

Подставляя выражения для $p(t) + q(t)$ и $p(t) - q(t)$ соответственно в (1.9) и (1.10), для функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ получаем

$$\Phi(z) = -\frac{2\mu(1-ik)}{\pi R[\kappa+1-ik(\kappa-1)]} \left(2l + z \ln \frac{z-l}{z+l}\right)$$

$$\Omega(z) = -\frac{2\mu(1-ik)}{\pi R[\kappa+1+ik(\kappa-1)]} \left(2l + z \ln \frac{z-l}{z+l}\right)$$

Здесь под $\ln [(z-l)/(z+l)]$ подразумевается ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль L плоскости, исчезающая на бесконечности.

Найденные функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ определяют напряженное состояние упругой среды, занимающей S' .

Поступила 5 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 5. М., «Наука», 1966.
2. М у с х е л и ш в и л и Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, изд. 3. М., «Наука», 1968.
3. Г а х о в Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
4. В е к у а Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., «Наука», 1970.

УДК 539.375

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ПОЛОСЕ

В. Д. Кулиев

(Москва)

Рассматривается стационарное движение полубесконечной трещины в полосе конечной ширины. Движение трещины в полосе обусловлено смещением жестко заземленных границ полосы нормально к трещине. Решение задачи строится методом Винера — Хопфа.

Подобная задача в статической постановке рассмотрена в работе [1]. Однако при факторизации была допущена вычислительная ошибка, в результате которой окончательные формулы оказались неверными.

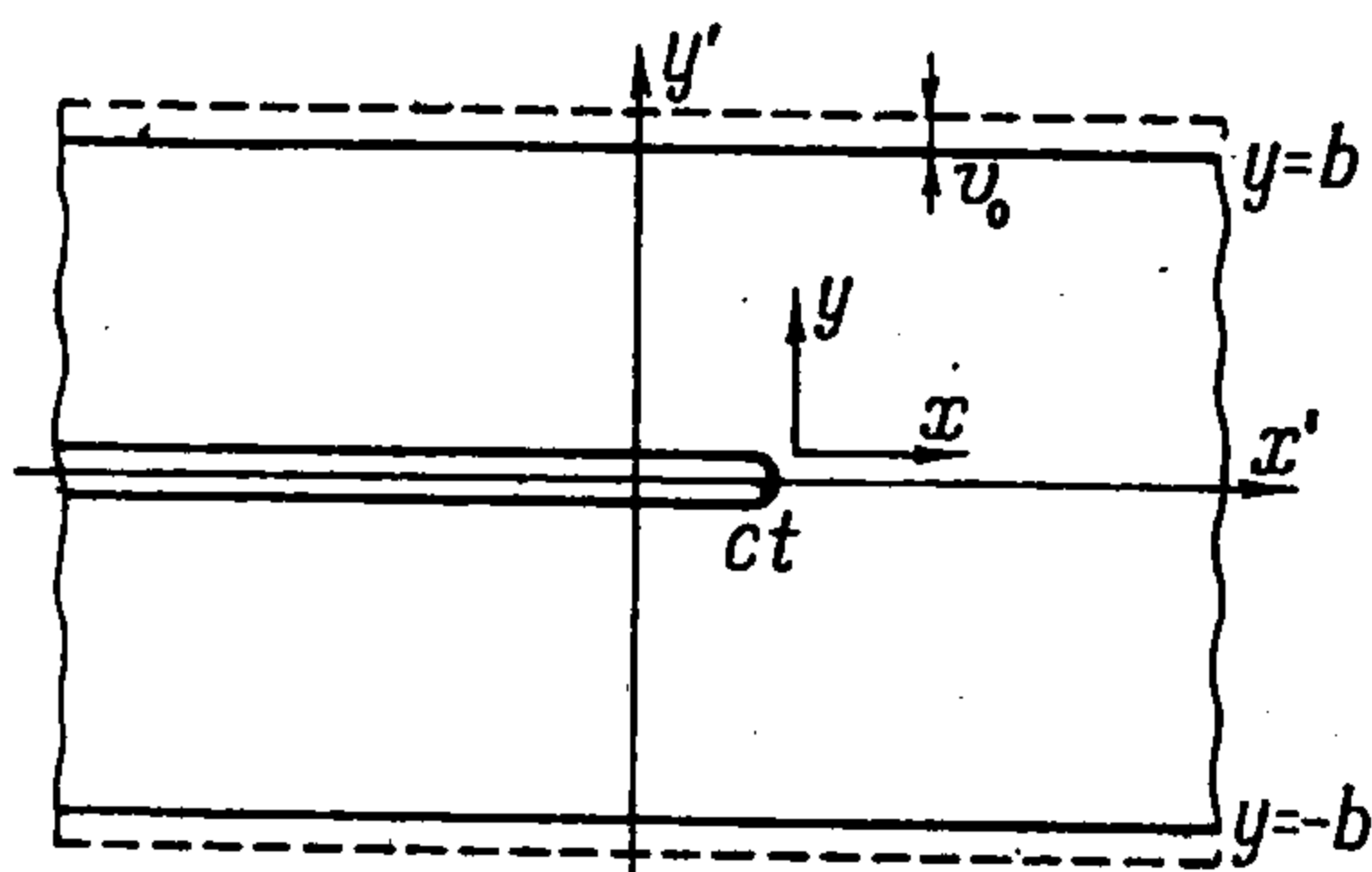
Некоторые стационарные задачи о распространении трещин нормального разрыва проанализированы в работах [2-9]. Оказалось, в частности, что рэлеевская скорость представляет собой недостижимую верхнюю границу скорости распространения трещин нормального разрыва.

