Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.4

ЭЛЛИПСОИДАЛЬНАЯ ТРЕЩИНА И ИГЛА В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

И. А. Кунин, Г. Н. Миренкова, Э. Г. Соснина

(Новосибирск)

Рассматриваются эллипсоидальные игла и трещина (малой, но конечной толщины) в анизотропной упругой среде и однородном внешнем поле. Получены и исследованы явные выражения для напряжений на их поверхности. Показано, что при уменьшении толщины иглы напряжения при любой нагрузке стремятся к конечному пределу, т. е. не содержат сингулярности, а для эллипсоидальной трещины сингулярность возникает, если внешнее поле содержит составляющую, нормальную к плоскости трещины. При растяжении максимум напряжений всегда достигается на кромке трещины, а при чистом сдвиге, как правило,— в ее малой окрестности. В последнем случае имеется острый пик напряжений, причем на самой кромке все компоненты тензора напряжений могут обращаться в нуль. Это указывает на необходимость исследования напряжений на всей поверхности трещины, а не только в ее характерных точках.

Под эллипсоидальной трещиной (иглой) будем понимать эллипсоидальную полость, у которой один размер мал (велик) по сравнению с двумя другими. Это позволяет при вычислении напряжений на поверхности полости ограничиться главным членом разложения по соответствующему малому, но конечному параметру. Предельный случай, когда параметр стремится к нулю, соответствует эллиптической трещине. В этом случае имеют смысл лишь напряжения в окрестности трещины либо предельные значения несингулярных компонент тензора напряжений на самой трещине.

В большинстве работ (см., например [1], где имеются другие ссылки) рассматривались именно эллиптические трещины. Результаты для эллипсоидальной трещины в изотропной среде можно получить предельным переходом из известных решений для эллипсоидальной полости, построенных в работах [2-4], что было проделано в [5, 6]. Однако компоненты тензора напряжений рассматривались не на всей поверхности трещины, а лишь на ее кромке. Напряжения в вершинах сфероидальной трещины и иглы в трансверсально изотропной среде получены в [7] для внешних полей, при которых не возникает сингулярностей.

В отличие от указанных работ здесь рассматривается произвольная анизотропная среда и исследуется полное напряженное состояние на всей поверхности эллипсоидальной трещины и иглы. Такое исследование оказывается существенным, так как в некоторых случаях вблизи кромки трещины имеет место резкий всплеск напряжений, хотя на самой кромке они равны нулю.

В работе используется общее решение задачи о концентрации напряжений на поверхности эллипсоидальной полости в анизотропной среде, полученное в [8]. В п. 1 приведены некоторые необходимые для дальнейшего формулы из [8] и вводятся параметры, удобные для предельных переходов. В пп. 2 и 3 получены выражения для напряжений на поверхности эллипсоидальной иглы и трещины. В пп. 4 и 5 дается полное исследование концентрации напряжений на поверхности эллипсоидальной трещины в изотропной, а также в ортотропной среде для всех случаев внешнего однородного поля.

1. Напряжения $\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ на поверхности эллипсоидальной полости в однородном внешнем поле $\sigma_0^{\lambda\mu}$ имеют вид [8]

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = F^{\alpha\beta}{}_{\cdot\cdot\lambda\mu}(\mathbf{n})\,\sigma_0^{\lambda\mu} \tag{1.1}$$

Здесь F (n) — тензорный коэффициент концентрации напряжений, зависящий от нормали n к поверхности эллипсоида

$$\mathbf{x}a^{-2}\mathbf{x} = x^\alpha (a^{-2})_{\alpha\beta} x^\beta = 1, \qquad a^{\alpha\beta} = a^\alpha \delta^{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

с полуосями a^α ($\alpha = 1, 2, 3$).

