Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.3

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРАЛОВ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

А. Л. Гольденвейзер

(Москва)

Для статических уравнений линейной теории оболочек установлена известная классификация. В ней различаются интегралы, соответствующие безмоментным, чисто моментным напряженным состоянием, краевым эффектам, напряженным состоянием с большой изменяемостью и т. д. Эти понятия могут быть положены в основу всех известных приближенных методов статики оболочек [1].

В предлагаемой работе такая же классификация устанавливается для интегралов двумерных динамических уравнений линейной теории оболочек. Выводятся соответствующие ей варианты приближенных уравнений. Показывается, что в динамике целесообразна более разветвленная классификация, в которой надо учитывать изменяемость искомого напряженного состояния не только по геометрическим переменным, но и по времени.

1. Отнесем срединную поверхность оболочки к произвольной ортогональной системе координат с параметрами α_1, α_2. Обозначим через A_1, A_2 коэффициенты первой квадратичной формы, через R_{11}, R_{12}, R_{22}, u_1, u_2 — радиусы кривизны поверхности и перемещения в координатных направлениях, а через m — массу единицы площади срединной поверхности. Все остальные обозначения заимствуем из монографии [1]. Из нее будут браться и общие уравнения теории оболочек (с добавлением инерционных членов и с вышеуказанным частичным изменением обозначений).

Введем малый параметр η, определив его равенством

$$(1.1)\quad \eta = h / r$$

в котором h — полутолщина оболочки, r — характерный радиус кривизны срединной поверхности, и выполним замены независимых переменных и искомых величин по формулам

$$(1.2)\qquad \alpha_i = \eta^a \xi_i, \qquad t = \sqrt{\frac{m(1-\sigma^2)}{2Eh}}\,\eta^b \tau$$

$$\begin{array}{lll}
u_i^\bullet = \eta^{-c} u_i, & w^\bullet = w & \\
\varepsilon_i^\bullet = \eta^{a-c} \varepsilon_i, & \omega^\bullet = \eta^{a-c} \omega, & \delta^\bullet = \eta^{a-c} \delta \\
\omega_i^\bullet = \eta^{a-c} \omega_i, & \gamma_i^\bullet = \eta^a \gamma_i & \\
T_i^\bullet = \eta^{a-c} T_i, & S^\bullet = \eta^{a-c} S & \\
\varkappa_i^\bullet = \eta^{2a} \varkappa_i, & \tau^\bullet = \eta^{2a} \tau & \\
G_i^\bullet = \eta^{2a-2} G_i, & H^\bullet = \eta^{2a-2} H, & N_i^\bullet = \eta^{3a-2} N_i
\end{array}$$

Входящие сюда числа a, b, c будут назначаться впоследствии, но всегда предполагается, что

$$(1.3)\qquad 0 \leqslant a < 1, \quad b < 1$$

Внеся (1.2) в динамические уравнения теории оболочек, получим после сокращений и преобразований, основанных на использовании (1.1): уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_i^\bullet}{\partial \xi_i}+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S^\bullet}{\partial \xi_j}+\eta^a\frac{p}{A_iA_j}\left[\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(T_i^\bullet-T_j^\bullet)+2\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}S^\bullet\right]- \tag{1.4}$$
$$-\eta^{2-a-c}p_7\left(\frac{N_i^\bullet}{R_{ii}}-\frac{N_j^\bullet}{R_{ij}}\right)-\frac{2Eh}{1-\sigma^2}p_1\eta^{2a-2b}d_\tau^2u_i^\bullet=0$$

$$p_2\left(\frac{T_1^\bullet}{R_{11}}-\frac{2S^\bullet}{R_{12}}+\frac{T_2^\bullet}{R_{22}}\right)+\eta^{2-3a-c}p_3\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial N_1^\bullet}{\partial \xi_1}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2^\bullet}{\partial \xi_2}\right)+ \tag{1.5}$$
$$+\eta^{2-2a-c}\frac{p_6}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}N_1^\bullet+\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}N_2^\bullet\right)-\frac{2Eh}{1-\sigma^2}\eta^{a-c-2b}p_5d_\tau^2w^\bullet=0$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial G_i^\bullet}{\partial \xi_i}-\frac{1}{A_j}\frac{\partial H^\bullet}{\partial \xi_j}+\eta^a\frac{p}{A_iA_j}\left[\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(G_i^\bullet-G_j^\bullet)-\right. \tag{1.6}$$
$$\left.-2\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}H^\bullet\right]-N_i^\bullet=0$$

соотношения упругости

$$T_i^\bullet=\frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_i^\bullet+\sigma\varepsilon_j^\bullet),\qquad S^\bullet=\frac{2Eh}{1+\sigma}\frac{\omega}{2} \tag{1.7}$$

$$G_i^\bullet=-\frac{2Ehr^2}{3(1-\sigma^2)}(\varkappa_i^\bullet+\sigma\varkappa_j^\bullet),\qquad H^\bullet=\frac{2Ehr^2}{3(1+\sigma)}\tau \tag{1.8}$$