1. Исследуемая геометрия данной задачи показана на фигуре [с [соответствующей системой координат (скорость движения трещины постоянна). Считается, что реализуется плоское деформированное состояние.

Потенциалы продольных и поперечных волн Φ и Ψ в подвижной системе координат $x = x' - ct$, $y_1 = y'$ при стационарном движении удовлетворяют уравнениям

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \alpha^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$(\beta = (1 - c^2/c_1^2)^{1/2}, \quad \alpha = (1 - c^2/c_2^2)^{1/2}, \quad c < c_2)$$



Здесь c_1, c_2 — скорости продольных и поперечных волн в упругой среде.

В силу симметрии относительно оси x достаточно рассмотреть лишь область $0 \leq y \leq b, -\infty < x < \infty$.

Граничные условия в подвижной системе координат имеют вид:

$$u = 0, v = v_0, -\infty < x < \infty \text{ при } y = b \quad (1.2)$$

$$\tau_{xy} = 0, \sigma_y = 0, x < 0 \text{ при } y = 0 \quad (1.3)$$

$$\tau_{xy} = 0, v = 0, x > 0 \text{ при } y = 0$$

$$(\Phi, \Psi) = O(r^{3/2}) \text{ при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \text{ (условие на ребре [9])} \quad (1.4)$$

Решение этой задачи можно представить в виде суммы двух полей напряжений.

Первое поле соответствует однородной деформации заземленной бесконечной полосы без трещины

$$\sigma_x = \frac{\nu E v_0}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \sigma_y = \frac{(1 - \nu) E v_0}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (1.5)$$

Второе поле напряжений и перемещений находится из решения следующей граничной задачи:

$$u = 0, v = 0, -\infty < x < \infty \text{ при } y = b$$

$$\tau_{xy} = 0, -\infty < x < \infty$$

$$\text{при } y = 0$$

$$v = 0, x > 0$$

$$(1.6)$$

$$\sigma_y = -\frac{(1 - \nu) E v_0}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad x < 0 \text{ при } y = 0$$

$$(\Phi, \Psi) = O(r^{3/2}) \text{ при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \quad (1.7)$$

2. Применяя экспоненциальное преобразование Фурье по координате x к уравнениям (1.1), уравнения в частных производных можно привести к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка по координате y , решения которых будут

$$\Phi^*(s, y) = A(s) \exp(-s\beta y) + B(s) \exp(s\beta y) \quad (2.1)$$

$$\Psi^*(s, y) = C(s) \exp(-s\alpha y) + D(s) \exp(s\alpha y)$$

Здесь s — комплексный параметр преобразования, звездочка означает преобразования Фурье от указанной величины.

Применение преобразования Фурье по координате x к соответствующим соотношениям для напряжений и перемещений дает

$$\sigma_x^* = \lambda \Phi_{yy}^* - (\lambda + 2\mu) s^2 \Phi^* - 2\mu i s \Psi_y^*$$

$$\sigma_y^* = (\lambda + 2\mu) \Phi_{yy}^* - \lambda s^2 \Phi^* + 2\mu i s \Psi_y^*$$

$$\tau_{xy}^* = \mu (-2i s \Phi_y^* + s^2 \Psi^* + \Psi_{yy}^*) \quad (2.2)$$

$$u^* = -i s \Phi^* + \Psi_y^*, \quad v^* = \Phi_y^* + i s \Psi^*$$

Согласно граничным условиям (1.6), имеем

$$(\sigma_y^*)_{y=0} = \sigma_y^* - \frac{(1 - \nu) E v_0}{i s (1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$(v^*)_{y=0} = v_0^*, \quad (\tau_{xy}^*)_{y=0} = 0 \quad (2.3)$$

$$(v^*)_{y=b} = 0, \quad (u^*)_{y=b} = 0$$

Здесь

$$\sigma_+^* = \int_0^{\infty} (\sigma_y)_{y=0} e^{isx} dx, \quad v_-^* = \int_{-\infty}^0 (v)_{y=0} e^{isx} dx$$

Постоянные интегрирования для преобразований Фурье потенциалов продольных и поперечных волн (2.1) должны быть определены из граничных условий (2.3). Последние три из этих условий можно использовать для определения трех постоянных через четвертое. Определение четвертого, оставшегося постоянного приводит к уравнению типа Винера — Хопфа для нахождения неизвестных величин — преобразований Фурье нормальных напряжений на продолжение трещины σ_+^* и вертикальных смещений берегов трещины v_-^* .

