

Для выполнения (5.1) достаточно, чтобы (при $\kappa = \text{const}$)

$$\frac{b}{a} = \frac{\nu + 1}{\kappa \Delta r} + O((\Delta r)^{-\alpha}), \quad \frac{\rho_0'}{\rho_0} = \frac{\nu}{\Delta r} + O((\Delta r)^{-\alpha}), \quad \alpha < 1$$

В частности, достаточно дифференцируемости следующих функций при $r = R$: ρ_0 / ρ' , ρ_0 / ρ_0' .

(К п. 2.3). Нигде не использовано какое-либо «физическое» граничное условие на свободной границе. Поэтому интересно выяснить связь между использованными условиями $u, Lu \in H_p$ и требованием $p \rightarrow 0$ при $r \rightarrow R$. Из формул п. 2 и 3 вытекает следующее утверждение. Пусть для решения системы (1.2)

$$\int \rho_0 |u(x, t)|^2 dx < \infty, \quad \int \rho_0 |u_{tt}(x, t)|^2 dx < \infty$$

и выполнено (2.2). Тогда в разложении $\partial p_1 / \partial t = \sum \Pi^{lm}(r, t) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ каждое слагаемое стремится к нулю при $r \rightarrow R$.

Поступила 25 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1966.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
3. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1966.
4. Вандакуров Ю. В. О распределении частот колебаний звезд. Астрон. ж., 1967, т. 44, вып. 4.
5. Дикий Л. А. Теория колебаний земной атмосферы. Л., Гидрометиздат, 1969.

УДК 532.516

О ДВУХ ТИПАХ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО КОНВЕКТИВНОГО ДВИЖЕНИЯ, ВЫЗВАННОГО ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Якимов

(Пермь)

Исследуется устойчивость стационарного плоскопараллельного конвективного движения в вертикальном слое, вызванного однородно распределенными в жидкости источниками тепла. В отличие от предыдущей работы [1] учитываются тепловые возмущения и их влияние на развитие гидродинамических возмущений. Устанавливается, что действие тепловых факторов достаточно существенно уже при значениях числа Прандтля $P \sim 1$. При дальнейшем увеличении P тепловые факторы становятся определяющими: происходит смена формы неустойчивости — от гидродинамической неустойчивости встречных потоков к неустойчивости типа бегущих тепловых волн. При больших значениях числа Прандтля критическое число Грасгофа стремится к нулю по закону $G_m \sim \sim P^{-1/2}$.

Исследование устойчивости плоскопараллельного конвективного течения между вертикальными параллельными плоскостями относительно малых нормальных возму-

щений сводится к спектральной задаче для амплитуд возмущений функции тока φ и температуры θ (см. [1])

$$\begin{aligned} \Delta^2 \varphi - ikGH\varphi + \theta' &= -\lambda \Delta \varphi \\ P^{-1} \Delta \theta + ikG(T_0' \varphi - v_0 \theta) &= -\lambda \theta \\ \varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = \theta(\pm 1) &= 0 \\ \Delta \varphi \equiv \varphi'' - k^2 \varphi, \quad H\varphi \equiv v_0 \Delta \varphi - v_0'' \varphi \\ v_0 &= 1/60 (1 - 6x^2 + 5x^4), \quad T_0 = 1 - x^2 \\ G &= g\beta q h^5 / 2\nu^2, \quad P = \nu / \chi \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) все величины безразмерные; v_0 и T_0 — невозмущенные профили скорости и температуры, k — волновое число. Декремент λ является собственным числом краевой задачи.

Для решения задачи применим метод Галеркина, выбрав в качестве базисных функций амплитуды нормальных возмущений функции тока и температуры в неподвижном слое жидкости. Эти базисные функции определяются краевыми задачами

$$\begin{aligned} \Delta^2 \varphi_i^{(0)} &= -\mu_i^{(0)} \Delta \varphi_i^{(0)}, \quad \varphi_i^{(0)}(\pm 1) = \varphi_i^{(0)' }(\pm 1) = 0 \\ P^{-1} \Delta \theta_k^{(0)} &= -\nu_k^{(0)} \theta_k^{(0)}, \quad \theta_k^{(0)}(\pm 1) = 0 \end{aligned}$$

