

ОБ ИЗГИБЕ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА ЖЕСТКИМИ ОБОЙМАМИ

С. И. Литовченко, Б. М. Нуллер

(Ленинград)

Построена система кусочно-однородных решений неосесимметричной задачи теории упругости для бесконечного цилиндра, одна часть поверхности которого свободна от напряжений, а другая находится в условиях скользящей заделки; в частности, получено точное решение задачи изгиба моментом и силой бесконечного цилиндра, вложенного без трения в полубесконечную абсолютно жесткую цилиндрическую обойму. Система используется для решения четырех периодических задач изгиба цилиндра конечными обоймами, а также для рассмотрения тех предельных случаев, в которых длины соседних обойм или расстояния между ними бесконечно велики. Все эти задачи сведены к решению нормальных систем Пуанкаре — Коха.

В приложениях наиболее важны те неосесимметричные контактные задачи для упругого цилиндра, в которых внутренние границы обойм представляют собой поверхности вращения и цилиндр изгибается только вследствие поворота и взаимного смещения обойм (например, подшипников) или из-за собственного веса. В цилиндрических координатах z, r, φ упругие перемещения распадаются тогда на осесимметричные [1] и пропорциональные $\cos \varphi$. Последний случай изучается в данной работе.

1. Рассмотрим два особых элемента системы кусочно-однородных решений, удовлетворяющих на границе $r = 1$ условиям

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0, \quad -\infty < z < \infty \quad (1.1)$$

$$u = 0, \quad z \geq 0 \quad (1.2)$$

$$\sigma_r = 0, \quad z < 0 \quad (1.3)$$

$$\sigma_r = O(z^\alpha), \quad z \rightarrow +0, \quad \alpha > -1 \quad (1.4)$$

и определяющих изгиб цилиндра моментом и поперечной силой. Заметим, что строить их по аналогии с подобным элементом осесимметричной задачи [1] нельзя. Соответствующие решения в окрестности линии раздела будут иметь неограниченную энергию напряжений, а именно, вопреки условию (1.4) $\sigma_r = O(z^{-5/2})$ при $r = 1, z \rightarrow +0$.

Запишем решение в форме Папковича—Нейбера

$$\begin{aligned} u_1 &= u \cos^{-1} \varphi = 4(1-\nu) B_r - \partial / \partial r (r B_r + B_0) \\ u_2 &= w \cos^{-1} \varphi = -\partial / \partial z (r B_r + B_0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} u_3 &= v \sin^{-1} \varphi = 4(1-\nu) B_\varphi - \partial / \partial \varphi (B_r + r^{-1} B_0) \\ \Delta B_r - 2r^{-2} B_\varphi - r^{-2} B_r &= 0, \quad \Delta B_\varphi - 2r^{-2} B_r - r^{-2} B_\varphi = 0 \\ \Delta B_0 &= 0, \quad \Delta = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r - r^{-2} + \partial^2 / \partial z^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

и подвергнем соотношения (1.6) двустороннему преобразованию Лапласа. Вычислив по формулам обращения функции B_r, B_φ и B_0 , подставим их в

