УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Г. Х. Киров, П. К. Павлов, Н. С. Райков

(Болгария)

Методом, изложенным в [1], решена задача плоской теории упругости плоскости с прямолинейным разрезом, на берегах которого заданы смешанные граничные условия.

1. Пусть область S', занятая однородной, упругой и изотропной средой, представляет собой плоскость комплексного переменного $z = x + iy$, разрезанную вдоль отрезка $L = ab$ действительной оси Ox. За положительное направление обхода L примем положительное направление оси Ox и граничным значениям рассматриваемых функций слева и справа от L будем приписывать индекс плюс и минус соответственно.

Задача заключается в определении напряженного состояния упругой среды при следующих граничных условиях:

$$v^+ = f_1(t), \quad v^- = f_2(t) \text{ на } L \tag{1.1}$$

$$X_y^+ = kY_y^+, \quad X_y^- = kY_y^- \text{ на } L \tag{1.2}$$

где $k = \text{const} > 0$, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ $(t \in L)$ — заданные функции, значения которых, как и их производных $f_1'(t)$, $f_2'(t)$ — малые величины порядка допустимых смещений. Будем считать, что $f_1'(t)$ и $f_2'(t)$ удовлетворяют условию Гельдера на L. Здесь и в дальнейшем используются определения и обозначения, принятые в [1].

Будем предполагать еще, что выполнены следующие условия:

$$v^+(a) = v^-(a), \quad v^+(b) = v^-(b) \tag{1.3}$$

а также заданы [1]

$$\Gamma = B + iC, \quad \Gamma' = B' + iC', \quad C = 0 \tag{1.4}$$

так что на бесконечности напряжения ограничены, а вращение равно нулю.

Будем считать, что задан главный вектор (X, Y) внешних усилий, приложенных к обоим берегам разреза L, т. е.

$$Y = -\int_L [p(t) - q(t)]\, dt, \qquad X = kY$$

$$p(t) = Y_y^+, \quad q(t) = Y_y^-, \quad (t \in L)$$

Как известно [1], упругое равновесие S' определяется при помощи двух функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, голоморфных в S', включая бесконечно удаленную точку, которые при больших $|z|$ имеют вид (см. [1], § 120)

$$\Phi(z) = \Gamma - \frac{X + iY}{2\pi(\varkappa + 1)} \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad (1 < \varkappa < 3)$$

$$\Omega(z) = \bar{\Gamma} + \bar{\Gamma}' + \frac{\varkappa(X + iY)}{2\pi(\varkappa + 1)} \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{1.5}$$

Здесь $\varkappa$ — постоянная, характеризующая упругие свойства среды.

Будем считать, что в окрестности каждого из концов a и b имеют место оценки (c — соответствующий конец)

$$|\Phi(z)| < \frac{A}{|z - c|^\alpha}, \quad |\Omega(z)| < \frac{A}{|z - c|^\alpha} \qquad (A > 0,\ 0 < \alpha < 1)$$

Кроме того, будем считать, что для всех точек $t \in L$, не совпадающих с концами, выполняется

$$\lim_{z \to t} y\Phi'(z) = 0 \qquad (z = x + iy) \tag{1.6}$$

Пользуясь формулами (см. [1], § 120)

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}$$

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varkappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}$$

и учитывая (1.6), приводим граничные условия (1.1), (1.2) к следующему виду (μ — постоянная Ламе):

$$\varkappa[\Phi^+(t) - \overline{\Phi^+(t)}] - [\Omega^-(t) - \overline{\Omega^-(t)}] = 4\mu i f_1'(t) \quad \text{на } L$$

$$\varkappa[\Phi^-(t) - \overline{\Phi^-(t)}] - [\Omega^+(t) - \overline{\Omega^+(t)}] = 4\mu i f_2'(t) \quad \text{на } L \qquad (1.7)$$

$$[\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- = (1 - ik)[p(t) - q(t)] \quad \text{на } L$$

$$[\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- = (1 - ik)[p(t) + q(t)] \quad \text{на } L \qquad (1.8)$$

Таким образом, поставленная задача свелась к нахождению функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ из условий (1.7), (1.8), где $p(t)$ и $q(t)$ — неизвестные действительные функции.

