УДК 531.31

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ И НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ СУЩЕСТВОВАНИЯ «ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

Ф. Х. Цельман (Москва)

Движению тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки посвящена большая литература (см., например, обзоры в [1, 2]).

В основе данной работы лежит простое соображение, позволяющее использовать при изучении специфической гамильтоновой системы с тремя степенями свободы — твердого тела, движущегося вокруг неподвижной точки,— методы исследования систем нелинейно-связанных осцилляторов [3–5]. Это соображение состоит в том, что в тех случаях, когда на начальные условия не накладываются ограничения, исключающие малые движения около положения равновесия (а таковы все общие случаи интегрируемости: Эйлера — Пуансо, Лагранжа — Пуассона, Ковалевской, в которых не накладывается никаких ограничений на начальные условия, и большинство известных частных случаев интегрируемости), можно изучить сначала малые колебания около положения равновесия. Затем интегралы задачи о малых колебаниях можно использовать как «ростки» интегралов полной нелинейной задачи для получения интегралов исходной задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Рассмотрим с этой точки зрения вопрос о линейных интегралах [6–9]. Постановка задачи об условиях существования линейных интегралов для уравнений движения тяжелого тела принадлежит Чаплыгину [6]. Исследование [6] было развито в работе [8], и при некоторых ограничениях, широко используемых в работах по динамике твердого тела, вопрос об условиях существования и виде линейных интегралов получил исчерпывающее рассмотрение в [9].

Представляет интерес понять природу по крайней мере некоторых из тех случаев, когда в сложной нелинейной системе уравнений Эйлера — Пуассона возникают простые линейные соотношения между переменными, сохраняющиеся во все время движения. Естественно связать это с каким-то «вырождением» системы уравнений, возникающим при определенных значениях параметров системы (а иногда и определенных начальных условиях).

Известно [10], что если характеристическое уравнение линейной (линеаризованной) системы имеет нулевой корень, то появляется линейный интеграл. Ниже показано, как могут быть получены условия существования и вид линейных интегралов в некоторых известных случаях из того факта, что имеется нулевая «частота» в уравнениях малых колебаний твердого тела возле устойчивого положения равновесия. Отмечаются и другие дополнительные вырождения (резонансные соотношения), имеющие место в некоторых случаях.

Рассматриваемый вопрос тесно связан с вопросом Пуанкаре [11] об условиях существования «четвертого алгебраического интеграла» в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки (см. [1,2]).

Рассмотрим в обычных [1] обозначениях уравнения Эйлера — Пуассона, считая единицы измерений выбранными так, что вес тела равен единице

$$A\frac{dp}{dt} - (B - C)\,qr = y_0\gamma'' - z_0\gamma', \qquad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \qquad \begin{pmatrix} ABC,\ pqr, \\ x_0y_0z_0,\ \gamma\gamma'\gamma'' \end{pmatrix} \tag{1}$$

Пусть

$$y_0 = 0 \tag{2}$$

Тогда устойчивое положение равновесия («подвешенное» состояние), в окрестности которого будем линеаризовать уравнения (1), характеризуется условиями (l — расстояние от точки подвеса до центра тяжести)

$$\gamma_0' = 0, \quad z_0\gamma_0 = x_0\gamma_0'', \quad x_0\gamma_0 + z_0\gamma_0'' = l, \quad (l = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}) \tag{3}$$

Пусть теперь p, q, r — малы, а направляющие косинусы γ, γ', γ'' мало отличаются от значений в положении равновесия, характеризуемых соотношениями (3). Тогда линеаризованные уравнения движения могут быть записаны так:

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \left(\frac{z_0\gamma_0''}{A}\right)p - \left(\frac{z_0\gamma_0}{A}\right)r = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{x_0\gamma_0''}{C}\right)p + \left(\frac{x_0\gamma_0}{C}\right)r = 0, \qquad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{l}{B}q = 0$$

Аналогичные уравнения для γ, γ', γ'' здесь не выписываем.

