Прикладная математика и механика. Том 37, 1973

УДК 539.31

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ И НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Л. П. Лебедев

(Ростов-на-Дону)

Доказывается однозначная разрешимость смешанных начально-краевых задач для одного варианта линейной вязкоупругости, а также сходимость некоторых приближенных методов решения этих задач.

При выполнении условий $\mu > 0$, $m_A \leqslant m_B$ и если $m_A = m_B$, то $\lambda + 2\mu > 0$, рассмотрены следующие случаи соотношения степеней полиномов B, C: $m_B \geqslant m_C + 2$ (п. 3), $m_B = m_C$ и $m_B = m_C + 1$ (п. 4).

Эти случаи охватывают все применяющиеся в теории вязкоупругости виды связи между деформациями и напряжениями типа (1.1). В качестве математического обоснования подобных ограничений можно заметить, что при $m_C > m_B$ задача Коши для тела, занимающего все пространство, всегда некорректна по Г. Е. Шилову [1].

1. Рассматривается вариант линейной вязкоупругости со следующими определяющими соотношениями между компонентами тензоров напряжения σ_{ij} и деформации ε_{ij}:

$$C(\partial_t)\,\sigma_{ij} = \lambda A(\partial_t)\,\theta\delta_{ij} + 2\mu B(\partial_t)\,\varepsilon_{ij} \tag{1.1}$$
$$\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i})$$

Здесь $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ — некоторые полиномы переменной p со старшим коэффициентом, равным единице, и степени m_A, $m_B = n$, $m_C = m - 2$ соответственно, λ, μ — мгновенные упругие модули, $\theta = \varepsilon_{ii}$ — объемная деформация, $u_{i,j}$ — частная производная i-й компоненты вектора перемещения точек тела $\mathbf{u}$ по переменной x_j, ∂_t — частная производная по времени t, δ_{ij} — символ Кронекера; по повторяющимся нижним индексам производится суммирование.

Для обобщенной постановки задач теории вязкоупругости естественно применить принцип возможных перемещений в форме Лагранжа

$$\int\limits_\Omega \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}\,d\Omega = \int\limits_\Omega (F_i - \rho\partial_t^2 u_i)\,\delta u_i\,d\Omega + \int\limits_S P_i\delta u_i\,dS \tag{1.2}$$

где δu_i — вариации компонент вектора перемещений, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ — объемные силы, $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ — силы, действующие на границе S объема Ω, занимаемого телом, ρ — плотность тела.

Считая вариации δu_i не зависящими от времени t, исключим из выражения (1.2) σ_{ij}, применяя к (1.2) оператор $C(\partial_t)$ и учитывая соотношения (1.1). Если вектор-функция $\mathbf{u}$ в полученном таким способом равенстве — вектор действительных перемещений точек тела, то это равенство должно выполняться в любой момент времени t и для всех произвольных возможных перемещений δu_i, а потому оно продолжает выполняться, если δu_i зависят от времени t. Приведем это равенство, дополнительно проинтегрировав его по времени

$$\int_0^T \int_\Omega \{\lambda A(\partial_t)\theta\delta_{ij} + 2\mu B(\partial_t)\varepsilon_{ij}\}\delta\varepsilon_{ij}\,d\Omega\,dt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \delta u_i C(\partial_t)(F_i - \rho\partial_t^2 u_i)\,d\Omega\,dt + \int_0^T \int_S \delta u_i C(\partial_t) P_i\,dS\,dt \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) принято ниже за основу при обобщенной постановке задач линейной вязкоупругости.

Для полной постановки задач необходимо задать следующие начальные и граничные значения:

$$\partial_t^k \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{a}_k, \quad k = 0, \ldots, \max(n-1, m-1) \tag{1.4}$$

$$N_1\mathbf{u}|_S = N_1\psi \tag{1.5}$$

$$N_2\sigma_{kl}\nu_l\mathbf{i}_k|_S = N_2\mathbf{P} = \mathbf{P} \tag{1.6}$$

где ν_l — направляющие косинусы внешней нормали поверхности S, N_1, N_2 — взаимно-ортогональные операторы проектирования в пространстве E^3, кусочно-непрерывно зависящие от координат поверхности S. Случаи тождественных операторов N_1 или N_2 означают соответственно задание перемещений или напряжений на границе тела.

