УДК 534.222.2

# АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЗА УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

**Д. Д. Малик, П. Сингх**

(Индия)

Рассматривается автомодельная задача о распространении ударных волн в гравитационном поле с учетом изменения энергии во времени. Течение вызвано расширением сферического поршня, и ударные волны распространяются с постоянной скоростью. Для движений такого типа скорость, давление и плотность можно представить в виде зависимости от одного безразмерного параметра. Найдено, что энергия изменяется с числом Маха.

Распространение ударных волн при взрыве в газовой среде при воздействии гравитационных и негравитационных полей исследовалось рядом авторов. Л. И. Седов [1] детально исследовал автомодельное движение первого рода (согласно классификации, предложенной в работе [2]); показатель подобия определялся либо из соображений размерности, либо из законов сохранения. Автомодельная задача о движении в однородной среде в негравитационном поле, вызванном расширением поверхности — плоской, сферической, цилиндрической,— изучалась Рождерсом [3] в случае, когда возмущенная область ограничена сильной ударной волной. В возмущенной области полная энергия растет с течением времени по степенному закону.

Ниже рассматривается автомодельное движение, в котором полная энергия растет пропорционально времени, в изотермической газовой среде в гравитационном поле за сферической ударной волной, движущейся с постоянной скоростью $c_0$. Расположение внутренней границы течения, которой служит расширяющаяся поверхность, определяется численным интегрированием системы уравнений при числах Маха, равных 1.6 и $\sqrt{10}$.

**1. Уравнения движения и их решение.** Помещая начало координат в центр расширяющегося сферического поршня и используя сферические полярные координаты $r$, $\theta$, $\varphi$, уравнения движения и неразрывности в гравитационном поле можно записать в виде (при этом используется свойство сферической симметрии)

$$\frac{dv}{dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{G\mu}{r^2}=0, \qquad \frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{2\rho v}{r}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right)=0, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial r}=4\pi\rho r^2$$

$$\left(\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

Здесь $v$, $p$ и $\rho$ — скорость, давление и плотность среды на расстоянии $r$ от начала координат, $G$ — гравитационная постоянная и $\mu$ — масса среды внутри сферы радиуса $r$.

Соответствующие значения скорости, плотности, давления и массы невозмущенной среды даются соотношениями

$$v_1=0, \quad \rho_1=\frac{A}{r^\omega}, \quad p_1=\frac{2\pi A^2 G}{(\omega-1)(3-\omega)}\frac{1}{r^{2\omega-2}} \tag{1.2}$$

$$\mu_1=\frac{4\pi A}{3-\omega}r^{3-\omega} \qquad (1<\omega<3,\ A=\mathrm{const})$$

На поверхности ударной волны, распространяющейся по покоящемуся газу, должны выполняться следующие условия:

$$V_2=\frac{2}{\gamma+1}c_0(1-q), \qquad \rho_2=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1\left(1+\frac{2}{\gamma-1}q\right)^{-1} \tag{1.3}$$

$$p_2=\frac{2\gamma}{\gamma+1}p_1\frac{1}{q}\left(1-\frac{\gamma-1}{2\gamma}q\right), \quad \mu_2=\mu_1, \qquad \left(q=\frac{\gamma p_1}{\rho_1 c_0^2}=\frac{1}{M^2}\right)$$

Здесь постоянная скорость ударной волны $c_0$ связана с радиусом ударной волны $r_2(t)$ соотношением $r_2(t) = c_0 t$.

Рассматриваемая задача автомодельна [1] лишь в частном случае, когда $\omega = 2$, т. е. когда среда изотермична. В этом случае автомодельную переменную и параметры движения газа можно записать в виде

$$\lambda = r/c_0 t = r / r_2, \quad v = c_0 f(\lambda), \quad \rho = \rho_2 g(\lambda)$$

$$p = p_2 h(\lambda), \quad \mu = \mu_2 e(\lambda)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\ln\rho_2 = -\frac{2c_0}{r_2} = \frac{d}{dt}\ln p_2\right) \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1) и учитывая соотношение, приведенное выше в скобках, имеем

$$(f-\lambda)\frac{df}{d\lambda} + \frac{\alpha_1}{g}\frac{dh}{d\lambda} + \frac{2qe}{\gamma\lambda^2} = 0 \tag{1.5}$$

$$(f-\lambda)\frac{d}{d\lambda}\ln g + \frac{df}{d\lambda} + \frac{2f}{\lambda} = 2 \tag{1.6}$$

$$(f-\lambda)g\frac{dh}{d\lambda} - \gamma h(f-\lambda)\frac{dg}{d\lambda} + 2gh(\gamma-1) = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{de}{d\lambda} = \frac{\alpha_2\gamma}{2q}\lambda^2 g \tag{1.8}$$

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\left(1+\frac{2q}{\gamma-1}\right)\left(1-\frac{\gamma-1}{2\gamma}q\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{2(\gamma+1)}{\gamma(\gamma-1)}q\left(1+\frac{2}{\gamma-1}q\right)^{-1}$$