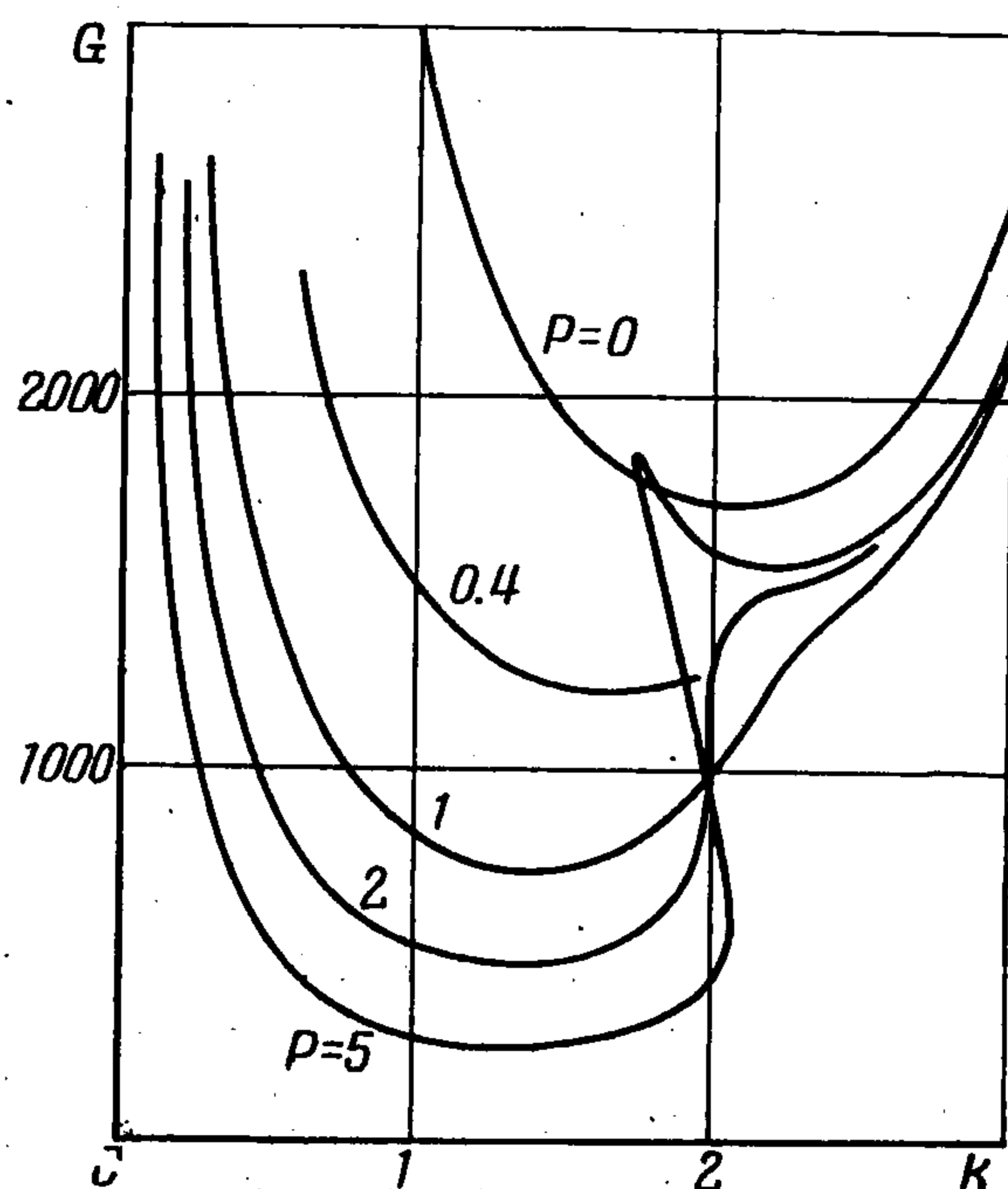
Приближенное решение задачи (1) представим в виде

$$\varphi = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i^{(0)}, \quad \theta = \sum_{k=0}^M b_k \theta_k^{(0)} \quad (2)$$