Связь координаты x^α точки эллипсоида с нормалью n_β дается соотношениями

$$\mathbf{x} = \frac{a^2\mathbf{n}}{\sqrt{\mathbf{n}a^2\mathbf{n}}}, \qquad \mathbf{n} = \frac{a^{-2}\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}a^{-4}\mathbf{x}}} \tag{1.3}$$

Коэффициент концентрации F (n) представим в виде произведения двух сомножителей

$$F^{\alpha\beta}{}_{\cdot\cdot\lambda\mu}(\mathbf{n}) = B^{\alpha\beta\sigma\tau}(\mathbf{n})\,(B_0^{-1})_{\sigma\tau\lambda\mu} \tag{1.4}$$

первый из которых B (n) явно зависит лишь от тензора упругих констант среды c_0, а от параметров эллипсоида a^α зависит неявно — через нормаль n. В предельных случаях иглы и трещины B (n) не изменяются, и, следовательно, не имеют сингулярности. В частности, для изотропной среды с модулем сдвига μ_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 ($\varkappa_0 = 2\mu_0 / 1 - \nu_0$)

$$B^{\alpha\beta\sigma\tau}(\mathbf{n}) = \varkappa_0 \Big[\nu_0 (\delta^{\alpha\beta}\delta^{\sigma\tau} - n^\alpha n^\beta \delta^{\sigma\tau} - n^\sigma n^\tau \delta^{\alpha\beta}) + \frac{1-\nu_0}{2} (\delta^{\alpha\sigma}\delta^{\beta\tau} + \delta^{\alpha\tau}\delta^{\beta\sigma} - \\ - n^\alpha n^\sigma \delta^{\beta\tau} - n^\alpha n^\tau \delta^{\beta\sigma} - n^\beta n^\sigma \delta^{\alpha\tau} - n^\beta n^\tau \delta^{\alpha\sigma}) + n^\alpha n^\beta n^\sigma n^\tau \Big] \tag{1.5}$$

где $\delta^{\alpha\beta}$ — символ Кронекера.

Второй сомножитель в (1.4) — постоянный тензор, обратный тензору

$$B_0^{\sigma\tau\lambda\mu} = \frac{|\det a|}{4\pi} \int B^{\sigma\tau\lambda\mu}(\mathbf{n}) \frac{d\mathbf{n}}{(\mathbf{n}a^2\mathbf{n})^{3/2}} \tag{1.6}$$

зависит от параметров эллипсоида (1.2) и, как будет показано, становится сингулярным для трещины.

Для предельных переходов удобно ввести безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1}, \qquad \varepsilon = \frac{a_3}{a_1}, \qquad \xi = \frac{a_3}{a_2} \qquad (a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_1) \tag{1.7}$$

Случай $\alpha \ll 1$, $\xi \sim 1$ соответствует игле, $\xi \ll 1$, $\alpha \sim 1$ — трещине, $\varepsilon \ll \alpha \ll 1$ — узкой трещине. Отметим, что во всех случаях $\varepsilon = \xi\alpha \ll 1$.

Таким образом, решение задачи о концентрации напряжений на игле и трещине сводится к вычислению главных членов разложения тензора B_0^{-1} по соответствующему малому параметру. Проведем сначала это вычисление для иглы.

2. Перейдем в (1.6) к сферическим координатам φ, θ с полярной осью, направленной по оси иглы, т. е. по x^1. Произведем замену $\cos\theta = t$ и положим

$$\alpha_1 = \alpha\sqrt{\cos^2\varphi + \xi^2 \sin^2\varphi}, \qquad B(\varphi,\ t) = B(\mathbf{n}(\varphi,\ t)) \tag{2.1}$$

Без ограничения общности можно считать, что B (φ, t) — четная функция t (только эта составляющая дает вклад в интеграл (1.6)).

Имеем

$$B_0 = \frac{\xi}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+\xi^2\sin^2\varphi}\int_{-1}^{1}B(\varphi, t)f_1(t, \alpha_1)\,dt$$

$$f_1(t, \alpha_1) = \frac{\alpha_1^2}{2\left[\alpha_1^2+(1-\alpha_1^2)t^2\right]^{3/2}}$$

Для иглы $\alpha\to 0$, $\xi\sim 1$ и $f_1(t, \alpha_1)\to\delta(t)$. Следовательно, главный член разложения B_0 по α имеет вид

$$B_{00} = \frac{\xi}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{B(\varphi, 0)}{\cos^2\varphi+\xi^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{2.2}$$

Итак, для произвольной анизотропной среды задача сведена к вычислению однократного интеграла. Если тензор B_{00} имеет обратный ($\det B_{00}\neq 0$), то коэффициент концентрации стремится к постоянному значению при $\alpha\to 0$, т. е. не имеет сингулярности.