(1.5). В силу (1.1) получим

$$u_x(z, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_L C(p) f_x(p, r) e^{pz} dp \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} f_1(p, r) &= [J_1'(pr) - 4(1-\nu)p^{-1}r^{-1}J_1(pr)]\Delta_1(p) - \\ &- [4(1-\nu)J_1'(pr) + (pr - p^{-1}r^{-1})J_1(pr)]\Delta_2(p) - pJ_1'(pr)\Delta_3(p) \\ f_2(p, r) &= J_1(pr)\Delta_1(p) + prJ_1'(pr)\Delta_2(p) - pJ_1(pr)\Delta_3(p) \\ f_3(p, r) &= [4(1-\nu)p^{-1}r^{-1}J_1(pr) - J_1'(pr)]\Delta_2(p) + \\ &+ [4(1-\nu)J_1'(pr) - p^{-1}r^{-1}J_1(pr)]\Delta_1(p) + r^{-1}J_1(pr)\Delta_3(p) \\ f_4(p, r) &= 2G \{ [pJ_1'(pr) - 2(1-\nu)r^{-1}J_1(pr)]\Delta_1(p) + \\ &+ [(r^{-1} - p^2r)J_1(pr) - 2(1-\nu)pJ_1'(pr)]\Delta_2(p) - p^2J_1'(pr)\Delta_3(p) \} \\ f_5(p, r) &= 2G \{ pJ_1(p, r)\Delta_1(p) + [p^2rJ_1'(pr) + 2\nu pJ_1(pr)]\Delta_2(p) - \\ &- p^2J_1(pr)\Delta_3(p) \} \\ f_6(p, r) &= 2G \{ [2(1-\nu)pJ_1'(pr) - r^{-1}J_1(pr)]\Delta_1(p) + \\ &+ [2(1-\nu)r^{-1}J_1(pr) - pJ_1'(pr)]\Delta_2(p) + pr^{-1}J_1(pr)\Delta_3(p) \} \\ f_7(p, r) &= 2G \{ [(5-4\nu)p^{-1}r^{-2} - p] J_1(pr) - (5-4\nu)r^{-1}J_1'(pr)] \Delta_1(p) + \\ &+ [(3-2\nu)p - (5-4\nu)p^{-1}r^{-2}] J_1(pr) + [(5-4\nu)r^{-1} - p^2r] J_1'(pr)] \times \Delta_2(p) + \\ &+ [(p^2 - r^{-1})J_1(pr) + pr^{-1}J_1'(pr)] \Delta_3(p) \} \\ f_8(p, r) &= 2G \{ [(5-4\nu)p^{-1}r^{-2} - 2(1-\nu)p] J_1(pr) - (5-4\nu)r^{-1}J_1'(pr)] \Delta_1(p) + \\ &+ [(5-4\nu)r^{-1}J_1'(pr) + [p - (5-4\nu)p^{-1}r^{-2}] J_1(pr)] \Delta_2(p) + \\ &+ [pr^{-1}J_1'(pr) - r^{-2}J_1(pr)] \Delta_3(p) \} \\ f_9(p, r) &= 2G \{ (5-4\nu)[r^{-1}J_1'(pr) - p^{-1}r^{-2}J_1(pr)]\Delta_1(p) + \\ &+ [(5-4\nu)p^{-1}r^{-2} - (1-2\nu)p] J_1(pr) - (5-4\nu)r^{-1}J_1'(pr)] \Delta_2(p) + \\ &+ [r^{-2}J_1(pr) - pr^{-1}J_1'(pr)] \Delta_3(p) \} \end{aligned}$$

$$\Delta_1(p) = (p^2 - 1)J_1^2(p) - 2(1-\nu)pJ_1(p)J_1'(p) + (3-2\nu)p^2J_1'^2(p)$$

$$\Delta_2(p) = 2(1-\nu)[(p^3 - p)J_1(p)J_1'(p) - J_1^2(p) + 2p^2J_1'^2(p)]$$

$$\Delta_3(p) = [(1-2\nu)(5-4\nu)p^{-1} + (5-4\nu)p - 2(1-\nu)p^3]J_1^2(p) - \\ - 4(1-\nu)(2-\nu)p^2J_1(p)J_1'(p) - (1-2\nu)(5-4\nu)pJ_1'^2(p)$$

$$u_4 = \cos^{-1} \varphi \tau_{rz}, \quad u_5 = \cos^{-1} \varphi \tau_{zr}, \quad u_6 = \sin^{-1} \varphi \tau_{\varphi z} \quad (1.8)$$

$$u_7 = \cos^{-1} \varphi \tau_{r\varphi}, \quad u_8 = \sin^{-1} \varphi \tau_{r\varphi}, \quad u_9 = \cos^{-1} \varphi \sigma_\varphi$$

Здесь контур L выбран левее мнимой оси, $J_n(pr)$ — функция Бесселя первого рода n -го порядка, штрих означает производную по аргументу.

Согласно условиям (1.2) и (1.3), функция $C(p)$ удовлетворяет уравнениям

$$u^-(p) = C(p)f_1(p, 1), \quad \sigma^+(p) = C(p)f_7(p, 1) \quad (1.9)$$

где

$$u^-(p) = \int_{-\infty}^0 u_1(z, 1) e^{-pz} dz, \quad \sigma^+(p) = \int_0^{\infty} u_7(z, 1) e^{-pz} dz$$

Исключив ее, получим однородное уравнение Винера — Хопфа

$$\sigma^+(p) = K(p) u^-(p), \quad K(p) = D_2(p) D_1^{-1}(p) \quad (1.10)$$

$$D_1(p) = f_1(p, 1) = -2(1 - \nu) \{ (p - p^{-1}) J_1^3(p) - 4(1 - \nu) J_1^2(p) J_1'(p) + \\ + [2(1 - \nu) p^3 + p] J_1(p) J_1'^2(p) + 4(1 - \nu) p^2 J_1'^3(p) \} \\ D_2(p) = -4G(1 - \nu) \{ (p^5 - 3p^3 + 2\nu p) J_1^3(p) + \\ + 2p^2(p^2 - 1 + 2\nu) J_1^2(p) J_1'(p) + p^3(p^2 - 4 + 2\nu) J_1(p) J_1'^2(p) + \\ + 2p^4 J_1'^3(p) \}$$

В точке $p = 0$ функция $D_1(p)$ имеет четырехкратный, а $D_2(p)$ — восьмикратный нуль.