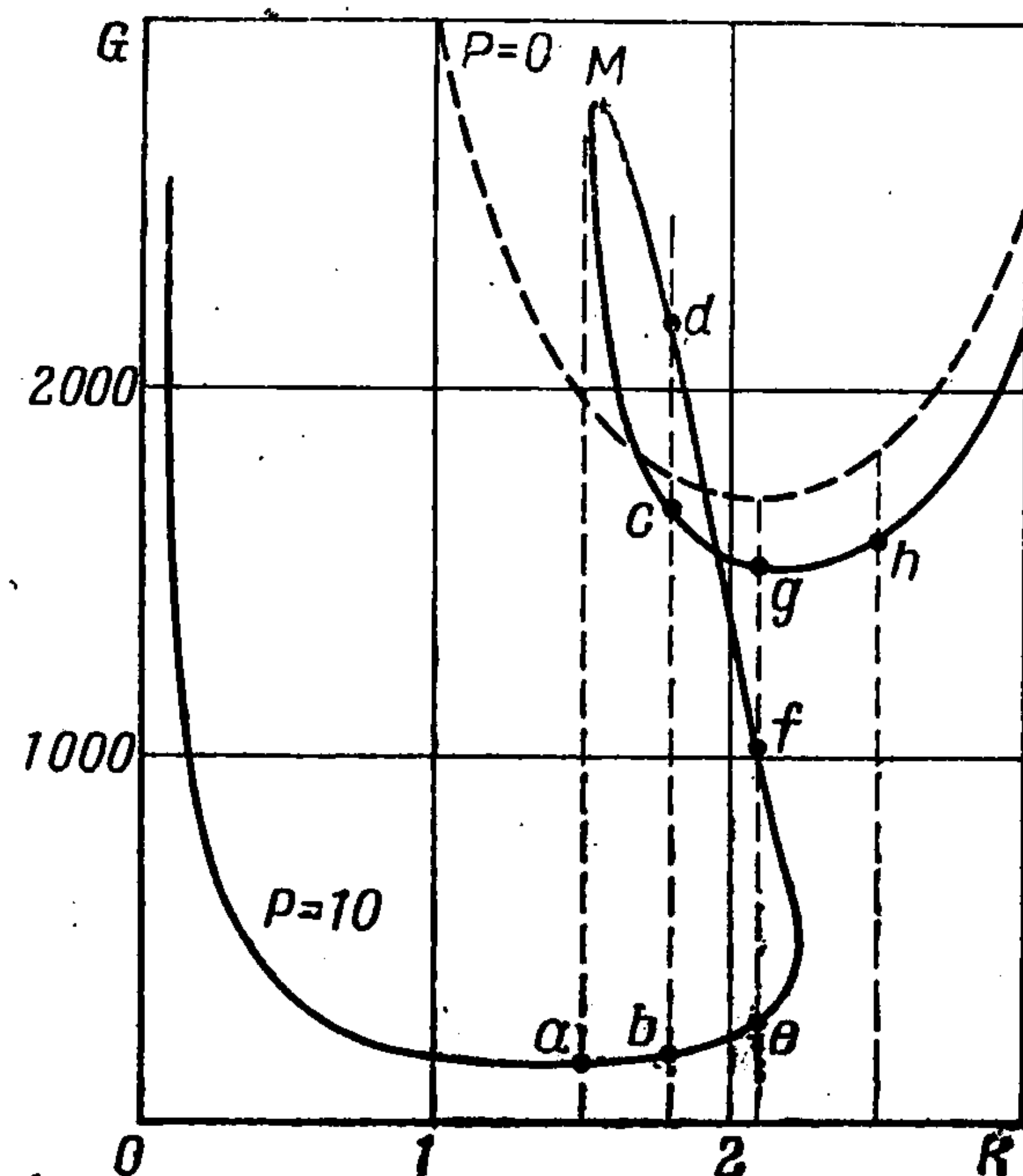
Условия ортогональности метода Галеркина приводят к однородной системе линейных уравнений для коэффициентов разложений a_i , b_k . Декременты возмущений $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ находятся как собственные значения матрицы этой системы. Условие $\lambda_r = 0$ дает границу устойчивости стационарного движения относительно соответствующего возмущения. Мнимая часть декремента λ_i связана с фазовой скоростью возмущения (в единицах максимальной скорости стационарного потока на оси канала) соотношением $c = (60 / kG) \lambda_i$. Собственные числа λ находились путем диагонализации комплексной матрицы на ЭВМ при помощи QR-алгоритма.

Расчеты показывают, что основной уровень неустойчивости связан с возмущениями «четного» типа, которым отвечает четная относительно середины канала амплитуда функции тока и нечетная амплитуда возмущения температуры. Эти возмущения развиваются в виде двух цепочек вихрей, расположенных в шахматном порядке на границах вертикальных потоков [1].