Опуская алгебраические выкладки и обозначая через $F(s)$ функцию

$$F(s) = \frac{s \{4\alpha\beta(1+\alpha^2) - \alpha\beta[(1+\alpha^2)^2 + 4] \operatorname{ch}(sab) \operatorname{ch}(s\beta b) + [(1+\alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2] \operatorname{sh}(sab) \operatorname{sh}(s\beta b)\}}{2(\alpha^2 - 1) M\beta [\alpha\beta \operatorname{sh}(s\beta b) \operatorname{ch}(sab) - \operatorname{sh}(sab) \operatorname{ch}(s\beta b)]} \quad (2.4)$$

приходим к следующему уравнению типа Винера — Хопфа:

$$\frac{\sigma_+^*}{2\mu} - \frac{(1-\nu)Ev_0}{is2\mu(1+\nu)(1-2\nu)} = MF(s)v_-^* \quad (2.5)$$

$$\left(M = \frac{4\alpha\beta - (1+\alpha^2)^2}{2i(\alpha^2 - 1)\beta} \right)$$

Представим функцию $F(s)$ в виде произведения

$$F(s) = F_+(s)F_-(s) \quad (2.6)$$

Здесь функции $F_+(s)$, $F_-(s)$ — аналитические и отличные от нуля в верхней и нижней полуплоскости соответственно.

С учетом факторизации уравнение (2.5) можно записать так:

$$\frac{\sigma_+^*}{2\mu F_+(s)} - \frac{(1-\nu)Ev_0}{is2\mu(1+\nu)(1-2\nu)F_+(s)} = MF_-(s)v_-^*$$

Второе слагаемое в левой части этого уравнения имеет полюс первого порядка при $s = 0$. Выберем контур интегрирования таким образом, чтобы точка $s = 0$ принадлежала верхней полуплоскости плоскости s .

После тождественного преобразования уравнение типа Винера — Хопфа можно записать в такой форме:

$$\frac{\sigma_+^*}{2\mu F_+(s)} - \frac{(1-\nu)Ev_0 [F_+(0) - F_+(s)]}{is2\mu(1+\nu)(1-2\nu)F_+(0)F_+(s)} = MF_-(s)v_-^* + \frac{(1-\nu)Ev_0}{is2\mu(1+\nu)(1-2\nu)F_+(0)} \quad (2.7)$$

Остается факторизировать функцию $F(s)$ в виде (2.6).

На основании теоремы Вейерштрасса о факторизации можно получить

$$F_-(s) = F_-(0) \frac{1-s/s_0}{1-s/z_0} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1-s/s_n)(1+s/\bar{s}_n)}{(1-s/z_n)(1+s/\bar{z}_n)} \right\} = F_+(-s)$$

$$\frac{z_0 e^{-\gamma/2}}{s_0 \Gamma^2(s/4)} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{|z_n|^2 e^{1/(2n)}}{|s_n|^2 [1 + 1/(4n)]^2} \right\} = \frac{1}{F_-(0)}$$

$$F_-(0) = F_+(0) = e^{i\pi/4} \left[\frac{\beta(b)^{-1} (1-\beta^2)^{-1} (1-\alpha^2)^2}{4\alpha\beta - (1+\alpha^2)^2} \right]^{1/2}$$

Здесь γ — эйлерова постоянная, $\Gamma(x)$ — гамма-функция; комплексные числа s_n и z_n являются корнями уравнений

$$4\alpha\beta(1+\alpha^2) - \alpha\beta[(1+\alpha^2)^2+4] \operatorname{ch}(s_n\alpha b) \operatorname{ch}(s_n\beta b) + [(1+\alpha^2)^2+4\alpha^2\beta^2] \times \\ \times \operatorname{sh}(s_n\alpha b) \operatorname{sh}(s_n\beta b) = 0$$

$$\alpha\beta \operatorname{sh}(z_n\beta b) \operatorname{ch}(z_n\alpha b) - \operatorname{sh}(z_n\alpha b) \operatorname{ch}(z_n\beta b) = 0$$