Покажем, что других чисто мнимых нулей, порождающих нетривиальные однородные решения, у этих функций нет.

Проблема отсутствия мнимых нулей у характеристических функций типа $D_2(p)$ уже рассматривалась Г. П. Черепановым (см. [2], § 4) при доказательстве принципа Сен-Венана для цилиндрической области произвольного поперечного сечения. Однако в [2] исключены из рассмотрения кратные нули и существенно используется условие отсутствия напряжений на границе цилиндра. Приводимый ниже анализ функций $D_1(p)$ и $D_2(p)$ распространяется и на все другие случаи однородных граничных условий, например на случаи контакта цилиндра с упругой оболочкой.

Итак, допустим $p = i\beta$ — n -кратный мнимый нуль функций $D_1(p)$ или $D_2(p)$. Тогда $p = -i\beta$ — нуль той же кратности, и соответствующая цепочка однородных решений $u_{\alpha k}$, удовлетворяющих при $r = 1$, $-\infty < z < \infty$ условиям

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = u = 0 \quad \text{или} \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = \sigma_r = 0$$

представима в виде

$$u_{\alpha k} = \operatorname{Re} \{ \partial^k / \partial p^k [f_\alpha(p, r) e^{pz}] \}_{p=i\beta} \quad (0 \leq k \leq n-1)$$

Согласно (1.7), функции $f_1(i\beta, r)$, $f_3(i\beta, r)$, $f_5(i\beta, r)$ четны по β и, значит, вещественны, $f_2(i\beta, r)$, $f_4(i\beta, r)$, $f_6(i\beta, r)$ — нечетны и мнимы. Отсюда следует, что функции u_{10} , u_{30} , u_{50} пропорциональны $\cos \beta z$ и равны нулю на торцах цилиндра $r = 1$, $z = \pm \frac{1}{2} \pi \beta^{-1}$. По теореме единственности Кирхгофа $u_{\alpha 0} \equiv 0$ и, значит, $f_\alpha(i\beta, r) \equiv 0$. Но тогда $u_{\alpha 1} = \operatorname{Re} [e^{i\beta z} f_\alpha^*(i\beta, r)]$, где звездочка означает производную по p . Так как при однократном дифференцировании по p четность меняется на противоположную, функции u_{21} , u_{41} , u_{61} пропорциональны $\cos \beta z$, $u_{\alpha 1} \equiv 0$ и, следовательно, $f_\alpha^*(i\beta, r) \equiv 0$. Продолжая эти рассуждения, получим $u_{\alpha k} \equiv 0$, при всех k , что и требовалось.

Следуя [3], можно показать, что большие нули a_{ks} и b_{ks} ($s = 1, 2, 3$) функций $D_1(p)$ и $D_2(p)$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$ ($k = 1, 2, \dots$) лежат вблизи нулей соответственно функций $\sin^2(p - \frac{3}{4}\pi)$, $\cos(p - \frac{3}{4}\pi)$ и $(2p + \cos 2p) \cos(p - \frac{3}{4}\pi)$, точнее, справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} a_{k1} &= a_{k2} + O(k^{-1} \ln k) = k\pi - \frac{1}{4}\pi + O(k^{-1} \ln k) \\ a_{k3} &= b_{k3} + O(k^{-1} \ln k) = k\pi + \frac{1}{4}\pi + O(k^{-1} \ln k) \\ b_{k1} &= \bar{b}_{k2} = k\pi + \frac{1}{2}\pi + i/2 \ln [2(2k+1)\pi] + O(k^{-1} \ln k) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Функции $D_1(p)$ и $D_2(p)$ четны, поэтому их нулями будут также числа $a_{-ks} = -a_{ks}$ и $b_{-ks} = -b_{ks}$. Других больших нулей функции $D_1(p)$ и $D_2(p)$ не имеют. Доказательство последнего утверждения проводится как в [3], но контуры в теореме Руше нужно строить иначе. При исследовании a_{ks} контур составляется из отрезков

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} p| &\leq \frac{1}{6} \ln k\pi, \quad \operatorname{Re} p = \pm (k + \frac{3}{4})\pi \\ |\operatorname{Re} p| &\leq (k + \frac{3}{4})\pi, \quad \operatorname{Im} p = \pm \frac{1}{6} \ln k\pi \end{aligned}$$

при исследовании b_{ks} — из отрезков

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} p| &\leq \frac{1}{2} \ln [4(2k+1)\pi], \quad \operatorname{Re} p = \pm (k + \frac{3}{4})\pi \\ |\operatorname{Re} p| &\leq (k + \frac{3}{4})\pi, \quad \operatorname{Im} p = \pm \frac{1}{2} \ln [4(2k+1)\pi] \end{aligned}$$