формулы деформации — перемещения

$$\varepsilon_i^\bullet=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i^\bullet}{\partial \xi_i}+\eta^a\frac{p}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}u_j^\bullet-p_4\eta^{a-c}\frac{w^\bullet}{R_{ii}} \tag{1.9}$$
$$\omega^\bullet=\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1^\bullet}{\partial \xi_2}+\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2^\bullet}{\partial \xi_1}-$$
$$-\eta^a\frac{p}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_1^\bullet+\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_2^\bullet\right)+p_4\eta^{a-c}\frac{2w^\bullet}{R_{12}}$$

$$\varkappa_i^\bullet=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial \gamma_i^\bullet}{\partial \xi_i}-\eta^a\frac{p'}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\gamma_j^\bullet+\eta^{a+c}p'\frac{\delta^\bullet}{R_{12}} \tag{1.10}$$
$$\tau^\bullet=\frac{1}{A_1}\frac{\partial \gamma_2^\bullet}{\partial \xi_1}-\eta^a\frac{p'}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\gamma_1^\bullet+\eta^{a+c}p'\left(\frac{\omega_2^\bullet}{R_{11}}-\frac{\varepsilon_2^\bullet}{R_{12}}\right)$$

$$\gamma_i^\bullet=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w^\bullet}{\partial \xi_i}-\eta^{c+a}p'\left(\frac{u_i^\bullet}{R_{ii}}-\frac{u_j^\bullet}{R_{ij}}\right) \tag{1.11}$$
$$\omega_i^\bullet=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial \xi_i}-p\frac{\eta^a}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}u_i^\bullet+\eta^{a-c}p_4\frac{w^\bullet}{R_{ij}}$$
$$\delta^\bullet=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1^\bullet}{\partial \xi_2}-\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2^\bullet}{\partial \xi_1}+p\frac{\eta^a}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_1^\bullet-\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_2^\bullet\right)\right]$$

В написанных уравнениях и всюду в дальнейшем без специального напоминания принимается, что индексы i, j могут принимать две пары значений $i=1, j=2$, и $i=2, j=1$. Поэтому каждое равенство, содержащее такие индексы, надо рассматривать как двойное; в одинарных равенствах употребляются числовые индексы.

Для удобства дальнейшего изложения в равенства (1.4) — (1.11) введены условные множители p, p_1', p_1 — p_7, которые пока надо считать равными единице. Символ d_τ означает дифференцирование по переменной, указанной внизу.

Ниже речь будет идти только о таких интегралах динамических уравнений теории оболочек, для которых выполняется следующее предположение: все величины, отмеченные точками, вместе с их производными по ξ_1, ξ_2, τ, имеют одинаковую асимптотику, т. е. соизмеримы одинаковой степени η.

Постулируется, что в определенных областях изменения α_1, α_2, t такие интегралы существуют.

Первые два равенства (1.2) показывают, что в интегралах, обладающих сформулированным свойством, искомые величины при каждом дифференцировании (по α_1, α_2) приобретают множитель η^{-a}, а при каждом дифференцировании по t — множитель η^{-b} (учитываются только множители, влияющие на асимптотику, т. е. представляющие собой степени η). Отсюда следует, что a есть показатель изменяемости искомого напряженно-деформированного состояния по переменным α_1, α_2 а b — показатель изменяемости по t, который в дальнейшем называется показателем динамичности. Остальными равенствами (1.2) задается относительная асимптотика искомых величин. Так, например, десятое и четырнадцатое равенства (1.2) показывают, что

$$T_i = BG_i, \qquad B = O\left(\eta^{2-3a+c}\right)$$

В рамках принятых предположений асимптотический порядок каждого слагаемого в уравнениях (1.4) — (1.11) определяется теми степенями η, которые выписаны при них явно. Основываясь на этом, будем дальше поступать следующим образом.

Пусть числа a, b, c фиксированы или подчинены определенным неравенствам. Тогда в каждом отдельно взятом уравнении (1.4) — (1.11) легко найти головные (содержащие в коэффициентах наименьшие степени η) слагаемые. Отбросив в (1.4) — (1.11) все остальные члены, получим уравнения, которые можно назвать головными. Вообще говоря, головная система будет противоречива (например, в ней самой или в одной из ее подсистем число неизвестных будет больше числа уравнений). Поэтому значения a, b, c надо подчинить некоторым требованиям, чтобы они стали в этом смысле допустимы. Ниже будет показано, что можно построить некоторое число областей допустимых значений a, b, c, каждой из которых соответствует отличная от других непротиворечивая головная система.

Вид головной системы определяет, очевидно, весьма существенные свойства интеграла. Поэтому последние естественно различать по виду соответствующей ему головной системы. В этом заключается первый (статический) признак предлагаемой классификации интегралов динамических уравнений. На нем основаны рассуждения *пп.* 2—5.

2. Безмоментные интегралы. Под ними подразумеваются решения, соответствующие случаю, когда a, b, c подчинены следующим требованиям:

$$(2.1) \qquad 0 \leqslant a < {}^1/_2, \qquad c = a, \qquad b \leqslant 0$$

Просмотрев коэффициенты уравнений (1.4) — (1.11), замечаем, что в силу (2.1) слагаемые, содержащие p_3, p_6, p_7, имеют множителями положительные степени η, а степени η при остальных слагаемых неотрицательны. Поэтому в рассматриваемом случае головную систему можно получить, выбрав условные множители следующим образом:

$$p_3 = p_6 = p_7 = 0, \qquad p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = p = p' = 1 \tag{2.2}$$

Такая же схема вывода головных уравнений применяется без подробных пояснений и ниже.