Из характеристического уравнения получаем для квадратов «частот»

$$\omega_1^2 = \frac{Ax_0^2 + Cz_0^2}{ACl}, \qquad \omega_2^2 = \frac{l}{B}, \qquad \omega_3^2 = 0$$

Система (4) линейной заменой

$$P = \frac{x_0}{C}p + \frac{z_0}{A}r, \qquad R = -z_0p + x_0r, \qquad q = q$$

может быть приведена к виду

$$\frac{d^2R}{dt^2} + \omega_1^2R = 0, \qquad \frac{d^2q}{dt^2} + \omega_2^2q = 0, \qquad \frac{d^2P}{dt^2} = 0 \tag{5}$$

Из решений третьего уравнения системы (5), отвечающего нулевому корню характеристического уравнения (нулевой частоте), следует рассмотреть $dP\,/\,dt = 0$ (постоянная интегрирования равна нулю в силу линейных уравнений, как это нетрудно видеть с помощью уравнений (1)). Имеем для линеаризованных уравнений

$$P = \frac{x_0}{C}p + \frac{z_0}{A}r = \mathrm{const} \tag{6}$$

Рассмотрим производную от P в силу полных нелинейных уравнений (1) (обозначим эту производную через P')

$$P' = \frac{1}{AC}I, \qquad I = q\,[x_0(B - C)\,r + z_0(A - B)\,p] \tag{7}$$

Условия равенства нулю этого выражения представляют собой условия существования линейного интеграла (6) для нелинейных уравнений (1).

Рассмотрим отдельные случаи, когда $P' = 0$, т. е. когда $I = 0$.

Интересно отметить, что выражение $I = 0$ — это частный (при $y_0 = 0$) вид конуса Штауде, образующими которого служат оси перманентных вращений тяжелого твердого тела. Далее, пусть

$$x_0(B - C)\,r + z_0(A - B)\,p = 0 \tag{8}$$

Тогда рассматриваемый интеграл (6) может быть записан так:

$$P = p\,\frac{A(B - C)\,x_0^2 - C(A - B)\,z_0^2}{AC(B - C)\,x_0}$$

Помимо случая $p(t) = \mathrm{const}$, который оставим в стороне, это возможно лишь в случае, когда

$$A(B - C)\,x_0^2 - C(A - B)\,z_0^2 = 0 \tag{9}$$

Таким образом, приходим к соотношению, которое совместно с условием (2) характеризует случай Гесса — Аппельрота (локсодромический маятник). При этом $P = 0$, что легко можно преобразовать к обычному [1, 7] виду частного линейного интеграла в рассматриваемом случае

$$Ax_0p + Cz_0r = 0 \tag{10}$$

Замечание 1. Интересно отметить, что условие (9) может быть переписано так:

$$\frac{Ax_0^2 + Cz_0^2}{ACl} = \frac{l}{B}, \text{ т. е. } \omega_1^2 = \omega_2^2$$

Замечание 2. Условие (8) может быть получено из (9) и (10), т. е. не является независимым.

Вернемся к системе (4), из которой видно, что при $x_0 = 0$ уравнения первого приближения имеют интеграл

$$r = r_0 = \text{const} \tag{11}$$

В силу полных уравнений имеем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{A - B}{dt} pq \tag{12}$$

Поэтому интеграл (11) линейной системы может быть интегралом полной системы в одном из следующих случаев (случаи, когда одновременно выполняются по крайней мере два из условий (13) — (15), здесь не рассматриваем, как весьма частные):

$$A = B \tag{13}$$

$$q(t) = 0 \tag{14}$$

$$p(t) = 0 \tag{15}$$

Соотношение (13) совместно с условиями $x_0 = y_0 = 0$, при которых оно получено, характеризует случай Лагранжа — Пуассона, для которого интеграл (11) был получен Лагранжем.

Замечание 3. При соотношениях случая Лагранжа $\omega_1 = \omega_2$.

Далее, при условии (14) из (12) следует, что $r = r_0$. Поэтому из уравнения (1) для p имеем

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{z_0\gamma'}{A} \tag{16}$$

С другой стороны, из уравнения для q при условии (14) получаем

$$p = \frac{z_0\gamma}{r_0(A - C)}$$

Продифференцировав это равенство в силу (1), получим $dp/dt = z_0\gamma'/(A - C)$.