Оценки (1.11) позволяют обосновать сходимость и алгебраический рост бесконечных произведений, полученных в результате факторизации

$$K(p) = K_0 p^4 K^-(p) [K^+(p)]^{-1}, \quad K_0 = \frac{1}{2} G(1+\nu)$$

$$K^+(p) = [K^-(-p)]^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{s=1}^3 (1 + pa_{ns}^{-1})(1 + pb_{ns}^{-1})^{-1} \quad (1.12)$$

$$K^+(p) \sim \sqrt[1/2]{(1-\nu^2)p^3}, \quad p \rightarrow \infty$$

В силу (1.4), (1.12) и обобщенной теоремы Лиувилля [4] решение уравнения (1.10) принимает вид

$$\sigma^+(p) = (A_{01}p + A_{02}) [K^+(p)]^{-1} \quad (1.13)$$

Упругие перемещения и напряжения (1.7) выражаются формулами

$$u_x^{0s} = \frac{1}{2\pi i} \int_L A_{0s} p^{2-s} [K^+(p) D_2(p)]^{-1} f_x(p, r) e^{pz} dp \quad (s=1, 2) \quad (1.14)$$

Эти решения определяют, в частности, напряженное состояние бесконечного цилиндра, который закреплен в обойме $r=1$, $0 \leq z < \infty$ и изгибается моментом M , приложенным при $z = -\infty$ (фигура, (I)), или касательной нагрузкой, статически эквивалентной поперечной силе P и приложенной к торцу цилиндра $z \geq -\mu$ при $\mu \geq 1$ (2). В обоих случаях постоянные A_{0s} вычисляются из условия равновесия, налагаемого на вычеты подынтегральных функций (1.14) в полюсе четвертого порядка: остальные члены в разложениях по вычетам самоуравновешены.

Точное решение задачи 1 дается формулами (1.14) при

$$s=1, \quad A_{01} = \pi^{-1} M \quad (1.15)$$

Решение задачи 2 выражается суммой $u_x^{01} + u_x^{02}$, причем

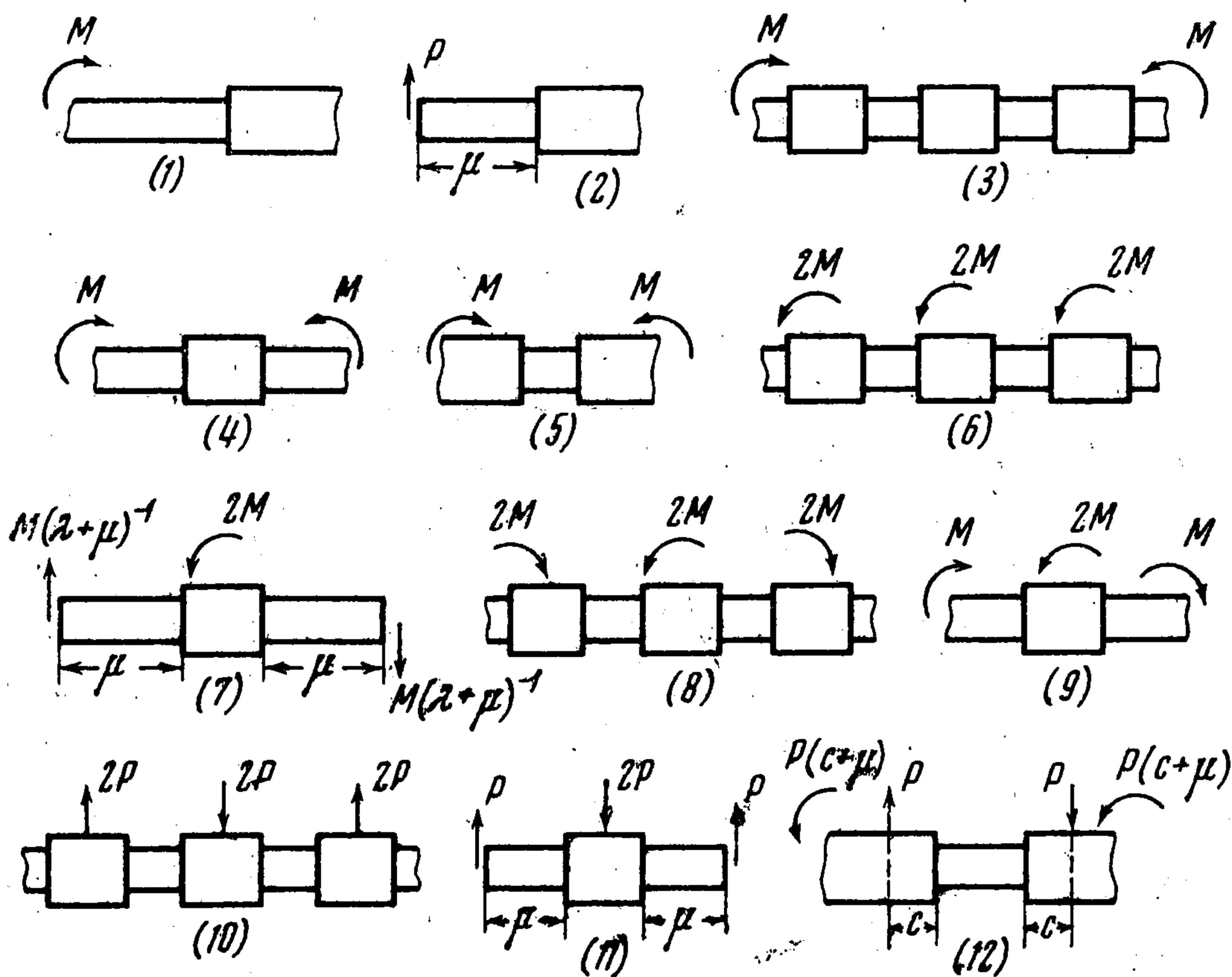
$$A_{01} = \pi^{-1} [\mu + K^{+*}(0)] P, \quad A_{02} = \pi^{-1} P \quad (1.16)$$