Далее приводятся результаты, относящиеся только к основному уровню неустойчивости. При этом аппроксимации (2) строятся из базисных функций $\varphi_i^{(0)}$ и $\theta_k^{(0)}$ надлежа-



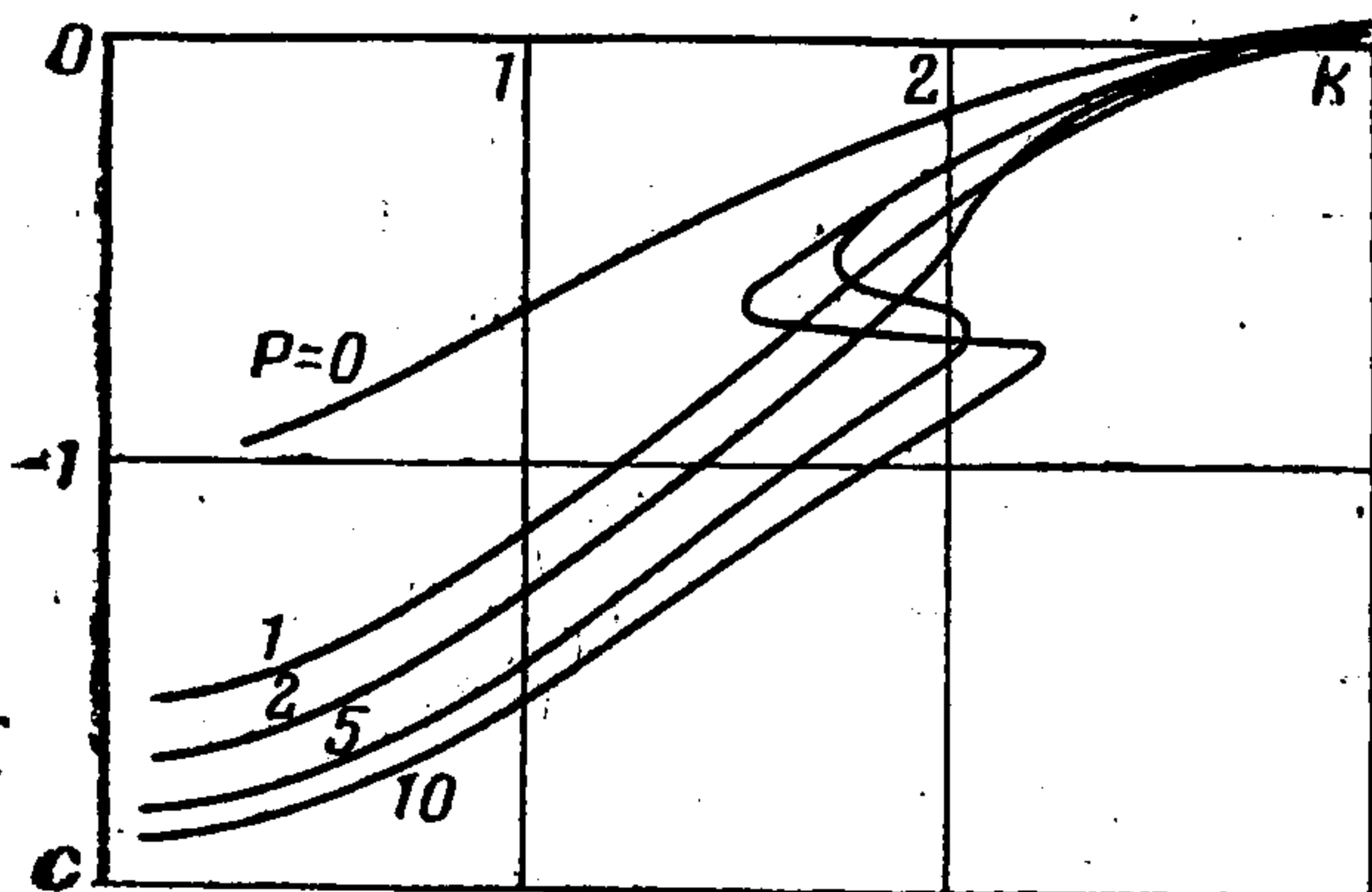
Фиг. 1



Фиг. 2

щей четности. В расчетах использовались аппроксимации, содержавшие по шесть — пятнадцать функций в разложениях φ и θ ; сравнение результатов разных приближений показывает, что в обсуждаемой области параметров эти базисы обеспечивают достаточную точность в определении декрементов и критических чисел Грасгофа.

