УДК 532.5

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕХМЕРНЫХ ПОТОКОВ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Н. Богдатьева, Л. А. Дикий

(Москва)

В работе [1] обнаружено, что вихрь трехмерных возмущений стационарного течения идеальной жидкости неограниченно возрастает во всех случаях, даже если отсутствует дискретный спектр экспоненциально растущих волн. В общем случае этот рост линеен по времени, в некоторых вырожденных случаях даже экспоненциальный.

Ниже отмечается, что это утверждение [1] не означает обязательной неустойчивости трехмерных возмущений, по крайней мере в общепринятом смысле, и на примере трехмерных возмущений плоскопараллельных стационарных течений показано, что, несмотря на рост вихря, скорость возмущений остается ограниченной.

Коротко напомним аргументацию [1].

Линеаризуя уравнение вихря для идеальной однородной несжимаемой жидкости относительно стационарного течения $\mathbf{v}_0$, получим для возмущений $\mathbf{v}'$

$$\partial (\mathrm{rot}\, \mathbf{v}') / \partial t + \{\mathbf{v}_0, \mathrm{rot}\, \mathbf{v}'\} + \{\mathbf{v}', \mathrm{rot}\, \mathbf{v}_0\} = 0 \qquad (1)$$

$$(\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} = (\mathbf{a}\nabla)\, \mathbf{b} - (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a})$$

Скорость $\mathbf{v}'$ выражается через вихрь $\mathrm{rot}\, \mathbf{v}'$ при помощи интегрального вполне непрерывного оператора. Как известно, добавка такого оператора не меняет непрерывного спектра. Поэтому непрерывный спектр задачи может быть изучен на простом уравнении

$$\partial (\mathrm{rot}\, \mathbf{v}') / \partial t + \{\mathbf{v}_0, \mathrm{rot}\, \mathbf{v}'\} = 0$$

Решения же этого уравнения, как можно проверить, линейно растут со временем.

Рассмотрим пример. Пусть основное течение направлено вдоль оси Ox, а его скорость зависит от координаты $z : U = U(z)$.

Для малых возмущений, гармонически зависящих от координат x и y, т. е. возмущений вида $f(z, t)\ e^{i(\alpha x+\beta y)}$

$$\begin{aligned} (\partial / \partial t + i\alpha U)\, u + U'w &= -\, i\alpha p / \rho \\ (\partial / \partial t + i\alpha U)\, v &= -\, i\beta p / \rho \\ (\partial / \partial t + i\alpha U)\, w &= -\, p_z / \rho \\ i\alpha u + i\beta v + w_z &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Уравнение вихря (1) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} (\partial / \partial t + i\alpha U)\, r_1 - U'r_3 + [-\, i\beta U'u] &= 0 \\ (\partial / \partial t + i\alpha U)\, r_2 + [\, -\, i\beta U'v + U''w] &= 0 \\ (\partial / \partial t + i\alpha U)\, r_3 + [-\, i\beta U'w] &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Здесь r_1, r_2, r_3 — компоненты $\mathrm{rot}\, \mathbf{v}'$

$$r_1 = i\beta w - v_z,\ r_2 = -\, i\alpha w + u_z,\ r_3 = i\alpha v - i\beta u \qquad (4)$$

В квадратные скобки заключены выражения, соответствующие последнему члену в формуле (1). Если эти члены отбросить, то оставшаяся система уравнений относительно r_1, r_2 и r_3 без труда интегрируется. При этом r_2, r_3 остаются ограниченными со временем, а r_1 линейно растет.

Теперь рассмотрим полную систему (3) и покажем, что u, v, w ограничены. Умножая первое из уравнений на $i\beta$ и вычитая второе, умноженное на $i\alpha$, а также учитывая

$$i\beta r_1 - i\alpha r_2 = w_{zz} - (\alpha^2 + \beta^2)\, w$$

получим уравнение

$$(\partial / \partial t + i\alpha U)\,[w_{zz} - (\alpha^2 + \beta^2)\, w] - i\alpha U'' w = 0 \qquad (5)$$

Если при $z = a$, b имеются твердые стенки, то положим в этих точках $w = 0$.

Невещественный дискретный спектр, приводящий к экспоненциальной неустойчивости, отсутствует, например при $U'' \neq 0$ (теорема Релея). В этом случае без труда проверяется следующий закон сохранения:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \left[|w_z|^2 + (\alpha^2 + \beta^2)|w|^2 + \frac{U + U_0}{U''}\,|w_{zz} - (\alpha^2 + \beta^2)\, w|^2\right] dz = 0$$

Здесь записана главная часть функционала, построенного в [2], U_0 — произвольная константа, которая может быть выбрана так, что $(U + U_0) / U'' > 0$. Из этого закона сохранения следует, что w, w_z, w_{zz} ограничены в среднем квадратическом константой, не зависящей от времени.

Из третьего уравнения (3) находим

$$r_3 = e^{-i\alpha Ut}\int e^{i\alpha Ut}\, i\beta U' w\, dt$$

Подставим сюда w из (5)

$$r_3 = e^{-i\alpha U(z)t}\,\frac{\beta U'}{\alpha U''}\int e^{i\alpha U t}\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha U\right)[w_{zz} - (\alpha^2 + \beta^2)\, w]\, dt =$$
$$= \frac{\beta U'}{\alpha U''}\,[w_{zz} - (\alpha^2 + \beta^2)\, w] + e^{-i\alpha Ut} f(z)$$

По доказанному выше это выражение ограничено в среднем квадратическом константой, не зависящей от времени. Принимая во внимание последнее из уравнений (2) и последнее из уравнений (4), находим, что u и v линейно выражаются через r_3 и w_z, т. е. также ограничены константой, не зависящей от времени, что и требовалось доказать.

Компоненты вихря r_1 и r_2 тем не менее могут линейно расти. В этом можно убедиться и без сложной теории, рассмотрев частное решение с $w \equiv 0$. Тогда r_3 имеет вид $e^{-i\alpha Ut} f(z)$, следовательно, и v такого же вида. Но $r_1 = -v_z = i\alpha U' t v + , \ldots ,$ т. е. линейно растет со временем.

Настоящая линейная по времени неустойчивость с ростом скоростей может иметь место при слиянии точек дискретного спектра, как отмечалось в [3].

Поступила 14 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Арнольд В. И. Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей. ПММ, 1972, вып. 2.
2. Арнольд В. И. Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 5.
3. Дикий Л. А. Устойчивость плоскопараллельных потоков идеальной жидкости. Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 5.