Благодаря отсутствию мнимых b_{ks} оно справедливо в области, достаточно удаленной от торца, там, где экспоненциально убывающие однородные решения успевают затухнуть.

В обеих задачах концентрация напряжений под краем обоймы, в силу (1.12), (1.13) и известных оценок ([1], стр. 48), имеющая вид

$$\sigma_r \sim \frac{2M \cos \varphi}{\pi \sqrt{2(1-\nu^2)} \pi z}, \quad \sigma_r \sim \frac{2P\mu \cos \varphi}{\pi \sqrt{2(1-\nu^2)} \pi z} \quad (r=1, z \rightarrow +0) \quad (1.17)$$

влечет за собой отставание цилиндра от половины края обоймы. Сравнивая (1.17) с осесимметричными напряжениями под обоймой $r=1-\delta$,



$0 \leq z < \infty$, посаженной на цилиндр $r \leq 1$, $-\infty < z < \infty$ [1]

$$\sigma_r \sim -\delta G (2 + 2\nu)^{1/2} (1 - \nu)^{-1} \pi^{-1/2} z^{-1/2} \quad (r=1, z \rightarrow +0)$$

получим соотношение

$$\delta \geq |M + P \mu \cos \varphi_1| (1 - \nu)^{1/2} [\pi G (1 + \nu)]^{-1} \quad (1.18)$$

при выполнении которого под всем краем обоймы возникают сжимающие напряжения. Здесь $\varphi_1 \rightarrow$ угол между плоскостями действия M и P .

За третий особый элемент системы возьмем поворот цилиндра как жесткого тела

$$u_1^{03} = A_{03} z, \quad u_2^{03} = A_{03} r, \quad u_3^{03} = -A_{03} z \quad (1.19)$$

Подсистемы кусочно-однородных решений, удовлетворяющих условиям (1.1)–(1.4) и имеющих экспоненциальный рост при $z \rightarrow \pm \infty$, запишем без вывода, аналогичного осесимметричному случаю [1]

$$u_x^{ks} = A_{ks} \left[f_x(a_{ks}, r) e^{a_{ks} z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L g_k(p) f_x(p, r) e^{pz} dp \right] \quad (k=1, 2, \dots) \quad (1.20)$$

$$u_x^{ks} = A_{ks} \left[f_x(b_{ks}, r) e^{b_{ks} z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L h_k(p) f_x(p, r) e^{pz} dp \right] \quad (k=-1, -2, \dots)$$

Здесь между функциями u_x^{ks} и действительными перемещениями и напряжениями сохраняются связи (1.5) и (1.8); если $b_{k2} = \bar{b}_{k1}$, то

$$A_{k2} = \bar{A}_{k1}$$

$$g_k(p) = -\frac{b_{ks}^2 K_0 K^-(-b_{ks}) D_1(b_{ks}) p^2}{(p + b_{ks}) K^+(p) D_2(p)}, \quad h_k(p) = \frac{K^+(a_{ks}) D_2(a_{ks}) p^2}{a_{ks}^2 (p - a_{ks}) K^+(p) D_2(p)}$$

Разлагая интегралы (1.20) в ряды по вычетам, можно убедиться, что каждый элемент этих подсистем самоуравновешен при $z < 0$ (это сделано, как в работе [5], но при помощи двух постоянных, входящих в (1.13)), удовлетворяет смешанным граничным условиям (1.1)–(1.3) и уравнениям теории упругости.