Внеся (2.2) в уравнения (1.4) — (1.7), получим искомую головную систему. В ней уравнения (1.4), (1.5), (1.7) и (1.9) имеют вид

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_i^{\boldsymbol{\cdot}}}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S^{\boldsymbol{\cdot}}}{\partial \xi_j} + \frac{\eta^a}{A_iA_j}\left[\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(T_i^{\boldsymbol{\cdot}} - T_j^{\boldsymbol{\cdot}}) + 2\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}S^{\boldsymbol{\cdot}}\right] - \tag{2.3}$$

$$- \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\eta^{2a-2b}d_\tau^2 u_i^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$$

$$\frac{T_1^{\boldsymbol{\cdot}}}{R_{11}} - \frac{2S^{\boldsymbol{\cdot}}}{R_{12}} + \frac{T_2^{\boldsymbol{\cdot}}}{R_{22}} - \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\eta^{-2b}d_\tau^2 w^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$$

$$T_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_i^{\boldsymbol{\cdot}} + \sigma\varepsilon_j^{\boldsymbol{\cdot}}), \qquad S^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{Eh}{1+\sigma}\omega^{\boldsymbol{\cdot}}$$

$$\varepsilon_i^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i^{\boldsymbol{\cdot}}}{\partial \xi_i} + \frac{\eta^a}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}u_j^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{w^{\boldsymbol{\cdot}}}{R_{ii}}$$

$$\omega^{\boldsymbol{\cdot}} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1^{\boldsymbol{\cdot}}}{\partial \xi_2} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2^{\boldsymbol{\cdot}}}{\partial \xi_1} - \frac{\eta^a}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_1^{\boldsymbol{\cdot}} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_2^{\boldsymbol{\cdot}}\right) + \frac{2w^{\boldsymbol{\cdot}}}{R_{12}}$$

Эти равенства дают девять уравнений (равенства, содержащие индексы i, j, — двойные) с девятью неизвестными

$$T_1^{\boldsymbol{\cdot}},\ S^{\boldsymbol{\cdot}},\ T_2^{\boldsymbol{\cdot}},\ \varepsilon_1^{\boldsymbol{\cdot}},\ \omega^{\boldsymbol{\cdot}},\ \varepsilon_2^{\boldsymbol{\cdot}},\ u_1^{\boldsymbol{\cdot}},\ u_2^{\boldsymbol{\cdot}},\ w^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{2.4}$$

Будем называть их главной подсистемой, а величины (2.4) — главными неизвестными.

Остаются неиспользованными уравнения (1.11), (1.10), (1.8), (1.6). Вводя их в рассмотрение в том порядке, в котором они перечислены, можно выразить оставшиеся неизвестные теории оболочек через величины (2.4) при помощи прямых действий.

Легко убедиться, что безмоментными интегралами здесь названы такие решения, для которых основными неизвестными являются перемещения, тангенциальные усилия и компоненты тангенциальной деформации, а главной подсистемой — динамические безмоментные уравнения.

Замечание. В уравнениях (2.3) слагаемые, содержащие η^a и η^{2a-2b}, сохранены, так как a может иметь нулевое значение. Если $a > 0$, то их также можно отбросить. Это, в частности, означает, что в безмоментных интегралах тангенциальные силы инерции могут играть существенную роль только при малой изменяемости.

3. Изгибные интегралы. Под ними пока будем подразумевать решения, получающиеся, когда

$$a > {}^1/_2, \qquad c = a, \qquad b \leqslant 2a - 1 \tag{3.1}$$

В этом случае, помножив уравнение (1.5) на η^{3a+c-2} и рассуждая далее так же, как в п. 2, получаем, что переходу к головной системе соответствует следующий выбор условных множителей:

$$p = p' = p_1 = p_2 = p_6 = p_7 = 0, \quad p_3 = p_5 = p_4 = 1 \tag{3.2}$$

Рассмотрим уравнения (1.5), (1.6), (1.8), (1.10), (1.11), и, внеся в них (3.2), запишем их так (некоторые слагаемые с множителями p, p' и p_6 пока сохранены):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A_1}\frac{\partial N_1^{\bullet}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2^{\bullet}}{\partial \xi_2} + \eta^a \frac{p_6}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} N_1^{\bullet} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} N_2^{\bullet}\right) - \\ &\quad - \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\eta^{4a-2b-2} d_2^{\tau} w^{\bullet} = 0 \\ &\frac{1}{A_i}\frac{\partial G_i^{\bullet}}{\partial \xi_i} - \frac{1}{A_j}\frac{\partial H^{\bullet}}{\partial \xi_j} + \eta^a \frac{p}{A_i A_j}\left[\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(G_i^{\bullet} - G_j^{\bullet}) - \right. \\ &\quad \left. - 2\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} H^{\bullet}\right] - N_i^{\bullet} = 0 \\ &G_i^{\bullet} = -\frac{2Ehr^2}{3(1-\sigma^2)}(\varkappa_i^{\bullet} + \sigma\varkappa_j^{\bullet}), \qquad H^{\bullet} = \frac{2Ehr^2}{3(1+\sigma)}\tau^{\bullet} \\ &\varkappa_i^{\bullet} = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial \gamma_i^{\bullet}}{\partial \xi_i} - \eta^a \frac{p'}{A_i A_j}\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}\gamma_j^{\bullet}, \qquad \gamma_i^{\bullet} = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial w^{\bullet}}{\partial \xi_i} \\ &\tau^{\bullet} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \gamma_2^{\bullet}}{\partial \xi_1} - \eta^a \frac{p'}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\gamma_1^{\bullet} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Равенства (3.3) образуют главную подсистему. Они содержат 11 уравнений с 11 главными неизвестными

$$w^{\bullet},\ \gamma_1^{\bullet},\ \gamma_2^{\bullet},\ \varkappa_1^{\bullet},\ \varkappa_2^{\bullet},\ \tau^{\bullet},\ G_1^{\bullet},\ H^{\bullet},\ G_2^{\bullet},\ N_1^{\bullet},\ N_2^{\bullet} \tag{3.4}$$