Вычисления показывают, что $\det B_{00}\neq 0$, если симметрия среды не ниже ромбической (ортотропная, гексагональная, кубическая и др. [1]). По-видимому, это справедливо и для произвольной анизотропии.

Тензор упругих констант указанных сред имеет девять отличных от нуля компонент, которые согласно обычному правилу обозначим

$$c_0^{\alpha\alpha\beta\beta} = c_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

$$c_0^{2323} = c_{44},\ c_0^{1313} = c_{55}, \qquad c_0^{1212} = c_{66}$$

Для ортотропной среды все девять компонент существенны, для трансверсально изотропной среды существенны только пять компонент

$$c_{11} = c_{22},\ c_{12},\ c_{13} = c_{23},\ c_{33},\ c_{44} = c_{55},\ c_{66} = {}^1/_2\,(c_{11}-c_{12})$$

для кубической симметрии — три константы

$$c_{11} = c_{22} = c_{33},\ c_{12} = c_{13} = c_{23},\ c_{44} = c_{55} = c_{66}$$

и, наконец, для изотропной среды

$$c_{12} = \lambda_0,\ c_{44} = {}^1/_2\,(c_{11}-c_{12}) = \mu_0,\ c_{11} = \lambda_0+2\mu_0$$

Во всех этих случаях тензор B_{00}^{-1} находится в явном виде. Для его вычисления необходимо в тензоре $B(\mathbf{n})$ из [8] положить $n_1 = 0$, подставить полученное выражение в (2.2), проинтегрировать и обратить тензор B_{00}. Однако для компонент B_{00}^{-1} с индексами ($\alpha\alpha\beta\beta$), соответствующими растяжению по осям, выражения получаются громоздкими из-за необходимости обращать матрицу третьего порядка. Поэтому здесь приводятся лишь отличные от нуля сдвиговые компоненты

$$(B_{00}^{-1})_{1212} = \frac{\sqrt{c_{55}}+\xi\sqrt{c_{66}}}{c_{66}\sqrt{c_{55}}}, \qquad (B_{00}^{-1})_{1313} = \frac{\sqrt{c_{55}}+\xi\sqrt{c_{66}}}{\xi c_{55}\sqrt{c_{66}}}$$

[1] Здесь и ниже предполагается, что оси симметрии среды совпадают с осями эллипсоида.

$$(B_{00}^{-1})_{2323} = \frac{c_{33}}{c_{22}c_{33} - c_{23}^2} \frac{1}{\xi (\xi A_1 \sqrt{u_1 u_2} + B_1 \sqrt{|u_2|} + C_1 \sqrt{|u_1|})} \tag{2.3}$$

$$A_1 = -\frac{1}{(1 + u_1\xi^2)(1 + u_2\xi^2)}, \quad B_1 = -\frac{u_1}{(1 + u_1\xi^2)(u_2 - u_1)}$$

$$C_1 = -\frac{u_2}{(1 + u_2\xi^2)(u_1 - u_2)}$$

Здесь u_1 и u_2 — корни квадратного уравнения

$$c_{33}c_{44}u^2 + (c_{22}c_{33} - 2c_{23}c_{44} - c_{23}^2)\, u + c_{22}c_{44} = 0$$

В изотропном случае расчеты существенно упрощаются. Учитывая (1.5), находим отличные от нуля компоненты B_{00}^{-1} ($\eta_0 = [2\,\mu_0\,(1 + \nu_0)]^{-1}$)

$$(B_{00}^{-1})_{1111} = \eta_0, \qquad (B_{00}^{-1})_{1122} = (B_{00}^{-1})_{1133} = -\nu_0\eta_0$$

$$(B_{00}^{-1})_{2233} = -\eta_0(1 - 2\nu_0^2), \qquad (B_{00}^{-1})_{2222} = \eta_0\,[1 + 2(1 - \nu_0^2)\,\xi]$$

$$(B_{00}^{-1})_{3333} = \eta_0\left[1 + \frac{2(1 - \nu^2)}{\xi}\right], \qquad (B_{00}^{-1})_{1212} = \frac{1 + \xi}{4\mu_0} \tag{2.4}$$

$$(B_{00}^{-1})_{1313} = \frac{1}{4\mu_0}\left(1 + \frac{1}{\xi}\right), \qquad (B_{00}^{-1})_{2323} = \frac{1}{2\varkappa_0}\,\frac{(1 + \xi)^2}{\xi}$$

Подстановка B_{00}^{-1} в (1.4) позволяет, согласно (1.1), найти напряжения σ (n) на поверхности иглы для произвольного внешнего поля σ_0. Отметим, что значения σ (n) совпадают с полученными в [7] для характерных точек иглы.