Далее запишем условие сохранения массы в другом виде: $d\mu / dt = 0$ и подставим сюда (1.4). Из полученного соотношения и (1.8) исключим $de / d\lambda$. Тогда

$$e = \frac{\alpha_2\gamma}{2q}\lambda^2 g(\lambda - f) \tag{1.9}$$

Подставляя это значение $e$ в (1.5), получим

$$(f-\lambda)\frac{df}{d\lambda} + \alpha_1\frac{1}{g}\frac{dh}{d\lambda} - \alpha_2(f-\lambda) = 0 \tag{1.10}$$

Условия на ударной волне (1.3) после преобразования к безразмерному виду при помощи (1.4) дают

$$f(1) = \frac{2}{\gamma+1}(1-q), \qquad g(1) = 1 \tag{1.11}$$

$$h(1) = 1, \quad e(1) = 1$$

Рассматривая (1.6), (1.7) и (1.10) как систему алгебраических уравнений относительно $df / d\lambda$, $dg / d\lambda$, $dh / d\lambda$ и решая эту систему, получим

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{2\alpha_1(\gamma f/\lambda - 1) + \alpha_2 g^2(f-\lambda)^2}{(f-\lambda)^2 g - \alpha_1\gamma h}$$

$$\frac{dg}{d\lambda} = -\frac{g}{\lambda(f-\lambda)}\,\frac{2\alpha_1(\gamma-1)\lambda h + \alpha_2\lambda g^2(f-\lambda) + 2g(f-\lambda)^3}{(f-\lambda)^2 g - \alpha_1\gamma h}$$

$$\frac{dh}{d\lambda} = -g\,\frac{h(f-\lambda)(2\gamma f/\lambda - 2 + \alpha_2\gamma g)}{(f-\lambda)^2 g - \alpha_1\gamma h} \tag{1.12}$$

Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (1.12) проводилось численно с граничными условиями (1.11) при $\gamma = 5/3$ для двух случаев: $M = 1.6$ и $M = \sqrt{10}$. Счет начинали от поверхности ударной волны, где $\lambda = 1$, используя метод Рунге — Кутта, а затем метод Милна. Счет прекращали вблизи значе-

*Таблица 1*

| $\lambda\cdot10^2$ | $M = 1.6$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $f\cdot10^4$ | $g$ | $h$ | $e\cdot10^4$ |
| 100 | 4570 | 1.0000 | 1.0000 | 10000 |
| 98 | 4618 | 1.0509 | 1.0326 | 9633 |
| 96 | 4669 | 1.1062 | 1.0670 | 9259 |
| 94 | 4723 | 1.1670 | 1.1034 | 8881 |
| 92 | 4781 | 1.2339 | 1.1420 | 8499 |
| 90 | 4843 | 1.3081 | 1.1827 | 8112 |
| 88 | 4909 | 1.3907 | 1.2259 | 7718 |
| 86 | 4978 | 1.4834 | 1.2715 | 7318 |
| 84 | 5052 | 1.5883 | 1.3198 | 6909 |
| 82 | 5131 | 1.7079 | 1.3708 | 6492 |
| 80 | 5214 | 1.8462 | 1.4247 | 6063 |
| 78 | 5302 | 2.0082 | 1.4816 | 5620 |
| 76 | 5396 | 2.2017 | 1.5417 | 5161 |
| 74 | 5496 | 2.4384 | 1.6049 | 4682 |
| 72 | 5603 | 2.7379 | 1.6712 | 4175 |
| 70 | 5717 | 3.1360 | 1.7404 | 3632 |
| 68 | 5839 | 3.7085 | 1.8122 | 3035 |
| 66 | 5970 | 4.6563 | 1.8855 | 2352 |
| 64 | 6113 | 6.7815 | 1.9576 | 1470 |
| 63 | 6188 | 10.5499 | 1.9903 | 0861 |
| 62.40 | 6235 | 62.2352 | 2.0058 | 0200 |

*Таблица 2*

| $\lambda\cdot10^2$ | $M = \sqrt{10}$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $f\cdot10^4$ | $g$ | $h$ | $e\cdot10^4$ |
| 100 | 6750 | 1.0000 | 1.0000 | 10000 |
| 98 | 6821 | 1.0652 | 1.0198 | 9378 |
| 96 | 6898 | 1.1406 | 1.0405 | 8740 |
| 94 | 6982 | 1.2294 | 1.0622 | 8083 |
| 92 | 7073 | 1.3359 | 1.0848 | 7401 |
| 90 | 7171 | 1.4673 | 1.1082 | 6688 |
| 88 | 7277 | 1.6355 | 1.1320 | 5934 |
| 86 | 7391 | 1.8630 | 1.1562 | 5123 |
| 84 | 7515 | 2.1996 | 1.1801 | 4225 |
| 82 | 7649 | 2.7984 | 1.2031 | 3189 |
| 80 | 7794 | 4.4714 | 1.2237 | 1810 |
| 79 | 7872 | 11.6500 | 1.2316 | 0626 |
| 78.86 | 7883 | 35.7368 | 1.2324 | 0192 |

ния $\lambda = \lambda_0$, при котором $f(\lambda)$ становится равным $\lambda$, так как величина $dg/d\lambda$ становится бесконечной при $\lambda = \lambda_0$. Численные значения $f$, $g$, $h$ и $e$ в зависимости от $\lambda$ даны в табл. 1 для $M = 1.6$ и в табл. 2 для $M = \sqrt{10}$.