Перейдем к обсуждению полученных результатов. На фиг. 1, 2 изображены нейтральные кривые на плоскости k, G для некоторых значений числа Прандтля. Предельная кривая $P = 0$ соответствует чисто гидродинамическому приближению [1]. Видно, что



Фиг. 3

учет тепловых факторов приводит к значительному понижению критического числа Грасгофа при увеличении числа Прандтля. Абсолютный минимум на кривой $G(k)$, определяющий границу устойчивости, с увеличением P смещается в сторону меньших k , т. е. происходит увеличение длины волны наиболее опасных возмущений.

Неустойчивость течения с четным профилем скорости обуславливается бегущими возмущениями, фазовая скорость которых отлична от нуля (см. [1]). На фиг. 3 приводится зависимость фазовой скорости нейтральных возмущений от волнового числа для разных P . Как видно, в широком интервале k , и в частности в области минимума на нейтральной кривой, фазовая скорость критических возмущений отрицательна, т. е. возмущения, срывающие стационарное движение, бегут вниз.

Сводные данные о критических параметрах, соответствующих абсолютному минимуму на нейтральных кривых, приведены в таблице. При больших P , как показывают расчеты, проводившиеся до $P = 100$, критическое волновое число $k_m \approx 1.4$, а минимальное число Грасгофа стремится к нулю по закону $G_m = 488 / \sqrt{P}$.

Такая асимптотика означает, что при больших P критическая разность температур растет с вязкостью как $\nu^{3/2}$. Предельный закон с определенностью свидетельствует о том, что неустойчивость при больших P обусловлена нарастающими в потоке бегущими тепловыми волнами (ср. [2, 3]).

Безразмерная фазовая скорость наиболее опасных возмущений с увеличением P растет. Так, при $P = 20$ она более чем в полтора раза превосходит максимальную скорость нисходящих потоков (напомним, что единицей фазовой скорости служит максимальная скорость восходящего конвективного потока на оси канала $g\beta q h^4 / 120\nu$ [1]; в этих единицах максимальная скорость нисходящих потоков равна -0.8).

Обращает на себя внимание значительная деформация нейтральной кривой, наступающая по мере увеличения числа Прандтля. Наиболее существенное понижение критического числа Грасгофа имеет место в области малых k (длинноволновая ветвь). Значение $P = 5.7$ является в некотором смысле критическим: при этом значении на нейтральной кривой имеется точка возврата (ее координаты $G = 1900$, $k = 1.7$); при $P > 5.7$ на нейтральной кривой появляется замкнутая петля, хорошо видная на фиг. 2 ($P = 10$). При больших P

линия $G(k)$ состоит, в сущности, из двух нейтральных кривых, непрерывно переходящих одна в другую. На кривой имеются два минимума и можно соответственно говорить о двух типах неустойчивости. Одна из ветвей нейтральной кривой (коротковолновая) близка к соответствующей кривой для чисто гидродинамических возмущений («гидродинамическая мода неустойчивости»), другая — длинноволновая, возни-

Таблица

P	G_m	k_m	c_m
0	1720	2.05	-0.16
0.4	1219	1.65	-0.52
1	744	1.38	-0.87
2	470	1.35	-1.04
3	359	1.35	-1.12
5	259	1.35	-1.21
10	171	1.38	-1.29
20	115	1.40	-1.36

жающая при достаточных P , существенно определяется тепловыми факторами («тепловая мода») ¹. Именно с этой модой связано наиболее опасное возмущение, соответствующее абсолютному минимуму на нейтральной кривой.