Теперь применим стандартную процедуру Винера — Хопфа к уравнению (2.7). Левая часть этого уравнения представляет собой функцию, аналитическую в верхней полуплоскости плоскости s , а правая — функцию, аналитическую в нижней полуплоскости плоскости s . По принципу непрерывного продолжения можно утверждать, что левая и правая части этого уравнения являются аналитическими продолжениями одна другой. Остается выяснить поведение определенной таким образом функции, аналитической во всей плоскости s , в бесконечно удаленной точке. Используя теорему абелева типа [10] и условие на «ребре» (1.4), можно показать, что аналитическая функция стремится к нулю на бесконечности. Заметим, что $F_+ s = s^{1/2}$ при $s \rightarrow \infty$. Тогда в силу теоремы Лиувилля она тождественно равна нулю во всей плоскости s . Таким образом, получаем

$$\sigma_+^* = \frac{i(1-\nu)Ev_0}{(1+\nu)(1-2\nu)s} \left[\frac{F_+(s)}{F_+(0)} - 1 \right] \quad (2.8)$$

$$v_-^* = \frac{i(1-\nu)Ev_0}{2\mu(1+\nu)(1-2\nu)MF_+(0)} \frac{1}{sF_-(s)} \quad (2.9)$$

Теперь определим коэффициент интенсивности напряжений K , представляющий основной интерес для механики хрупкого разрушения. Согласно (2.15), при $s \rightarrow \infty$ находим

$$\sigma_+^* = \frac{i(1-\nu)Ev_0}{(1+\nu)(1-2\nu)F_+(0)} s^{-1/2} \quad (2.10)$$

С другой стороны, используя условие

$$\sigma_y = K / \sqrt{2\pi x} \quad \text{при } x \rightarrow +0$$

в конце трещины имеем

$$\sigma_+^* = \int_0^\infty (\sigma_y)_{y=0} e^{isx} dx = \frac{K}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} s^{-1/2} \quad (2.11)$$

При этом предполагается, что s стремится к бесконечности, оставаясь в верхней полуплоскости.

Согласно формулам (2.10) и (2.11), окончательно находим коэффициент интенсивности напряжений

$$K = \frac{Ev_0(b)^{1/2}}{(1+\nu)m} \left[\frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \left(1 - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} m^2 \right)^{-1/2} R(m, \nu) \right]^{1/2} \quad (2.12)$$

Здесь

$$R(m, \nu) = 4 \left[(1-m^2) \left(1 - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} m^2 \right) \right]^{1/2} - (2-m^2)^2 \\ m = c/c_2$$

В частности, при $m \rightarrow 0$ получим решение статической задачи

$$K^0 = \frac{Ev_0 b^{1/2}}{(1+\nu)(1-2\nu)^{1/2}}$$

Из выражения (2.12) следует, что с увеличением скорости распространения трещины коэффициент интенсивности напряжений монотонно падает, обращаясь в нуль при рэлеевской скорости $m = m_R$; при $m > m_R$ коэффициент интенсивности напряжений становится мнимым.

Формула (2.12) другим методом найдена в [9].

Поступила 7 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. K n a u s s W. G. Stresses in an infinite strip containing a semi-infinite crack. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 2 (рус. перев.: Напряжения в бесконечной полосе, содержащей полубесконечную трещину. Прикл. механ. Сер. Е. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1966 т. 33, № 2).
2. Y o f f e E. H. The moving griffith crack. Philos. Mag., 1951, vol. 42, No. 330.
3. C r a g g s I. W. On the propagation of a crack in an elastic-brittle material. J. Mech. and Phys. Solids, 1960, vol. 8, No 1.
4. Б а р е н б л а т т Г. И., Ч е р е п а н о в Г. П. О расклинивании хрупких тел. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
5. C o t t e r e l V. On the nature of moving cracks. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1964, vol. 31, No. 1 (рус. перев.: О природе движущихся трещин. Прикл. механ., Сер. Е. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1964, т. 31, № 1).
6. Г о л ь д ш т е й н Р. В. Волны Рэлея и резонансные явления в упругих телах. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
7. Г о л ь д ш т е й н Р. В. Стационарное движение трещины в полосе. Предельная скорость трещины. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
8. Г о л ь д ш т е й н Р. В., М а т ч и н с к и й М. О стационарном движении трещины в полосе. Инж. ж. МТТ, 1967, № 4.
9. Ч е р е п а н о в Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1973.
10. Н о б л Б. Метод Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.

Технический редактор Э. Ф. Бунова

Сдано в набор 23/III-1973 г. Т-38340 Подписано к печати 1/VI-1973 г. Тираж 2740 экз.
Зак. 1913 Формат бумаги 70×108^{1/16} Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 16,7

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10