Так как $\Phi(\infty) - \Omega(\infty) = -\bar{\Gamma}'$, то общее решение первой из граничных задач (1.8) выражается формулой [1]

$$\Phi(z) - \Omega(z) = \frac{1 - ik}{2\pi i}\int_L \frac{p(\tau) - q(\tau)}{\tau - z}\,d\tau - \bar{\Gamma}', \quad -\bar{\Gamma}' = C_0 \qquad (1.9)$$

Далее, полагая

$$X(z) = \sqrt{(z-a)(b-z)}, \qquad \lim_{z\to\infty} z^{-1}X(z) = -i$$

для общего решения второй граничной задачи из (1.8) получим [1]

$$\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{1 - ik}{2\pi i X(z)}\int_L \frac{X^+(\tau)[p(\tau) + q(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau + \frac{C_1 z + C_2}{X(z)} \qquad (1.10)$$

Здесь под $X^+(t) = \sqrt{(t-a)(b-t)}$ следует подразумевать значения, принимаемые $X(z)$ на верхней стороне разреза L, а C_1 и C_2 — произвольные комплексные постоянные, подлежащие определению.

Имея в виду, что при больших $|z|$

$$\frac{1}{X(z)} = \frac{i}{z} + i\frac{a+b}{2}\frac{1}{z^2} + \ldots$$

из (1.10) при больших $|z|$ получаем

$$\Phi(z) + \Omega(z) = iC_1 + i\left(C_2 + \frac{a+b}{2}C_1\right)\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

С другой стороны, из (1.5), имеем

$$\Phi(z) + \Omega(z) = 2B + \bar{\Gamma}' + \frac{(\varkappa - 1)(X + iY)}{2\pi(\varkappa + 1)}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

Из двух последних равенств получаем для постоянных C_1 и C_2

$$C_1 = -i(2B + \bar{\Gamma}')$$

$$C_2 = \frac{(\varkappa - 1)(1 - ik)Y}{2\pi(\varkappa + 1)} + i\frac{a+b}{2}(2B + \bar{\Gamma}') \qquad (1.11)$$

В дальнейшем будем считать, что C_1 и C_2 известны.

Из (1.9) и (1.10) определим $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$. Пользуясь формулами Сохоцкого — Племеля [2, 3] и учитывая, что $X^-(t) = -X^+(t)$ на L, получаем

$$2\Phi^\pm(t) = (1 - ik)\left\{\pm\frac{p(t) - q(t)}{2} + \frac{p(t) + q(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{p(\tau) - q(\tau)}{\tau - t}\,d\tau \pm\right.$$

$$\pm\frac{1}{2\pi i X^+(t)}\int\limits_L \frac{X^+(\tau)[p(\tau)+q(\tau)]}{\tau-t}d\tau\Big\}+C_0\pm\frac{C_1t+C_2}{X^+(t)} \qquad (1.12)$$

$$2\Omega^\pm(t)=(1-ik)\Big\{\mp\frac{p(t)-q(t)}{2}+\frac{p(t)+q(t)}{2}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{p(\tau)-q(\tau)}{\tau-t}d\tau\pm$$

$$\pm\frac{1}{2\pi i X^+(t)}\int\limits_L \frac{X^+(\tau)[p(\tau)+q(\tau)]}{\tau-t}d\tau\Big\}-C_0\pm\frac{C_1t+C_2}{X^+(t)}$$