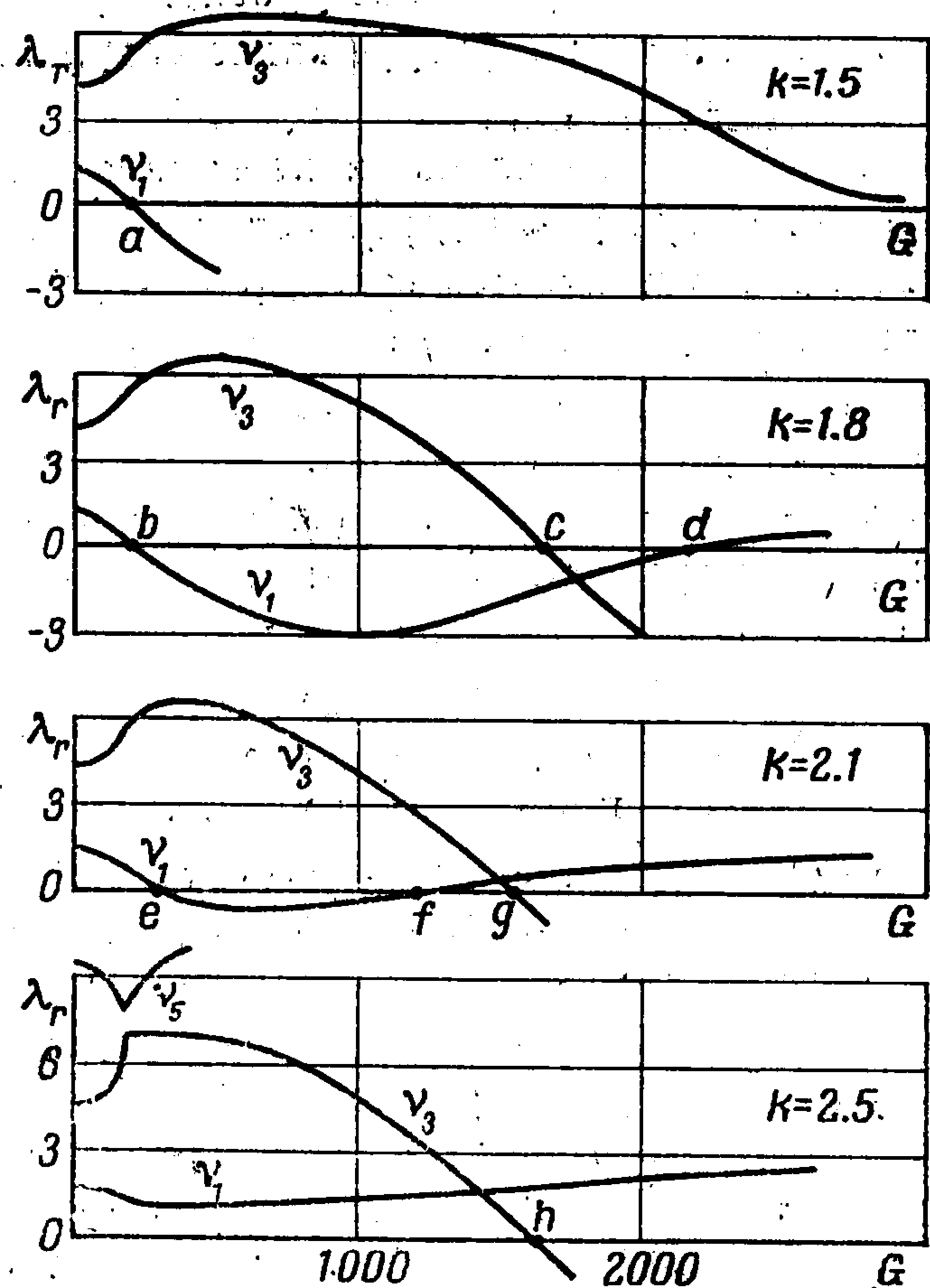
Таким образом, по мере увеличения числа Прандтля происходит монотонное снижение критического числа Грасгофа, сопровождаемое сменой формы неустойчивости — от гидродинамической неустойчивости при малых P к неустойчивости типа нарастающих тепловых волн при больших P .

Смена формы неустойчивости отчетливо прослеживается при рассмотрении спектров характеристических возмущений. При малых P , как и в предельном случае $P = 0$, неустойчивость связана с нижним четным гидродинамическим уровнем μ_0 (здесь и ниже используется обозначение уровней спектра конвективных возмущений, введенное в [5]). При увеличении числа Прандтля в нижней части спектра происходит сгущение тепловых уровней, и, начиная с $P = 1$, неустойчивость на длинноволновой ветви нейтральной кривой (малые k) постепенно переходит к нижнему нечетному тепловому уровню ν_1 . С увеличением P область волновых чисел, в которой неустойчивость связана с уровнем ν_1 , расширяется и при $P > 1.3$ охватывает всю нейтральную кривую.