Выражения (2.3) и (2.4) делают очевидным механизм возникновения сингулярности при переходе от иглы к узкой трещине, т. е. при $\xi \to 0$: сингулярность порядка ξ^{-1} возникает лишь при внешних напряжениях σ_0, содержащих компоненты с индексом 3.

3. Рассмотрим произвольную трещину $\xi \ll 1$, $\alpha \sim 1$. Аналогично случаю иглы перейдем в (1.6) к сферическим координатам φ, θ, но с полярной осью, направленной по x^3. Полагая

$$\xi_1 = \frac{\xi\alpha}{\sqrt{\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi}}, \qquad t = \cos\theta \tag{3.1}$$

и сохраняя определение (2.1) для B (φ, t), находим

$$B_0 = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi} \int_{-1}^{1} B(\varphi, t)\, f_2(t, \xi_1)\, dt$$

$$f_2(t, \xi_1) = \frac{\xi_1}{2\,[1 - (1 - \alpha^2\xi_1^2)\, t^2]^{3/2}} \tag{3.2}$$

Разложение B_0 как функции ξ запишем в виде

$$B_0 = B_{00} + \xi B_{01} + O(\xi^2) \tag{3.3}$$

В отличие от случая иглы для вычисления главного члена разложения B_0^{-1} по ξ в B_0 необходимо удержать два первых члена, так как тензор B_{00} в (3.3) не имеет обратного, т. е. $\det B_{00} = 0$. Это проверяется несложными вычислениями, если симметрия среды не ниже ромбической. Чтобы показать, что $\det B_{00} = 0$, достаточно убедиться, что все компоненты тензора

B_{00}, содержащие индекс 3, равны нулю. Действительно, как будет показано ниже, в интеграл для B_{00} входит тензор B (φ, 1), который соответствует B (n) при $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = 1$. Но из общего выражения для B (n), приведенного в [8], следует, что в случае ромбической структуры соответствующие компоненты B (n), содержащие индекс 3, равны нулю при $n_1 = n_2 = 0$. Следует ожидать, что это справедливо и при произвольной анизотропии.

Для вычисления B_{00} и B_{01}, будем рассматривать $f_2(t, \xi_1)$ как обобщенную функцию на отрезке $|t| \leqslant 1$ с отождествленными точками ± 1, т. е. на окружности. Это возможно в силу четности и непрерывности $B(\varphi, t)$. Можно проверить, что при $\xi_1 \to 0$

$$f_2(t, \xi_1) = \delta(t \pm 1) + \frac{\xi_1}{2(1-t^2)^{3/2}} + O(\xi_1^2)$$

Подстановка в (3.2) дает

$$B_{00} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{B(\varphi, \pm 1)}{\cos^2\varphi + \alpha^2 \sin^2\varphi} d\varphi \tag{3.4}$$

$$B_{01} = \frac{\alpha^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\cos^2\varphi + \alpha^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \int_{-1}^{1} \frac{B(\varphi, t) - B(\varphi, \pm 1)}{(1-t^2)^{3/2}} dt$$

причем последний интеграл записан в регуляризованной форме.

Отметим, что полученные выражения существенно упрощаются для круговой ($\alpha = 1$) и узкой ($\alpha \ll 1$) трещины.