Подставляя $\Phi^\pm(t)$ и $\Omega^\pm(t)$ из (1.12) в равенства (1.7), после несложных преобразований получаем для неизвестных функций $p(t)$ и $q(t)$ следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$(1-\varkappa)k[p(t)+q(t)]-\frac{\varkappa+1}{\pi}\int\limits_L\frac{p(\tau)-q(\tau)}{\tau-t}d\tau=4\mu[f_1'(t)+f_2'(t)]-2(\varkappa+1)b_0$$

$$(1-\varkappa)k[p(t)-q(t)]-\frac{\varkappa+1}{\pi X(t)}\int\limits_L\frac{X(\tau)[p(\tau)+q(\tau)]}{\tau-t}d\tau=$$

$$=4\mu[f_1'(t)-f_2'(t)]-2(\varkappa+1)\frac{b_1t+b_2}{X(t)} \qquad (1.13)$$

Здесь через $X(t)$ обозначено $X^+(t)$, а b_0, b_1, b_2 определяются из равенств

$$C_0=a_0+ib_0,\quad C_1=a_1+ib_1,\quad C_2=a_2+ib_2$$

Пользуясь методами, изложенными в [4], на основании введенных предположений можно доказать, что система (1.13) имеет единственное решение, которое дается следующими выражениями:

$$p(t)+q(t)=-\frac{4\mu k(\varkappa-1)[f_1'(t)+f_2'(t)]}{(\varkappa+1)^2+k^2(\varkappa-1)^2}+\frac{4\mu(\varkappa+1)}{\pi[(\varkappa+1)^2+k^2(\varkappa-1)^2]}\times$$

$$\times\int\limits_L\frac{f_1'(\tau)-f_2'(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{2k(\varkappa^2-1)C'+2(\varkappa+1)^2(2B+B')}{(\varkappa+1)^2+k^2(\varkappa-1)^2} \qquad (1.14)$$

$$p(t)-q(t)=-\frac{4\mu k(\varkappa-1)[f_1'(t)-f_2'(t)]}{(\varkappa+1)^2+k^2(\varkappa-1)^2}+\frac{4\mu(\varkappa+1)}{\pi[(\varkappa+1)^2+k^2(\varkappa-1)^2]X(t)}\times$$

$$\times\int\limits_L\frac{X(\tau)[f_1'(\tau)+f_2'(\tau)]}{\tau-t}d\tau+\frac{[(\varkappa+1)^2C'-k(\varkappa^2-1)(2B+B')](2t-a-b)}{[(\varkappa+1)^2+k^2(\varkappa-1)^2]X(t)}-\frac{Y}{\pi X(t)}$$

Следует заметить, что полученный результат справедлив и в случае, когда $k=0$.

Так как $p(t)+q(t)$ и $p(t)-q(t)$ уже известны, из (1.9) и (1.10) находим $\Phi(z)+\Omega(z)$ и $\Phi(z)-\Omega(z)$, а следовательно, и $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$. Этим поставленная задача решена.

2. Рассмотрим пример. Пусть задан симметричный разрез $L\equiv[-l,l]$, на котором

$$v^+=\frac{1}{2R}(l^2-t^2),\qquad v^-=\frac{1}{2R}(t^2-l^2)$$

где постоянная $R>0$ достаточно велика. Будем считать, что на обоих берегах L выполнены соотношения (1.2). Далее будем считать также, что напряжения и вращение исчезают на бесконечности и что главный вектор внешних усилий, действующих на обоих берегах разреза L, равен нулю.

При этих предположениях, учитывая (1.4) и (1.11), устанавливаем, что $B=B'=$ $=C'=0$, откуда по формулам (1.14) находим

$$p(t)+q(t)=-\frac{8\mu(\varkappa+1)}{\pi R[(\varkappa+1)^2+k^2(\varkappa-1)^2]}\left(2l+t\ln\frac{l-t}{l+t}\right)$$

$$p(t)-q(t)=\frac{8\mu k(\varkappa-1)\,t}{R[(\varkappa+1)^2+k^2(\varkappa-1)^2]}$$

Подставляя выражения для $p(t) + q(t)$ и $p(t) - q(t)$ соответственно в (1.9) и (1.10), для функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ получаем

$$\Phi(z) = -\frac{2\mu(1-ik)}{\pi R[\varkappa + 1 - ik(\varkappa - 1)]}\left(2l + z\ln\frac{z-l}{z+l}\right)$$

$$\Omega(z) = -\frac{2\mu(1-ik)}{\pi R[\varkappa + 1 + ik(\varkappa - 1)]}\left(2l + z\ln\frac{z-l}{z+l}\right)$$

Здесь под $\ln[(z-l)/(z+l)]$ подразумевается ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль L плоскости, исчезающая на бесконечности.