Для определения неизвестных, не входящих в (3.4), остаются уравнения (1.4), (1.7), (1.9) и (1.11). Они образуют относительно этих величин систему дифференциальных уравнений, о которой будет сказано в п. 4.

В дальнейшем будет считаться, что изгибные интегралы существуют не только в рамках требований (3.1), но и при менее сильных условиях

$$a > {}^1/_2, \quad c = a, \quad b \text{ — любое} \tag{3.5}$$

Тогда при достаточно большом b в уравнении (1.4) и в первом уравнении (3.3) инерционные члены будут содержать η в отрицательных степенях, но здесь и ниже принимается, что в инерционных (и только в инерционных) членах появление множителя с отрицательной степенью η допустимо (это еще будет обсуждено более подробно).

Если в (3.3) принять p, p', p_6 равными единице (вместо нуля), то эти равенства по форме совпадут с динамическими уравнениями изгиба пластинки (в произвольной ортогональной системе криволинейных координат). Однако это совпадение не совсем полно: метрика оболочки, вообще говоря, отлична от метрики пластинки, а, кроме того, в (3.3) надо считать p, p' и p_6 равными нулю.

4. Плоскостные интегралы. Под ними подразумеваются решения динамических уравнений теории оболочек, получающиеся, когда a, b, c подчиняются одной из следующих трех групп неравенств:

$$(4.1^a)\qquad 0 \leqslant a < {}^1/_2, \quad c < a, \quad b > 0$$

$$(4.1^b)\qquad a \geqslant {}^1/_2, \quad c < a, \quad b > 2a - 1$$

$$(4.1^c)\qquad a > {}^1/_2, \quad c < a, \quad b < 2a - 1.$$

Исключив пока из рассмотрения уравнения (1.5), (1.6), (1.8), (1.10), (1.11) заключаем, что, если выполняется любой из вариантов условий (4.1), то для перехода к главной системе надо положить

$$(4.2)\qquad p_4 = p_7 = 0, \qquad p = p_1 = 1$$

(условные множители p', p_2, p_3, p_5, p_6 входят только в отброшенные уравнения и пока остаются неопределенными).

Главную подсистему образуют уравнения (1.4), (1.7), (1.9). В силу (4.2) она записывается так:

$$(4.3)\qquad \frac{1}{A_i}\frac{\partial T_i^\bullet}{\partial \xi_i} + \frac{1}{A_j}\frac{\partial S^\bullet}{\partial \xi_j} + \eta^a \frac{p}{A_iA_j}\left[\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i}(T_i^\bullet - T_j^\bullet) + 2\frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j}S^\bullet\right] -$$

$$- \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\eta^{2a-2b} d_\tau^{\,2} u_i^\bullet = 0$$

$$T_i^\bullet = \frac{2Eh}{1-\sigma^2}(\varepsilon_i^\bullet + \sigma\varepsilon_j^\bullet), \qquad S^\bullet = \frac{Eh}{1+\sigma}\omega^\bullet$$

$$\varepsilon_i^\bullet = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i^\bullet}{\partial \xi_i} + \eta^a \frac{p}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} u_j^\bullet$$

$$\omega^\bullet = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1^\bullet}{\partial \xi_2} + \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2^\bullet}{\partial \xi_1} - \eta^a \frac{p}{A_1A_2}\left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_1^\bullet + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_1^\bullet\right)$$

и состоит из восьми уравнений с восемью неизвестными

$$(4.4)\qquad T_1^\bullet,\ S^\bullet,\ T_2^\bullet,\ \varepsilon_1^\bullet,\ \omega^\bullet,\ \varepsilon_2^\bullet,\ u_1^\bullet,\ u_2^\bullet.$$

Обращаясь к отброшенным ранее уравнениям, рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть выполняются требования (4.1^a) или (4.1^b), из которых вытекает, что справедливы два неравенства

$$(4.5)\qquad b > 2a - 1, \qquad b > 0$$

Тогда c надо определить равенством

$$(4.6)\qquad c = a - 2b$$

При этом в уравнении (1.5) слагаемые с p_2 и p_5 будут содержать η в нулевой степени, а показатель η при p_3 и p_6 будет положительным. Следовательно, надо принять дополнительные равенства

$$p_3 = p_6 = 0, \qquad p_2 = p_5 = 1$$

которые означают, что в головной системе уравнение (1.5) принимает вид

$$(4.7)\qquad \frac{T_1^\bullet}{R_{11}} - \frac{2S^\bullet}{R_{12}} + \frac{T_2^\bullet}{R_{22}} - \frac{2Eh}{1-\sigma^2}\eta^{a-c-2b} d_\tau^{\,2} w^\bullet = 0$$

Оно позволяет определить w, так как $T_1^{\bullet}$, $S^{\bullet}$, $T_2^{\bullet}$ входят в группу главных неизвестных (4.4) и их можно считать заданными. Остаются неиспользованными уравнения (1.11), (1.10), (1.8), (1.6).