В изотропном случае интегралы (3.4) легко вычисляются и обращение тензора (3.3) позволяет получить явные выражения для компонент главного члена разложения B_0^{-1}

$$(B_0^{-1})_{1313} = \frac{1}{2\varkappa_0} \frac{1-\alpha^2}{(1-\nu_0-\alpha^2) E(\sqrt{1-\alpha^2}) + \alpha^2\nu_0 K(\sqrt{1-\alpha^2})} \frac{1}{\xi}$$

$$(B_0^{-1})_{2323} = \frac{1}{2\varkappa_0} \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha^2-\nu_0\alpha^2) E(\sqrt{1-\alpha^2}) - \nu_0\alpha^2 K(\sqrt{1-\alpha^2})} \frac{1}{\xi}$$

$$(B_0^{-1})_{3333} = \frac{2}{\varkappa_0} \frac{1}{E(\sqrt{1-\alpha^2})} \frac{1}{\xi} \tag{3.5}$$

Здесь $K(\alpha)$ и $E(\alpha)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода. Остальные компоненты с точностью $O(1)$ можно считать равными нулю. Отсюда следует, что вклад в сингулярные напряжения σ (n) на поверхности трещины дают лишь компоненты внешнего поля σ_0 с индексом 3. Это согласуется с результатами [5, 6].

При переходе к узкой трещине $\alpha \to 0$ и

$$(B_0^{-1})_{1313} = \frac{1}{4\mu_0}, \qquad (B_0^{-1})_{2323} = \frac{1}{2\varkappa_0} \frac{1}{\xi} \tag{3.6}$$

$$(B_0^{-1})_{3333} = \frac{2}{\varkappa_0} \frac{1}{\xi}$$

что совпадает с (2.4) при $\xi \to 0$.

В случае ромбической симметрии среды тензор B_0^{-1} имеет аналогичную структуру, и его компоненты выражаются в общем случае через эллиптические интегралы. Для узкой трещины они значительно упрощаются и имеют вид

$$(B_0^{-1})_{1313} = \frac{1}{4\sqrt{c_{55}c_{66}}}\frac{1}{\xi}, \qquad (B_0^{-1})_{2323} = \frac{c_{33}}{4(c_{22}c_{33} - c_{23}^2)}\frac{\sqrt{|u_1|} + \sqrt{|u_2|}}{\xi}$$

$$(B_0^{-1})_{3333} = \frac{\sqrt{c_{22}c_{33}}}{c_{22}c_{33} - c_{23}^2}\frac{\sqrt{|u_1|} + \sqrt{|u_2|}}{\xi} \tag{3.7}$$

что, очевидно, в частном случае изотропной среды совпадает с (3.6)

Подчеркнем, что представляющий самостоятельный интерес случай узкой трещины не только делает очевидным механизм изменения концентрации напряжений при переходе от иглы к трещине, но и позволяет осуществить переход к плоской задаче, если рассмотреть среднее сечение трещины.

4. Перейдем к непосредственному исследованию напряжений на поверхности трещины. Начнем с чистого растяжения. Так как компоненты σ_0^{11} и σ_0^{22}, согласно (3.5) — (3.7), не дают вклада в сингулярность, рассмотрим лишь растяжение σ_0^{33} по оси x^3, нормальной к трещине

Из (1.1), (1.4) и (3.5) — (3.7) находим

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = B^{\alpha\beta 33}(\mathbf{n})(B_0^{-1})_{3333}\sigma_0^{33} \tag{4.1}$$

Исследование $\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n})$ удобно проводить в локальной системе координат $x^{\alpha'}$, связанной в каждой точке поверхности эллипсоидальной трещины с нормалью $\mathbf{n}$. В качестве локального базиса выберем

$$\mathbf{e}_{3'} = \mathbf{n}, \qquad \mathbf{e}_{1'} = \mathbf{n}^\circ \times \mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{e}_{2'} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n}^\circ \times \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}(n_1\mathbf{e}^1 + n_2\mathbf{e}^2)$$

Здесь $\mathbf{e}_\alpha$ — орты системы координат, связанной с осями эллипсоида, а вектор $\mathbf{n}^\circ$ — нормаль к кромке трещины в точке $(n_1, n_2, 0)$. Видно, что для представляющих основной интерес точек поверхности, близких к кромке, оси $x^{1'}$ и $x^{2'}$ соответственно параллельны и нормальны кромке.

В локальных осях тензор $\sigma^{\alpha'\beta'}(\mathbf{n})$ будет плоским, так как все компоненты с индексом 3 равны нулю. Это следует из условий равновесия.