Найденные функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ определяют напряженное состояние упругой среды, занимающей S'.

Поступила 5 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 5. М., «Наука», 1966.
2. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, изд. 3. М., «Наука», 1968.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
4. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М., «Наука», 1970.

УДК 539.375

СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТРЕЩИНЫ В ПОЛОСЕ

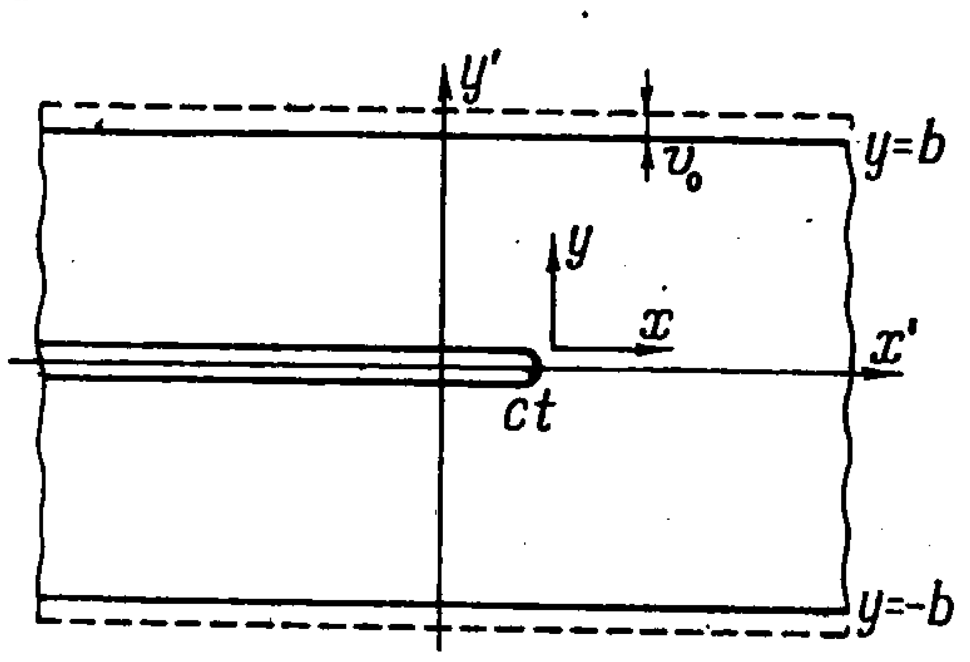
В. Д. Кулиев

(Москва)

Рассматривается стационарное движение полубесконечной трещины в полосе конечной ширины. Движение трещины в полосе обусловлено смещением жестко защемленных границ полосы нормально к трещине. Решение задачи строится методом Винера — Хопфа.

Подобная задача в статической постановке рассмотрена в работе [1]. Однако при факторизации была допущена вычислительная ошибка, в результате которой окончательные формулы оказались неверными.

Некоторые стационарные задачи о распространении трещин нормального разрыва проанализированы в работах [2–9]. Оказалось, в частности, что рэлеевская скорость представляет собой недостижимую верхнюю границу скорости распространения трещин нормального разрыва.



1. Исследуемая геометрия данной задачи показана на фигуре с соответствующей системой координат (скорость движения трещины постоянна). Считается, что реализуется плоское деформированное состояние.

Потенциалы продольных и поперечных волн Φ и Ψ в подвижной системе координат $x = x' - ct$, $y = y'$ при стационарном движении удовлетворяют уравнениям

$$\beta^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0, \qquad \alpha^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0 \tag{1.1}$$

$$(\beta = (1 - c^2/c_1^2)^{1/2}, \quad \alpha = (1 - c^2/c_2^2)^{1/2}, \ c < c_2)$$