Вводя их в рассмотрение в том порядке, в каком они здесь выписаны, можно прямыми действиями найти оставшиеся неизвестные

(4.8) $\quad \varkappa_1^{\bullet},\ \tau^{\bullet},\ \varkappa_2^{\bullet},\ G_1^{\bullet},\ H^{\bullet},\ G_2^{\bullet},\ N_1^{\bullet},\ N_2^{\bullet},\ \gamma_1^{\bullet},\ \gamma_2^{\bullet},\ \delta^{\bullet}$

Случай 2. Пусть выполняется неравенство

(4.9) $\quad b < 2a - 1$

соответствующее требованиям (4.1[c]). Тогда вместо (4.5) надо взять равенство

(4.10) $\quad c = 2 - 3a$

(легко убедиться, что (4.6) и (4.10) не противоречат неравенству $c < a$).

При этом анализ коэффициентов уравнений (1.5), (1.6), (1.8) (1.10), (1.11) показывает, что в дополнение к (4.2) следует положить

(4.11) $\quad p_6 = p_5 = p' = 0,\ p_2 = p_3 = 1$

В результате уравнение (1.5) в головной системе примет вид

(4.12) $$\frac{1}{A_1}\frac{\partial N_1^{\bullet}}{\partial \xi_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial N_2^{\bullet}}{\partial \xi_2} = -\frac{T_1^{\bullet}}{R_{11}^{\bullet}} + \frac{2S^{\bullet}}{R_{12}^{\bullet}} - \frac{T_2^{\bullet}}{R_{22}^{\bullet}}$$

Предполагая, что главная подсистема уже решена, в нем надо считать известной правую часть равенства. В левой части (4.12) перерезывающие усилия $N_1^{\bullet}$, $N_2^{\bullet}$ можно выразить через w при помощи (1.6), (1.8), (1.10). В результате (4.12) превратится в уравнение для прогиба $w^{\bullet}$. Оставшиеся неизвестные (4.8) находятся очевидным образом при помощи прямых действий.

Система (4.3) совпадает по внешнему виду с динамическими уравнениями плоской задачи теории упругости, записанными в произвольной ортогональной системе криволинейных координат. Ниже для простоты (3.3) и (4.3) условно называются уравнениями задачи изгиба и уравнениями плоской задачи, соответственно.

В дальнейшем надо будет различать плоскостные интегралы в зависимости от того, какому варианту требований (4.1) они отвечают. Если это — требования (4.1[a]) или (4.1[b]), то будем говорить о плоскостных интегралах типа ($c = a - 2b$), а в противном случае — о плоскостных интегралах типа ($c = 2 - 3a$).

При решении головной системы, соответствующей плоскостному интегралу типа ($c = a - 2b$), дифференциальные (по α_1, α_2) уравнения, а именно уравнения плоской задачи (4.3), надо интегрировать только для построения главных неизвестных (4.4). Прогиб w находится после этого из (4.7) интегрированием по τ, а построение остальных неизвестных достигается прямыми действиями. В п. 2 было показано, что такая же ситуация имеет место и для безмоментных интегралов: при решении головной системы интегрировать приходится только безмоментные уравнения (2.3).

Таким образом, можно считать, что плоскостные интегралы типа ($c = a - 2b$) эквивалентны безмоментным интегралам в том смысле, что содержат одинаковое число произволов интегрирования: последние возникают соответственно при решении уравнений (3.3) и (2.3), представляющих собой системы одинакового порядка.

При решении головной системы, соответствующей плоскостным интегралам типа ($c = 2 - 3a$), системы дифференциальных уравнений приходится интегрировать дважды. Главные неизвестные (4.4) также определяются из уравнений плоской задачи (4.3), а w и величины (4.8) надо находить из уравнений (4.12), (1.6), (1.8), (1.10), (1,11). Они отличаются от уравнений (3.3) только тем, что в (4.12) вместо инерционного члена входит трехчлен, записанный справа. Считая, что уравнения плоской задачи решены, надо это выражение рассматривать, как известное. Следовательно, вторую систему, о которой говорилось выше, составляют неоднородные статические уравнения изгиба пластинки. В смысле числа произволов плоскостной интеграл типа ($c = 2 - 3a$) эквивалентен изгибному интегралу. Для последнего (см. п. 3) главные неизвестные (3.4) определяются из уравнений изгиба (3.3), а для построения остальных неизвестных в п. 3 были указаны равенства (1.4), (1.7), (1.9). Рассматривая в них величины (3.4) как известные, убеждаемся, что эти равенства представляют собой неоднородные уравнения плоской задачи. Таким образом, в плоскостных интегралах типа ($c = 2 - 3a$) и в изгибных интегралах содержатся произволы, возникающие как при решении уравнений плоской задачи, так и при решении уравнений изгиба.