При помощи системы (1.14), (1.19), (1.20) можно решать разные смешанные задачи для полубесконечного и конечного цилиндров, сводя их к бесконечным системам алгебраических уравнений с нормальным определителем при любых торцевых условиях. Если на торцах цилиндра заданы комбинации w , $\tau_{\varphi z}$, τ_{rz} или u , v , σ_z или, если поставлены условия сопряжения (как в задаче изгиба бесконечного цилиндра двумя конечными обоймами), то свободные члены в системах алгебраических уравнений вычисляются точно. В других случаях, например при изгибе обоймами конечного цилиндра с незагруженными торцами, свободные члены вычисляются методом наименьших квадратов.

2. Рассмотрим задачи изгиба бесконечного цилиндра периодически посаженными абсолютно жесткими цилиндрическими обоймами. Пусть радиусы цилиндра и обойм равны единице, расстояние между соседними обоймами 2μ , длина их 2λ , полуплоскость $\varphi = 0$ совпадает с плоскостью фигуры ниже оси цилиндра, на контактных поверхностях нет сил трения, внешние усилия приложены только к обоймам.

Через левый край средней обоймы проведем координатную плоскость $z = 0$. Тогда граничные условия на боковой поверхности цилиндра $-\mu \leq z \leq \lambda$, $0 \leq r \leq 1$ при $r = 1$ во всех задачах примут вид

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0, & \quad -\mu \leq z \leq \lambda \\ \sigma_r = 0, & \quad -\mu \leq z < 0; \quad u = 0, \quad 0 \leq z \leq \lambda \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решения можно искать в форме рядов

$$u_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{s=1}^3 u_x^{ks} \quad (2.2)$$

определяя коэффициенты A_{ks} из условий периодичности и симметрии на торцах $z = -\mu$, $z = \lambda$ и полагая $A_{03} = 0$.

Задача 3. Обоймы посажены периодически, изгиб осуществляется только двумя моментами M , приложенными при $z = \pm \infty$.

В этом случае оба торца являются плоскостями симметрии, граничные условия имеют вид

$$\tau_{\varphi z}(-\mu, r) = \tau_{rz}(-\mu, r) = 0, \quad w(-\mu, r) = ar \cos \varphi \quad (2.3)$$

$$\tau_{\varphi z}(\lambda, r) = \tau_{rz}(\lambda, r) = w(\lambda, r) = 0 \quad (2.4)$$

где $2a$ — угол между осями соседних обойм.

Разложим при $z = -\mu$ и $z = \lambda$ в ряды по вычетам интегралы, входящие в функции u_x^{ks} , и подставим (1.14), (1.20) в (2.2). Поменяв порядки суммирования в двойных рядах

и учитывая равенства $f_x(-p, r) = -(-1)^x f_x(p, r)$ ($x = 1, 2, \dots, 6$), получим

$$u_x(-\mu, r) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^3 f_x(b_{ks}, r) \left[A_{-ks} (-1)^{x+1} e^{b_{ks}\mu} + e^{-b_{ks}\mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^3 A_{nq} \psi_{sq}^{kn} \right] + \\ + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^3 A_{nq} \varphi_q^{xn} \quad (2.5)$$

$$u_x(\lambda, r) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^3 f_x(a_{ks}, r) \left[A_{ks} e^{a_{ks}\lambda} + (-1)^x e^{-a_{ks}\lambda} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^3 A_{nq} \chi_{sq}^{kn} \right] \quad (2.6)$$

Здесь

$$\psi_{sq}^{kn} = \frac{b_{nq}^2 b_{ks}^2 K_0 K^- (-b_{nq}) D_1(b_{nq})}{(b_{ks} + b_{nq}) K^+(b_{ks}) D_2^*(b_{ks})} \quad (n \leq -1)$$

$$\psi_{sq}^{kn} = -\frac{b_{ks}^2 K^+(a_{nq}) D_2(a_{nq})}{a_{nq}^2 (b_{ks} - a_{nq}) K^+(b_{ks}) D_2^*(b_{ks})} \quad (n \geq 1)$$

$$\psi_{sq}^{k0} = (-1)^{s+1} b_{ks}^{2-s} [K^+(b_{ks}) D_2^*(b_{ks})]^{-1} \quad (2.7)$$

$$\chi_{sq}^{kn} = \frac{b_{nq}^2 K^-(-b_{nq}) D_1(b_{nq})}{a_{ks}^2 (a_{ks} - b_{nq}) K^-(-a_{ks}) D_1^*(a_{ks})} \quad (n \leq -1)$$

$$\chi_{sq}^{kn} = -\frac{K^+(a_{nq}) D_2(a_{nq})}{a_{nq}^2 a_{ks}^2 (a_{ks} + a_{nq}) K_0 K^-(-a_{ks}) D_1^*(a_{ks})} \quad (n \geq 1)$$