Рассмотрим сначала изотропный случай. Переходя в (4.1) к локальным координатам и учитывая (1.5), (3.5) и (3.6), находим

$$\sigma^{1'1'}(\mathbf{n}) = \nu_0\sigma_{\max}(1 - n_3^2), \qquad \sigma^{2'2'}(\mathbf{n}) = \sigma_{\max}(1 - n_3^2), \qquad \sigma^{1'2'}(\mathbf{n}) = 0 \tag{4.2}$$

Здесь для конечной и узкой трещины соответственно

$$\sigma_{\max} = \frac{2}{E(\sqrt{1-\alpha^2})}\frac{1}{\xi}\sigma_0^{33}, \qquad \sigma_{\max} = \frac{2}{\xi}\sigma_0^{33} \tag{4.3}$$

Таким образом, при заданной нагрузке выбранная система координат с принятой точностью совпадает с главными осями тензора $\sigma(\mathbf{n})$. Так как главные напряжения $\sigma_1 = \sigma^{1'1'}$ и $\sigma_2 = \sigma^{2'2'}$ одного знака, то максимальное касательное напряжение $\tau_{\max} = {}^1/_2\,|\sigma_2|$.

Из (4.2) видно, что при растяжении наибольшее значение напряжений в любом сечении, нормальном кромке, достигается при $n_3 = 0$, т. е. на самой кромке.

Вычисления в анизотропном случае аналогичны, но более громоздки. Приведем окончательные выражения для напряжений $\sigma(\mathbf{n})$ на поверхности узкой трещины в ортотропной среде и сечениях $n_1 = 0$ и $n_2 = 0$. В выбранном локальном базисе, который в данном случае совпадает с главными осями тензора $\sigma(\mathbf{n})$, для сечения $n_2 = 0$ имеем

$$\sigma_1(\mathbf{n}) = \Delta^{-1} c_{55}\, [c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13})n_1^2 + \\ + (c_{12}\, c_{33} - c_{13}\, c_{23})\, n_3^2]n_1^2\, (B_0^{-1})_{3333}\, \sigma_0^{33} \tag{4.4}$$

$$\sigma_2(\mathbf{n}) = \Delta^{-1}\, c_{55}\, (c_{11}c_{33} - c_{13}^2)n_1^2\, (B_0^{-1})_{3333}\, \sigma_0^{33}$$

$$\Delta = c_{11}\, c_{55}\, n_1^4 + (c_{11}\, c_{33} - 2c_{13}c_{55} - c_{13}^2)\, n_1^2 n_3^2 + c_{33}c_{55}n_3^4 \tag{4.5}$$

Здесь $(B_0^{-1})_{3333}$ дается выражением (3.7).

Напряжения в сечении $n_1 = 0$ получаются заменой в правых частях индексов 1 на 2 и 5 на 4.

5. Рассмотрим чистый сдвиг. Компонента σ_0^{12} не дает вклада в сингулярность, а картины для σ_0^{13} и σ_0^{23} аналогичны. Поэтому предположим, что внешнее поле совпадает с σ_0^{13}.

В изотропном случае из (1.1), (1.4) и (3.5) находим

$$\sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{n}) = 4B^{\alpha\beta 13}(\mathbf{n})\, (B_0^{-1})_{1313}\, \sigma_0^{13} \tag{5.1}$$

Если во введенной выше локальной системе координат осуществить поворот вокруг нормали $\mathbf{n}$, т. е. оси $x^{3'}$, на угол

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2}\, \mathrm{arctg}\, \frac{n_2}{n_1 n_3}$$

то новые оси будут главными для $\sigma^{\alpha'\beta'}(\mathbf{n})$. Для главных напряжений находим

$$\sigma_1(\mathbf{n}) = \sigma^{1'1'}(\mathbf{n}) = \sigma_{\max}\, \{(1-\nu_0)\sqrt{(1-n_1^2)(1-n_3^2)} - (1+\nu_0)\, n_1 n_3\} \tag{5.2}$$

$$\sigma_2(\mathbf{n}) = \sigma^{2'2'}(\mathbf{n}) = -\sigma_{\max}\, \{(1-\nu_0)\sqrt{(1-n_1^2)(1-n_3^2)} + (1+\nu_0)\, n_1 n_3\}$$