5. Изгибно-плоскостные интегралы. Под этим подразумеваются решения, в которых

$$a = {}^1/_2, \quad c = a, \quad b \leqslant 0 \tag{5.1}$$

При таких значениях a, b, c для перехода к головной системе надо положить

$$p = p' = p_1 = p_6 = p_7 = 0, \qquad p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1 \tag{5.2}$$

Нетрудно убедиться, что обращение в нуль условных множителей p, p', p_6, p_7 соответствует следующим упрощениям: (1) отбрасыванию (всюду) первообразных от искомых функций по сравнению с их производными по α_1, α_2; (2) отбрасывание перерезывающих усилий в уравнениях равновесия (1.4); (3) отбрасывание в формулах для $\varkappa_1$, τ, $\varkappa_2$ членов с u_1, u_2. Таким образом, равенства (5.2) означают принятие гипотез теории напряженных состояний с большой изменяемостью, а, следовательно, головная система изгибно-плоскостных интегралов представляет собой динамический аналог уравнений этой теории. Они известны и здесь не приводятся.

Отметим, что среди изгибно-плоскостных интегралов, как частные случаи, содержатся и интегралы, соответствующие простому краевому эффекту.

6. Классификация интегралов динамических уравнений по статическому признаку, сформулированному в конце п. 1, завершена. В ней ре-

шающими были значение числа a, характеризующего изменяемость искомых величин по пространственным координатам и значение числа c, характеризующего интенсивность нормальных прогибов, по сравнению с интенсивностью тангенциальных перемещений. Число b, определяющее степень динамичности изучаемого явления, оставалось при этом почти произвольным.

Заметив это, введем в рассмотрение число ρ, равное наименьшей степени η в инерционных членах главной подсистемы и положим значения ρ в основу второго (динамического) признака классификации интегралов динамических уравнений. А именно, назовем интеграл квазистатическим при $\rho > 0$, динамическим при $\rho = 0$ и сильно динамическим при $\rho < 0$.

Каждый интеграл, отнесенный к определенному типу по статическому признаку, может быть в свою очередь классифицирован и по динамическому признаку. При этом для интегралов разного типа (по статическому признаку) смысл ρ будет различным. Просмотрев еще раз уравнения (2.3), (3.3) и (4.3), убеждаемся, что для безмоментных и изгибно-плоскостных интегралов

(6.1) $$\rho = -2b$$

для изгибных интегралов

(6.2) $$\rho = -2b + 4a - 2$$

для плоскостных интегралов

(6.3) $$\rho = 2a - 2b$$

Предлагаемая двойная классификация представляется целесообразной. Статический признак непосредственно выявляет для интеграла данного типа те приближенные уравнения, из которых он может быть определен (это — головные уравнения). Математическая специфика, связанная с классификацией по динамическому признаку, будет обсуждаться в п. 10.

7. Сравним предложенную классификацию с классификацией, принятой в статике оболочек.

Переход от динамики к статике можно осуществить, положив $b = -\infty$. В этом случае сохраняют смысл все такие интегралы, для которых на значения b не накладывалось ограничение снизу. К ним принадлежат безмоментные, изгибные, изгибно-плоскостные интегралы и плоскостные интегралы типа ($c = 2 - 3a$). В совокупности они обладают достаточной полнотой, чтобы из них можно было составить решение любой краевой задачи статики оболочек, если только срединная поверхность оболочки — неособая и все ее края — неасимптотические. Это вытекает из результатов, изложенных, например, в [1].

Действительно, если изменяемость искомого напряженно-деформированного состояния мала ($a<1/2$), то для приближенного расчета можно воспользоваться методом расчленения, т. е. составлять решение из безмоментных интегралов и изгибно-плоскостных интегралов, соответствующих простым краевым эффектам. Если $a = 1/2$, то приближенный расчет можно выполнить при помощи теории напряженных состояний с большой изменяемостью. Это значит, что полное решение задачи определится изгибноплокостными интегралами. При $a > 1/2$ происходит расчленение напряженного состояния на изгибное и тангенциальное напряженные состояния (см. [1], гл. 14, § 15), т. е.

решение комбинируется из изгибных интегралов и плоскостных интегралов типа ($c = 2 - 3a$).

Случай, когда края оболочки частично или целиком проходят вдоль асимптотических линий срединной поверхности, не охватываются настоящим рассмотрением, так как в нем не принимались во внимание обстоятельства, связанные с обращением в нуль нормальной кривизны. В результате выпали из рассмотрения, например, обобщенные краевые эффекты. Чтобы охватить и такие случаи, надо дать более гибкое определение изгибно-плоскостных интегралов, заменив в нем равенство $a = 1/_2$ на неравенство $a \leqslant 1/_2$. Размеры статьи не позволяют остановится на этом подробнее.

Замечание. При $b = -\infty$ теряют смысл только плоскостные интегралы типа ($c = a - 2b$). В статике такие интегралы невозможны потому, что для них прогиб w надо находить из уравнения (4.7), а если w не зависит от t, то эта операция невыполнима.

8. Рассмотрим свободные установившиеся колебания оболочки. В таких задачах можно считать, что все искомые величины зависят только от α_1, α_2 и что символ дифференцирования по t заменяется множителем $i\omega$ (ω — частота). По предположению (см. п. 1) асимптотика искомых величин не должна меняться при дифференцировании по переменной τ, связанной с t вторым равенством (1.2). В нем $1 - \sigma^2$ мало отличается от единицы, поэтому должно выполняться асимптотическое соотношение

$$(8.1) \qquad \mu = \sqrt{\frac{m}{2Eh}}\,\omega = \eta^{-b} O(1)$$

Этим равенством вводится частотный параметр μ и устанавливается, что его порядок относительно величины η^{-1} равен показателю динамичности b.

