции u разбить на два слагаемых $u = u_1(z) + u_2(z)$ и продолжить одно из них по полукасательным P_+ , а другое по полукасательным P_- . Отсюда следует, что способов продолжения имеется бесчисленное множество.

Поступила 6 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые вопросы теории распространения колебаний. В кн.: Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.—М., ОНТИ, 1937, стр. 468—617.
2. *Фриджман М. М.* Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечной прямолинейной жестко закрепленной щели. Докл. АН СССР, 1948, т. 60, № 7.
3. *Филиппов А. Ф.* Некоторые задачи дифракции плоских упругих волн. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
4. *Maue A. W.* Die Entspannungswelle bei plötzlichem Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers. ZAMM, 1954, Bd 34, H. 1—2.
5. *Baker B. R.* Dynamic stresses created by a moving crack. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 3.
6. *Broberg K. B.* The Propagation of a brittle crack. Arkiv Fys., 1960, Bd 18, H2.
7. *Craggs J. W.* The growth of a disk-shaped crack. Internat. J. Engng. Sci., 1966, vol. 4, No 2.
8. *Костров Б. В.* Осесимметричная задача о распространении трещины нормального разрыва. ПММ, 1964, т. 28, вып. 4.
9. *Achenbach J. D., Nuismer R.* Fracture generated by a dilatational wave. Internat. J. Frac. Mech., 1971, vol. 7, No. 1.
10. *Jahanshani A.* A diffraction problem and crack propagation. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 1.
11. *Черепанов Г. П.* Некоторые задачи теории трещин в гидродинамической постановке. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
12. *Sih G. C.* Some elastodynamic problems of crack. Internat. J. Frac. Mech., 1968, vol. 4, No. 1.
13. *Atkinson C.* The propagation of a brittle crack in anisotropic material. Internat. J. Engng. Sci., 1965, vol. 3, No. 6.
14. *Atkinson C.* A simple model of relaxed expanding crack. Archiv phys., 1967, Bd. 35, H. 5.
15. *Burridge R., Willis J. R.* The self-similar problem of the expanding elliptical crack in an anisotropic solid. Proc. Cambridge. Philos. Soc. 1969, vol. 66, Pt. 2.
16. *Webb D., Atkinson C.* A note on a penny-shaped crack expanding under a non uniform internal pressure. Internat. J. Engng Sci., 1969, vol. 7, No. 6.
17. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1973.
18. *Костров Б. В.* Автомодельные динамические задачи о вдавливании жесткого штампа в упругое полупространство. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 4.
19. *Гольдштейн Р. В.* Волны Релея и резонансные явления в упругих телах. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
20. *Флитман Л. М.* Динамическая задача о штампе на упругой полуплоскости. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.
21. *Сагомоян А. Я., Поручиков А. Я.* Пространственные задачи неустановившегося движения сжимаемой жидкости. Изд-во МГУ, 1970.
22. *Freund L. B.* Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. J. Mech. Phys. Solids, 1972, vol. 20, No. 3, 4; vol. 21, No 2.
23. *Кулиев В. Д., Черепанов Г. П.* Решение одной динамической задачи теории упругости. Изв. АН АзербССР, 1972, № 4.
24. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи М., Физматгиз, 1963.
25. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
26. *Черепанов Г. П.* О влиянии импульсов на развитие начальных трещин. ПМТФ, 1963, № 1.
27. *Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П.* Автомодельная задача динамической теории упругости для щели с точечным источником. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 6.
28. *Афанасьев Е. Ф.* Некоторые однородные решения динамической теории упругости. В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа (к 80-летию академика Мухелишвили) М., «Наука», 1972.
29. *Афанасьев Е. Ф.* Класс автомодельных задач динамической теории упругости для щели. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 3.
30. *Афанасьев Е. Ф., Черепанов Г. П.* Автомодельная задача динамической теории упругости для полуплоскости. В кн.: Успехи и достижения механики деформируемых тел (к 100-летию академика Б. Г. Галеркина). М., «Наука», 1973.
31. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
32. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1953.
33. *Radok J. R. M.* On the solutions of problems of dynamic plane elasticity. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, No. 3.
34. *Westergaards H. M.* Bearing pressures and cracks. J. Appl. Mech., 1939, vol. 6, No. 2.
35. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 3, ч. II. Изд. 8. М., «Наука», 1969.