Здесь для конечной и для узкой трещины соответственно

$$\sigma_{\max} = \frac{1-\alpha^2}{(1-\nu_0-\alpha^2)\, E\,(\sqrt{1-\alpha^2}) + \nu_0\alpha^2 K\,(\sqrt{1-\alpha^2})}\, \frac{1}{\xi}\, \sigma_0^{13}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{1-\nu_0}\, \frac{1}{\xi}\, \sigma_0^{13} \tag{5.3}$$

Наибольшее абсолютное значение главных напряжений σ_1 и σ_2, равное $\sigma_{\max}$, достигается в сечении $n_2 = 0$ в точках

$$n^* = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad n^* = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\, 0,\, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

которые являются точками максимумов (или минимумов) функций $\sigma_1(\mathbf{n})$ и $\sigma_2(\mathbf{n})$. На кромке в этом сечении σ_1 и σ_2 обращаются в нуль. Существенно, что точка максимума расположена на весьма малом расстоянии от кромки трещины, которое согласно (1.3) и (5.2), равно

$$\Delta x^1 = \frac{a_1}{2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

Можно также показать, что характерная ширина пика имеет порядок ε.

При изменении сечения от $n_2 = 0$ до $n_1 = 0$ величина пика уменьшается, а точка максимума приближается к кромке и совпадает с ней при $n_1 = 0$.

Для сечений, в которых σ_1 и σ_2 одного знака, характер изменения $\tau_{\max}$ очевиден. В частности, в сечении $n_2 = 0$ величина $\tau_{\max}$ имеет резкий пик высоты $\sigma_{\max} / 2$ в точке n^* и обращается в нуль на кромке. При разных знаках σ_1 и σ_2

$$\tau_{\max} = (1 - \nu_0)\,\sigma_{\max}\sqrt{(1 - n_1^2)(1 - n_3^2)}$$

Эта величина достигает наибольшего значения, равного $(1 - \nu_0)\,\sigma_{\max}$, на кромке в сечении $n_1 = 0$.

Таким образом, при сдвиге имеет место любопытный эффект всплеска напряжений, без учета которого при численных расчетах можно получить качественно неправильные результаты о концентрации напряжений на трещине. Это указывает на необходимость исследования напряжений не только в характерных точках контура трещины, но и на всей ее поверхности.

Аналогичный эффект имеет место в анизотропной среде. Главные напряжения на поверхности узкой трещины в ортотропной среде в сечении $n_2 = 0$ равны

$$\sigma_1(\mathbf{n}) = -4\Delta^{-1} c_{55}\left[(c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13})\, n_1^2 + (c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23})\, n_3^2\right] n_1 n_3 \left(B_0^{-1}\right)_{1313} \sigma_0^{13}$$

$$\sigma_2(\mathbf{n}) = -4\Delta^{-1} c_{55}\,(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)\, n_1 n_3 \left(B_0^{-1}\right)_{1313} \sigma_0^{13}$$

Здесь Δ и $(B_0^{-1})_{1313}$ задаются соответственно выражениями (4.5) и (3.7).

В сечении $n_1 = 0$

$$\sigma_1(\mathbf{n}) = -\sigma_2(\mathbf{n}) = 4\,\frac{c_{55}c_{66}n_2}{c_{66}n_2^2 + c_{55}n_3^2}\,(B_0^{-1})_{1313}\,\sigma_0^{13}$$

Очевидно, как и в изотропном случае, в сечении $n_2 = 0$ имеет место эффект всплеска.

Поступила 26 IV 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Willis J. R. The stress field around elliptical crack in an anisotropic elastic medium. Jnternat. J. Engng. Sci., 1968, vol. 6, No. 5.
2. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
3. Sadowsky M., Sternberg E. Stress concentration around a triaxial ellipsoidal cavity. J. Appl. Mech., 1949, vol. 6, No. 2.
4. Лурье А. И. Напряженное состояние вокруг эллипсоидальной полости. Докл. АН СССР, 1952, т. 87, № 5.
5. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
6. Подильчук Ю. Н. Плоская эллиптическая трещина в произвольном однородном поле напряжений. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 8.
7. Александров А. Я., Вольперт В. С. Некоторые задачи о концентрации напряжений около эллипсоидальной полости в трансверсально изотропном теле. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 1.
8. Кунин И. А., Соснина Э. Г. Концентрация напряжений на эллипсоидальной неоднородности в анизотропной упругой среде. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.