**2. Обсуждение результатов.** По данным табл. 1,2 видно, что функции $f$, $g$ и $h$ растут с уменьшением $\lambda$, а при $\lambda \to \lambda_0$ функция $h$ стремится к конечному значению, разному для разных чисел Маха. Видно, что плотность растет быстрее скорости, масса уменьшается быстрее, чем растет число Маха, и стремится к нулю при $\lambda \to \lambda_0$. Отсюда следует, что $\lambda = \lambda_0$ — внутренняя граница возмущенного движения. Видно также, что величина $\lambda_0$ растет с числом Маха.

Сравнение результатов с соответствующими результатами для автомодельного движения ($\omega = 2.5$) при сильном взрыве, исследованном Л. И. Седовым [1], показывает сходство в распределениях плотности, массы и давления, но не скорости.

Полная энергия невозмущенной среды в области, ограниченной поверхностью ударной волны в момент времени $t$, и полная энергия возмущенной среды, ограниченной извне сферической ударной волной радиуса $r_2\,(t)$ и изнутри — сферическим поршнем радиуса $r_*\,(t) = \lambda_0 r_2\,(t)$, даются выражениями

$$E_1 = \int_0^{r_2} \left(\frac{p_1}{\gamma-1} - \frac{G\mu_1\rho_1}{r}\right) 4\pi r^2\,dr = \frac{8\pi^2 A^2 G\,(3-2\gamma)\,r_2\,(t)}{\gamma-1} \tag{2.1}$$

$$E_2 = \int_{r_*}^{r_2} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} - \frac{G\mu\rho}{r}\right) 4\pi r^2\,dr \tag{2.2}$$

Подставляя в (2.2) значения $v$, $p$, $\rho$, $\mu$ и преобразуя к безразмерной переменной $\lambda$, согласно (1.4), имеем

$$E_2 = 4\pi^2 A^2 G r_2 (I_1 + I_2 - I_3) \tag{2.3}$$

$$I_1 = \frac{\alpha_2\gamma^2}{2q^2}\int_{\lambda_0}^{1} f^2 g\lambda^2\,d\lambda, \quad I_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2\gamma^2}{(\gamma-1)q^2}\int_{\lambda_0}^{1} h\lambda^2\,d\lambda$$

$$I_3 = \frac{2\alpha_2\gamma}{q}\int_{\lambda_0}^{1} eg\lambda\,d\lambda$$

Можно показать, что $g\,(\lambda) \sim (f-\lambda)^{-4/9}$ и по (1.9) $e\,(\lambda) \sim (f-\lambda)^{5/9}$ вблизи сферического поршня при $\gamma = 5/3$. Следовательно, два последних интеграла в (2.3) сходятся. Подставляя в первый интеграл (2.3) величину $g\lambda^2$, согласно (1.8), и интегрируя по частям, убеждаемся, что $I_1$ также сходится.

Интегралы в (2.3) вычисляли методом Симпсона при значении $\lambda_0 = 0.6240$ для ударной волны умеренной интенсивности и $\lambda_0 = 0.7886$ для сильной ударной волны. В результате была определена разность энергий

$$E_2 - E_1 = C\cdot 4\pi^2 A^2 G r_2, \qquad C = \begin{cases} 2.88, & M = 1.6 \\ 14.8, & M = \sqrt{10} \end{cases}$$

Скорость изменения разности энергий в обоих случаях равна совершенной сферическим поршнем работе, даваемой формулой

$$W = 4\pi p_* r_*^2 dr_* \,/\, dt = 4\pi p_2 h\,(\lambda_0)\, r_2^2 \lambda_0^3 c_0$$

В заключение отметим следующее. Если рассматриваемое автомодельное движение вызвано выделением энергии в момент времени $t = 0$, то при $\omega = 2$, т. е. для изотермической среды, закон выделения энергии, рассмотренный Л. И. Седовым [1], принимает вид пропорциональной зависимости от времени. Копал [4] численно решил аналогичную задачу для газовой среды, в которой плотность меняется по закону $r^{-\omega}$. Он предполагал, что полная энергия возмущенной среды, ограниченной сферической ударной волной, равна полной энергии невозмущенной среды, ограниченной тем же положением ударной волны в любой момент времени, т. е. пренебрегал энергией взрыва. В результате Копал установил соотношение между числом Маха $M$ и $\omega$; из этого соотношения он сделал вывод, что $M = 1.6$ при $\omega = 2$. Однако при $M = 1.6$, приведенный выше численный расчет показывает, что разность энергий конечна, а не равна нулю, как утверждал Копал.

Поступила 28 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Наука», 1967.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1963.
3. Rogers M. N. Similarity flow behind strong shock waves. Quart. J. Mech & Appl. Math., 1958, vol. 55, p. 411.
4. Kopal Z. The propagation of shock waves in selfgravitating gas spheres. Astrophys. J., 1954, vol. 120, p. 159.