Образование петли на нейтральной кривой связано с взаимодействием двух нижних тепловых уровней ν_1 и ν_3 . Иллюстрацией этого взаимодействия могут служить спектры декрементов для $P = 10$ при различных значениях волнового числа. Эти спектры, изображенные на фиг. 4, соответствуют четырем вертикальным разрезам на плоскости k, G , отмеченным на фиг. 2 пунктирными прямыми. Буквами a, b, c, \dots обозначены нейтральные точки.

На фиг. 4 изображены вещественные части тепловых уровней ν_1 и ν_3 . При $k = 1.5$ в области левее петли), как видно, имеется только неустойчивость, порождаемая уровнем ν_1 (нейтральная точка a). Разрез $k = 1.8$ пересекает петлю; в интервале ($b - d$) имеется неустойчивость относительно возмущения ν_1 , а правее точки c — относительно ν_3 ; в области ($c - d$) во возрастают оба возмущения. При $k = 2.1$ имеется ν_1 -неустойчивость в интервале ($e - f$) и ν_3 -неустойчивость правее точки g . Наконец, на разрезе $k = 2.5$ возникает лишь ν_3 -неустойчивость (нейтральная точка h). Таким образом, на нейтральной кривой имеется точка M , разграничивающая две ветви нейтральной кривой. На длинноволновом участке неустойчивость порождается возмущением ν_1 , на коротковолновом — ν_3 ; область внутри петли соответствует неустойчивости относительно обоих возмущений.

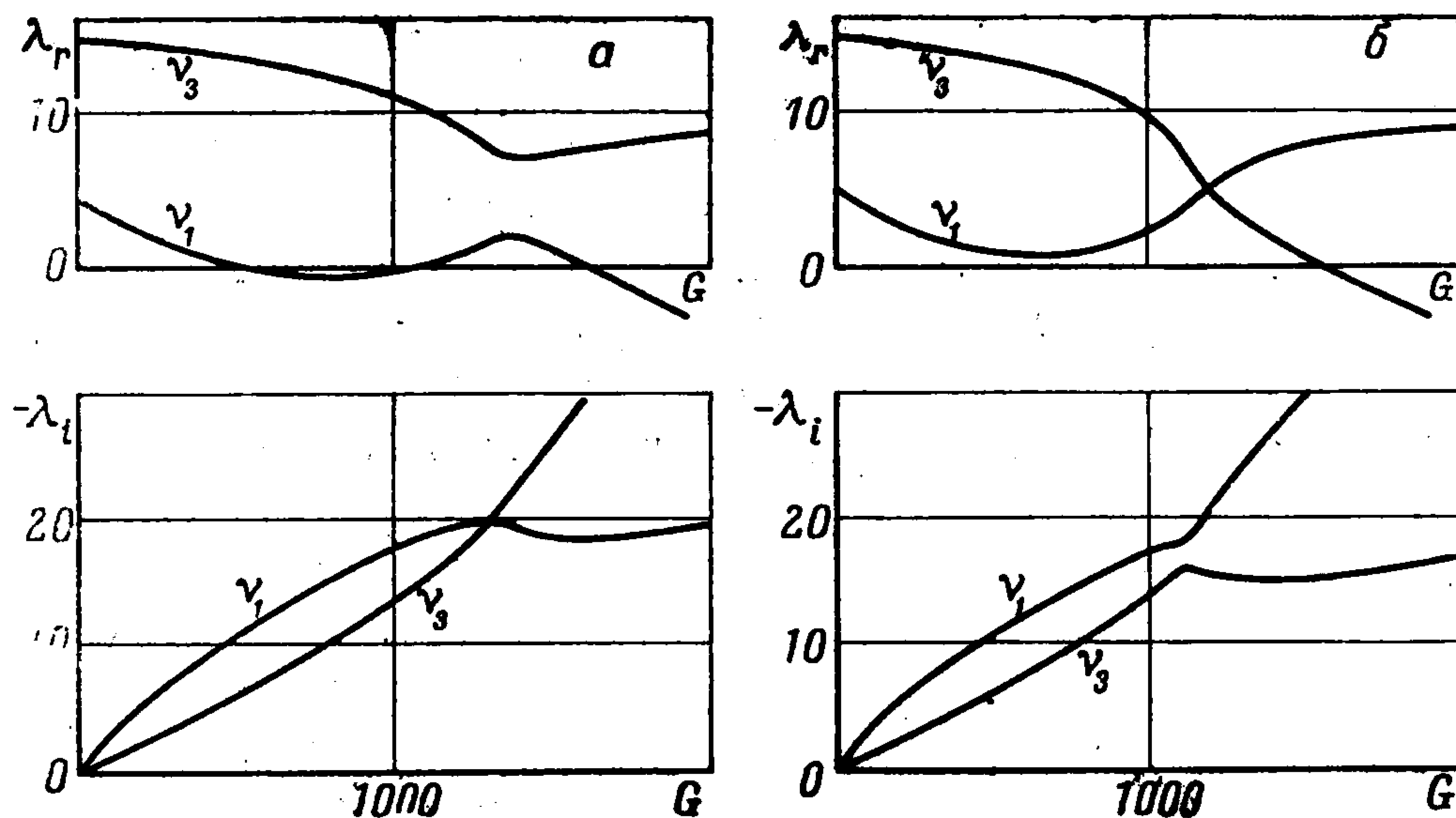
Отметим интересную особенность спектров, не отмечавшуюся, насколько известно авторам, ранее при исследованиях гидродинамической устойчивости. Эта особенность состоит в возникновении при определенных значениях параметров «полного пересечения» комплексных декрементов, при котором совпадают как вещественные, так и мнимые части двух пересекающихся мод. Пример приведен