В работе [2] исследованы асимптотические свойства частотного параметра λ, равного μ^2. Полученные выводы в терминах предлагаемой статьи формулируются так:

(1). Существуют квазипоперечные колебания. В них деформация оболочки происходит в основном за счет перемещений w, с которым связаны и главные силы инерции.

(1^a). Если $0 < a < 1/_2$, то колебания называются квазипоперечными с малой изменяемостью. Их можно строить, комбинируя безмоментные интегралы с изгибно-плоскостными интегралами, соответствующими краевым эффектам. При этом основными уравнениями задачи являются безмоментные уравнения (2.3). Ими определяются главные свойства колебаний и в частности асимптотика частотного параметра

$$(8.2) \qquad \mu = \eta^{-b}\ O(1) = O(\eta^0)$$

(1^b). Если $1/_2 < a < 1$, то колебания называются квазипоперечными с большой изменяемостью. Они описываются изгибными интегралами, основными в этом случае являются уравнения (3.3), а асимптотика μ будет такой:

$$(8.3) \qquad \mu = \eta^{-b}\ O(1) = O(\eta^{1-2a})$$

(2). Существуют также колебания, которые названы квазитангенциальными. В них деформация оболочки происходит в основном за счет тангенциальных перемещений u_1, u_2. С последними связаны также и главные силы инерции.

(2^a). Если $0 < a < {}^1/_2$, то квазитангенциальные колебания можно строить, комбинируя плоскостные интегралы типа ($c = a - 2b$) с изгибными интегралами.

Замечание. В [2] интегралы, которые надо присоединить к безмоментным или плоскостным интегралам, чтобы можно было выполнить все граничные условия, называются дополнительными. Они могут быть получены и как частный случай изгибно-плоскостных интегралов и как частный случай изгибных интегралов. Первая из этих возможностей использована в случае (1^a), а вторая — в случае (2^a).

(2^b). Если ${}^1/_2 < a < 1$, то квазитангенциальные колебания описываются плоскостными интегралами типа ($c = 2 - 3a$).

В случаях (2^a) и (2^b) основными являются уравнения плоской задачи (4.3), а для асимптотики частотного параметра имеем

(8.4) $$\mu = \eta^b \, O(1) = O(\eta^a)$$

В предельном случае, когда $a = 0$, различие между квазитангенциальными и квазипоперечными колебаниями исчезает. Те и другие можно приближенно строить по схеме (1^a), а асимптотика μ определится соотношениями (8.2) или (8.4). В другом предельном случае, когда $a = {}^1/_2$, квазипоперечные колебания описываются изгибно-плоскостными интегралами, а квазитангенциальные колебания — плоскостными интегралами типа ($c = 2 - 3a$). Асимптотика μ определяется при этом соответственно формулами (8.3) и (8.4).

В [2] было также показано, что в оболочках неположительной кривизны возможны колебания со сверхнизкими частотами ($\mu \ll 1$), сопровождающиеся образованием большого числа узловых линий, идущих вдоль асимптотических линий срединной поверхности. В предлагаемом исследовании их нельзя обнаружить. Это также связано с тем, что в (5.1) на число a положено слишком сильное требование.

Формулы (8.2) — (8.4) при заданном a позволяют определить для данного типа колебаний показатель динамичности b: для квазипоперечных колебаний $b = 0$ при $a \leqslant {}^1/_2$ и $b = 1 - 2a$ при $a \geqslant {}^1/_2$, для квазитангенциальных колебаний $b = a$.

Из изложенного выше следует также, что каждому виду колебаний (если частоты — не сверхнизкие) соответствует в статической классификации интеграл определенного типа, а именно тот интеграл, головные уравнения которого являются основными для рассматриваемых колебаний. Легко проверить по формулам (6.1) — (6.3), что получаемые описанным способом значения b обращают в нуль число ρ для интегралов, соответствующих данному типу колебаний. Это позволяет дать следующую физическую интерпретацию второму признаку предлагаемой классификации: безмоментные, изгибные и плоскостные интегралы являются квазистатическими, динамическими или сильно динамическими в зависимости от того, будет ли степень их динамичности меньше, равна или больше степени динамичности соответствующих свободных колебаний.

9. Если изучению подлежат вынужденные установившиеся колебания, то частота ω, введенная в п. 8, будет заданным числом. Следовательно, по формуле (8.1) можно найти число b, определяющее показатель динамичности рассматриваемой задачи. Можно считать известным и показатель изменяемости искомого напряженно-деформированного состояния a (о нем можно судить по изменяемости внешнего воздействия [1,3,4]). Это позволяет заранее установить, из интегралов какого типа должно составляться решение данной задачи, а следовательно, наметить и пути ее приближенного решения.

Пример. Пусть консольная замкнутая оболочка вращения совершает вынужденные установившиеся колебания под действием тангенциальных сил, приложенных к свободному краю и меняющихся по закону $\sin n\varphi \sin \omega t$ (φ — долгота).