Сопоставление этого выражения с (16) показывает, что (если отбросить вырожденные случаи, когда $z_0 = 0$ или $\gamma'(t) = 0$) должно выполняться условие $C = 2A$.

Таким образом, приходим к условиям случая Бобылева — Стеклова (в виде, данным Бобылевым), а именно:

$$x_0 = y_0 = 0, \ C = 2A, \ q(t) = 0 \tag{17}$$

когда существует линейный интеграл (11).

Замечание 4. Изучение условия (15) аналогичным образом приводит к тому, что для существования интеграла (11) требуется наряду с условиями $x_0 = y_0 = 0$ выполнение условия $C = 2B$, что отличается от только что рассмотренного случая заменой обозначений.

Если вернуться к (8) и принять $A = B$, то получим $x_0(B - C)r = 0$

Это возможно в следующих случаях:

а) $x_0 = 0$ (вновь приходим к условиям случая Лагранжа — Пуассона);

б) $B = C$ (случай сферической симметрии; при этом имеет место интеграл $P_1 = x_0p + z_0r = \text{const}$);

в) $r(t) = 0$ (анализ этого условия ведет к одному из случаев перманентного вращения).

Таким образом, при изучении уравнений линейного приближения найдены линейные интегралы, которые при определенных условиях оказываются интегралами полной нелинейной системы уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. На этом пути в данной работе были получены условия существования и вид линейных интегралов в случаях Лагранжа — Пуассона и кинетической симметрии тела, а также частных линейных интегралов в случаях Гесса — Аппельрота и Бобылева — Стеклова.

Автор благодарит В. В. Румянцева, Л. М. Мархашова и Л. Г. Хазина за постоянное внимание и полезные обсуждения.

Поступила 15 V 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. М., Гостехиздат, 1953.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки. В сб.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1940.
3. Хазин Л. Г., Цельман Ф. Х. О нелинейном взаимодействии резонирующих осцилляторов. Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 2.
4. Цельман Ф. Х. О «перекачке энергии» между нелинейно-связанными осцилляторами в случае резонанса третьего порядка. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
5. Цельман Ф. Х. О «резонансе» в задаче о малых колебаниях сферического маятника. Докл. АН СССР, 1972. т. 203, № 2.
6. Чаплыгин С. А. Линейные частные интегралы задачи о движении твердого тела, подпертого в одной точке. Тр. Отд. физ. наук об-ва любителей естествознания, 1898, т. 10, вып. 1 (см. также собр. соч., т. 1, М., Гостехиздат, 1948).
7. Богоявленский А. А. О частных случаях движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1959, т. 22, вып. 5.
8. Харламов П. В. О линейных интегралах уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Докл. АН СССР, 1962, т. 143, № 4.
9. Харламова Е. И. О линейном инвариантном соотношении уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку. В сб.: Механика твердого тела, 1, Киев, «Наукова думка», 1969.
10. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 3. М., «Наука», 1965.
11. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Собр. соч., т. 1, Изд-во АН СССР, 1971.

УДК 534. 222.2

РЕГУЛЯРНОЕ ОТРАЖЕНИЕ КОСОГО СКАЧКА В ПЛОСКОМ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНО ДИССОЦИИРУЮЩЕГО ГАЗА ПРИ НАЛИЧИИ ПОПЕРЕЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Р. Рам, В. Д. Шарма

(Индия)

Рассматривается косое регулярное отражение плоской ударной волны от твердой стенки в установившемся потоке совершенного идеально диссоциирующего газа с бесконечной электропроводностью при наличии магнитного поля, нормального плоскости течения. Исследуется течение за отраженной ударной волной в окрестности тройной точки — точки, где кривизна ударной волны становится отличной от нуля. В предположении, что в тройной точке имеет место разрыв первого порядка, получено выражение для скачка производных от параметров течения на линии тока, выходящей из этой точки, а также для скачков плотности тока и вихря.

Впервые свойства течения в тройной точке, как особой точке на отраженном скачке, рассматривались в работе [1]; краткие выводы из теоретических работ на эту тему даны в [2]. В работах [3, 4] представлены экспериментальные данные об углах ударной волны в тройной точке. Дано сравнение теоретических и экспериментальных резуль-