$$\chi_{sq}^{k0} = [a_{ks}^{s+2} K_0 K^-(-a_{ks}) D_1^*(a_{ks})]^{-1}$$

$$\varphi_q^{1n} = \varphi_q^{2n} r^{-1} (\mu + \eta_1) = -\varphi_q^{3n} = b_{nq} K^-(-b_{nq}) D_1(b_{nq}) (\mu + \eta_1) \quad (n \leq -1)$$

$$\varphi_q^{1n} = \varphi_q^{2n} r^{-1} (\mu + \eta_1) = -\varphi_q^{3n} = K_0^{-1} a_{nq}^{-3} K^+(a_{nq}) D_2(a_{nq}) (\mu + \eta_1) \quad (n \geq 1)$$

$$\eta_n = \frac{\partial^n}{\partial p^n} K^+(p) \Big|_{p=0}, \quad \varphi_1^{20} = K_0^{-1} (\mu + \eta_1) r$$

$$\varphi_2^{10} = -\varphi_2^{30} = K_0^{-1} [1/6\mu^3 + 1/2\mu^2\eta_1 + \mu(\eta_1^2 - 1/2\eta_2) + \eta_3 - \eta_1\eta_2 + \eta_1^3]$$

$$\varphi_1^{10} = \varphi_2^{20} = -\varphi_1^{30} = \partial\varphi_2^{10} / \partial\mu$$

В силу самоуравновешенности элементов (1.20) и согласно (1.15), $A_{01} = \pi^{-1} M$, $A_{02} = 0$. Ряды (2.5) подставим в условия (2.3). Обе части равенств (2.3) при $x = 4, 6, 2$ умножим на $f_x(b_{ks}, r)$ соответственно при $x = 1, 3, 5$ и проинтегрируем по r от 0 до 1. Складывая два первых равенства и вычитая третье, в силу соотношения обобщенной ортогональности [6]

$$\int_0^1 [f_1(b_{ks}, r) f_4(b_{nq}, r) + f_3(b_{ks}, r) f_6(b_{nq}, r) - f_5(b_{ks}, r) f_2(b_{nq}, r)] r dr = 0 \quad (2.8)$$

имеющего место при $b_{ks}^2 \neq b_{nq}^2$, получим значение угла поворота

$$2a = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^3 A_{nq} \varphi_q^{2n} r^{-1} \quad (2.9)$$

и систему ($s = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, \dots$)

$$-X_{-ks} + \sum_{q=1}^3 e^{-b_{ks}\mu} \left[\sum_{n=-1}^{-\infty} \psi_{sq}^{kn} e^{b_{nq}\mu} X_{nq} + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{sq}^{kn} e^{-a_{nq}\lambda} X_{nq} \right] = 0 \quad (2.10)$$

Здесь

$$X_{-ks} = A_{-ks} e^{b_{ks}\mu}, \quad X_{ks} = A_{ks} e^{a_{ks}\lambda}, \quad a_{0q} = 0, \quad X_{0q} = A_{0q}$$

Выполняя те же действия с рядами (2.6) и используя соотношение (2.8), справедливое при замене b_{ks} на a_{ks} [6], получим

$$X_{ks} + \sum_{q=1}^3 e^{-a_{ks}\lambda} \left[\sum_{n=-1}^{-\infty} \chi_{sq}^{kn} e^{b_{nq}\mu} X_{nq} + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{sq}^{kn} e^{-a_{nq}\lambda} X_{nq} \right] = 0 \quad (2.11)$$

Согласно оценкам (1.11), двойной ряд матрицы системы (2.10), (2.11) за счет экспоненциальных множителей абсолютно сходится, свободные члены системы ограничены. Таким образом, (2.10), (2.11) — нормальная система Пуанкаре — Коха [7]. Опираясь на соотношение ортогональности (2.8) и теорему единственности Кирхгофа, можно установить существование и единственность ее нормального решения.

Задача 4 — это предельный случай задачи 3 при $\mu = \infty$. Из (2.10) следует, что $A_{ks} = 0$ при $k \leq -1$. Неизвестные A_{ks} при $k \geq 1$ находятся из системы (2.11), матричные элементы которой при $n \leq -1$ становятся равными нулю.

Задача 5 — предельный случай задачи 3 при $\lambda = \infty$. Очевидно, $A_{ks} = 0$ при $k \geq 1$. Система (2.10) для определения A_{ks} при $k \leq -1$ упрощается за счет $e^{-a_{nq}\lambda} = 0$.