Тогда показатель изменяемости внешней нагрузки θ и степень динамичности b определятся из равенств

$$n = \eta^{-\theta}, \qquad \sqrt{m/2Eh}\,\omega = \eta^{-b}$$

Если $\theta < {}^1/_2$, $b \leqslant 0$, то решение задачи можно составить из безмоментного интеграла и изгибно-плоскостного интеграла, соответствующего простому краевому эффекту (см. п. 7). Это значит, что в данном случае в качестве приближенного подхода можно использовать метод расчленения. Из формулы (6.1) вытекает, что как безмоментный, так и изгибно-плоскостной интегралы будут квазистатическими при $b < 0$ и динамическими при $b = 0$.

Если $\theta < {}^1/_2$ и $b > 0$, то, согласно последнему неравенству в (3.1) и (5.1), построение безмоментных и изгибно-плоскостных интегралов становится невозможным. Первый из них надо заменить плоскостным интегралом вида ($c = a - 2b$) а второй — изгибным интегралом. Таким образом, при достаточно большой динамичности ($b > 0$) для исследования установившихся вынужденных колебаний метод расчленения требует модификации: основное напряженное состояние надо определить из уравнений плоской задачи (4.3) (это означает уменьшение влияния искривленности оболочки), а простой краевой эффект должен быть заменен напряженным состоянием, соответствующим изгибным интегралам. Можно показать, что изменяемость плоскостного интеграла равна изменяемости внешнего воздействия, т. е. $a = \theta$. Поэтому из (6.3) следует, что плоскостной интеграл может быть квазистатическим (при $b < \theta$), динамическим (при $b = \theta$) и сильно динамическим (при $b > \theta$). Обсуждение с этой точки зрения изгибного интеграла потребовало бы много места, не останавливаясь на подробностях, отметим только, что в рассматриваемой задаче изгибный интеграл всегда сильно динамический.

10. Двумерные уравнения теории тонких оболочек содержат малый множитель в коэффициентах при старших производных (по α_1, α_2). Общая асимптотическая теория таких уравнений развита в работе [5]. В ней введено важное понятие о регулярном вырождении. Такое вырождение характерно для краевых задач статики оболочек. Все наиболее важные приближенные методы статического расчета оболочек можно интерпретировать как следствие регулярности вырождения. В динамических задачах эти свойства, конечно, сохраняются пока в решение входят только квазистатические интегралы, так как тогда статический расчет можно рассматривать как исходное приближение некоторого итерационного процесса.

В стационарных задачах (например вынужденные колебания) возможно и нерегулярное вырождение. Оно будет иметь место тогда, когда показатель динамичности становится настолько большим, что в решение будут входить динамические и сильно динамические интегралы. Одновременно появляются и трудности, связанные с явлениями резонанса. Особенно сложен случай, когда в решение входит динамический безмоментный интеграл, так как тогда в рассматриваемой области, вообще говоря, появляются переходные линии γ, т. е. линии, на которых меняется тип безмоментных динамических уравнений [6]. В окрестности γ будет неверным принятое в п. 1 предположение об асимптотике решений динамических уравнений и надо искать методы склейки решений, расположенных по разным сторонам γ (для оболочек вращения эта проблема решается в работах [7–9]).

В сильно динамическом случае линии γ, на которых меняется тип уравнения, отсутствуют. Кроме того, при инерционных членах появляется большой коэффициент. Это открывает дорогу для применения новых асимптотических подходов и в простейших случаях (например при расчете оболочек вращения) позволяет получать решения совершенно элементарно. Однако попытки обобщить такие подходы наталкиваются на существенные трудности, связанные с нерегулярностью вырождения.

В нестационарных задачах динамики изучаются процессы (например, распространение упругих волн) с неоднородной изменяемостью во времени. В этом случае классификацию по динамическому признаку можно использовать при построении отображения (по Лапласу). Тогда можно считать, что $d_t^2 = p^2$ (p — параметр отображения) и применять различные приближенные подходы в различных областях изменения p. Здесь возникают трудности, связанные с необходимостью строить решения в комплексной области. Вместе с тем появляются и новые возможности, связанные с тем, что в нестационарных задачах вырождение всегда регулярно.

Отметим в заключение, что впервые вопросы, обсуждаемые в этой статье в применении к нестационарным процессам, поднимал Н. А. Алумяэ [10].

Поступила 26 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Качественный анализ свободных колебаний упругой тонкой оболочки. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, зависящими от параметра. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных уравнений в частных производных с малой главной частью. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
5. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем. наук, 1957, т. 12, вып. 5 (77).
6. *Чернышов Г. Н.* О некоторых свойствах интегралов динамических уравнений теории оболочек. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 2.
7. *Алумяэ Н. А.* О фундаментальной системе интегралов уравнения малых осесимметрических установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1960, № 1.
8. *Товстик П. Е.* Асимптотическое интегрирование уравнений свободных осесимметричных колебаний тонкой оболочки вращения в случае одной точки поворота. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
9. *Товстик П. Е.* К задаче об осесимметричных колебаниях оболочки вращения в случае двойной точки поворота. Вестн. ЛГУ, Сер. матем., механ., астроном., 1967, № 1.
10. *Алумяэ Н. А.* О применимости метода расчленения напряженного состояния при решении осесимметричных задач динамики замкнутой цилиндрической оболочки. Изв. АН ЭстССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1961, № 3.