Фиг. 4

¹ Появление при больших P замкнутой петли на нейтральной кривой и наличие двух типов неустойчивости отмечено недавно и в случае течения в конвективном пограничном слое возле вертикальной нагретой пластины [4].

на фиг. 5 для $P = 3$ и $k = 1.95$ (а), $k = 2.05$ (б); полное пересечение уровней ν_1 и ν_3 происходит в области устойчивости ($\lambda_r > 0$). Образование петли на нейтральной кривой также тесно связано с полным пересечением уровней ν_1 и ν_3 . Точка возврата, о которой говорилось выше, соответствует таким значениям параметров P, G и k ,



Фиг. 5

при которых полное пересечение декрементов имеет место в нейтральной точке $\lambda_r = 0$ (на оси G). При $P > 5.7$ полное пересечение происходит в области неустойчивости ($\lambda_r < 0$) при значениях параметров, соответствующих точке внутри петли. При $P = 10$ полное пересечение уровней ν_1 и ν_3 происходит в области $1.5 < k < 1.8$ (см. фиг. 4). На этой же фигуре видна ситуация, близкая к полному пересечению уровней ν_3 и ν_5 ($k = 2.5$).

Итак, как и в случае конвективного течения между плоскостями, нагретыми до разной температуры [2], рассматриваемое течение при больших числах Прандтля оказывается неустойчивым относительно тепловых возмущений, обладающих достаточно большой фазовой скоростью (нарастающие в потоке тепловые волны). Отличие состоит в том, что в случае течения с кубическим профилем обоим типам неустойчивости соответствуют различные нейтральные кривые (факторизация дисперсионного соотношения, вызванная нечетностью профиля основного движения), причем тепловая ветвь появляется, начиная с некоторого значения числа Прандтля P_* . В случае же конвективного течения, вызванного внутренними источниками тепла, новая форма неустойчивости получается в результате непрерывной деформации единой нейтральной кривой, происходящей по мере увеличения числа Прандтля.

Появление при больших числах Прандтля неустойчивости типа нарастающих тепловых волн обнаружено к настоящему времени в трех случаях: течение между параллельными плоскостями, нагретыми до разной температуры; пограничный слой у нагретой пластины; течение, вызванное внутренними источниками тепла. Надо думать, что этот вид неустойчивости специфичен для произвольных конвективных течений.

Поступила 30 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Якимов А. А. Об устойчивости стационарного конвективного движения, вызванного внутренними источниками тепла. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. Бирх Р. В., Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Рудаков Р. Н. О колебательной неустойчивости плоскопараллельного конвективного движения в вертикальном канале. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
3. Gill A. E., Kirkham C. C. A note on the stability of convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1970, vol. 42, pt. 1.
4. Nieber C. A., Gebhart B. Stability of vertical natural convection boundary layers: some numerical solutions. J. Fluid Mech., 1971, vol. 48, pt. 4.
5. Рудаков Р. Н. О малых возмущениях конвективного движения между вертикальными параллельными плоскостями. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.