Задача 6. К обоям приложены нагрузки, статически эквивалентные изгибающим моментам $2M$, действующим в осевой плоскости $\varphi = 0$ в одном направлении. Выпишем граничные условия

$$u = a \cos \varphi, \quad v = a \sin \varphi, \quad \sigma_z = 0, \quad z = -\mu, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (2.12)$$

$$u = v = \sigma_z = 0, \quad z = \lambda, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (2.13)$$

В сечении $z = -\mu$ главный вектор касательных напряжений равен $M(\lambda + \mu)^{-1}$, поэтому из (1.16) следует, что

$$A_{01} = \pi^{-1}(\eta_1 + \mu)(\lambda + \mu)^{-1}M, \quad A_{02} = \pi^{-1}(\lambda + \mu)^{-1}M$$

Для вычисления остальных A_{ks} и величины взаимного смещения соседних обоев подставим (2.5) в (2.12). Равенства (2.12) при $k = 1, 3, 5$ умножим на $f_x(b_{ks}, r)$ при $k = 4, 6, 2$ соответственно. Интегрируя их по r от 0 до 1 и складывая, в силу (2.8) получим ($s = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots$)

$$X_{-ks} + \sum_{q=1}^3 e^{-b_{ks}\mu} \left[\sum_{n=-1}^{-\infty} \psi_{sq}^{kn} e^{b_{nq}\mu} X_{nq} + \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{sq}^{kn} e^{-a_{nq}\lambda} X_{nq} \right] = 0 \quad (2.14)$$

$$2a = 2 \sum_{q=1}^3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nq} \varphi_q^{1n} \quad (2.15)$$

Точно так же из условий (2.13) получим

$$X_{ks} - \sum_{q=1}^3 e^{-a_{ks}\lambda} \left[\sum_{n=-1}^{-\infty} \chi_{sq}^{kn} e^{b_{nq}\mu} X_{nq} + \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{sq}^{kn} e^{-a_{nq}\lambda} X_{nq} \right] = 0 \quad (2.16)$$

Система (2.14), (2.16) по своему типу аналогична (2.10), (2.11).

Задача 7 — частный случай предыдущей при достаточно больших μ , когда числа $e^{-b_{ks}\mu}$ настолько малы, что, учитывая (2.14), можно полагать $A_{ks} = 0$ при $k \leq -1$, а при $k \geq 1$ находить A_{ks} из системы (2.16). Как и в задаче 2, решение здесь вблизи от торца полубесконечного цилиндра будет приближенным.

Задача 8 отличается от задачи 6 тем, что заданные моменты поочередно меняют свое направление. Ее граничные условия — (2.3), (2.13), система для A_{ks} — (2.10), (2.16), поворот соседних обоев определяется формулой (2.9), $A_{01} = \pi^{-1}M$, $A_{02} = 0$.

Задача 9 получается из предыдущей, когда $\mu = \infty$. При $k \leq -1$ $A_{ks} = 0$, при $k \geq 1$ для вычисления A_{ks} служит укороченная система (2.16).

Задача 10. На обоймы действуют нагрузки, статически эквивалентные силам $2P$, которые приложены посредине обойм вдоль радиуса в плоскости $\varphi = 0$ и чередуются по направлению. Граничные условия здесь — (2.4), (2.12), коэффициенты A_{ks} определяются системой (2.11), (2.14), коэффициенты A_{0s} — формулами (1.16), сдвиг соседних обойм — рядом (2.15).

Задача 11 подобно задачам 2 и 7 может быть решена при $\mu \gg 1$. Тогда она будет частным случаем задачи 10 при $A_{ks} = 0$ для всех $k \leq -1$. При $k \geq 1$ A_{ks} вычисляется из (2.11).

Задача 12 — предельный случай задачи 10 при $\lambda = \infty$. Здесь при $k \geq 1$ $A_{ks} = 0$, при $k \leq -1$ A_{ks} вычисляется из укороченной системы (2.14), сдвиг — по (2.15).

Путем суперпозиции решений рассмотренных задач можно исследовать изгиб цилиндров и в более сложных условиях, например, когда обоймы поворачиваются и смещаются в разных осевых плоскостях, или когда к ним приложены внецентренные силы.

Поступила 30 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Нуллер Б. М. Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
2. Черепанов Г. П. О сингулярных решениях в теории упругости. В сб.: Проблемы механики деформируемого твердого тела. Л., Судостроение, 1970.
3. Нуллер Б. М. Контактная задача для упругого бесконечного конуса. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
4. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
5. Боговой В. Г., Нуллер Б. М. Давление плоского кругового штампа на упругое полупространство с выемкой или включением. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4.
6. Литовченко С. И., Прокоров В. К. Соотношение обобщенной ортогональности в задаче о равновесии упругого цилиндра. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
7. Каган В. Ф. Основания теории определителей. Одесса, Гос. изд. Украины, 1922.