Далее считается, что имеется невырожденная часть S_1 границы S, где оператор N_1 — тождественный, т. е. исключается возможность смещения тела как жесткого целого, и оператор $N_1 + N_2$ — тождественный для всех точек S.

Необходимо должно выполняться следующее условие.

Условие согласованности. Существует вектор-функция Φ, удовлетворяющая начальным и краевым условиям (1.4), (1.5).

2. Введем некоторые пространства и рассмотрим их свойства.

Пространства $C^k[0, T; H]$, $L_p[0, T; H]$, $W_p^k(\Omega)$ считаются известными [2]. Принадлежность вектор-функции любому из них означает, что каждая ее компонента принадлежит этому пространству.

Граница S ограниченного объема Ω обладает нормалью, меняющейся кусочно-непрерывно на S, и такова, что к каждой точке S можно прикоснуться изнутри некоторым конусом положительного раствора.

Определение 2.1. Пространство $B_1^{n, m}(T)$ есть замыкание множества вектор-функций $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{a} \in C^\infty(\Omega \times [0, T])$ в норме

$$\|\mathbf{a}\|^2_{B_1^{n, m}(T)} = \int_0^T \left\{\sum_{k=0}^n \|\partial_t^k \mathbf{a}\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \sum_{k=0}^m \|\partial_t^k \mathbf{a}\|^2_{L_2(\Omega)}\right\} dt \tag{2.1}$$

Вводится следующее обозначение:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})_{H_1} = \int_\Omega \{\lambda\theta(\mathbf{a})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{a})\}\varepsilon_{ij}(\mathbf{b})\,d\Omega \tag{2.2}$$

Определение 2.2. Замыкание подмножества вектор-функций $\mathbf{a} \in C^1(\Omega)$, удовлетворяющих однородным краевым условиям (1.5), в норме (2.2) есть пространство H_1.

Определение 2.3. Замыкание подмножества вектор-функций $\mathbf{a} \in C^\infty(\Omega \times [0, T])$, удовлетворяющих однородным граничным и начальным условиям (1.4), (1.5), в норме

$$\|\mathbf{a}\|^2_{B_2^n(T)} = \int_0^T (\partial_t^n \mathbf{a} \cdot \partial_t^n \mathbf{a})_{H_1} \, dt \tag{2.3}$$

называется пространством $B_2^n(T)$, если $\mu > 0, \lambda + 2\mu > 0$. Пространство $B_2^\circ(T)$ имеет специальное обозначение $H_2(T)$.

Замечание. В случае, когда $S_1 = S$, условие $\lambda + 2\mu > 0$ можно заменить на более слабое: $3\lambda + 2\mu > 0$.

Определение 2.4. Замыкание подмножества вектор-функций $\mathbf{a} \in C^\infty(\Omega \times [0, T])$, удовлетворяющих однородным краевым условиям (1.5), в норме

$$\|\mathbf{a}\|^2_{H_3(T)} = \int_0^T \{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})_{H_1} + \|\partial_t \mathbf{a}\|^2_{L_2(\Omega)}\} \, dt \tag{2.4}$$

есть пространство $H_3(T)$. Подмножество $H_3(T)$, получившееся замыканием вектор-функций, равных нулю в некоторой окрестности $t = T$, своей для каждой функции, обозначается через $H_3^\circ(T)$.

Определение 2.5. $B_3^n(T)$ есть подмножество вектор-функций $\mathbf{a} \in B_1^{n,n}(T)$ таких, что $\|\partial_t \mathbf{a}\|_{L_2(\Omega)}$ есть ограниченная на $[0, T]$ функция.

Определение 2.6. Негативным пространством H^- называется двойственное к пространству H пространство элементов $\mathbf{b}$ с нормой

$$\|\mathbf{b}\|_{H^-} = \sup |(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})_{L_2(\Omega)}| \, \|\mathbf{a}\|_H^{-1}, \quad \mathbf{a} \in H$$

Лемма 2.1. Имеют место следующие вложения пространств с непрерывным оператором вложения:

$$H_1 \subset W_2^1(\Omega), \qquad L_{6/5}(\Omega) \subset H_1^-$$

$$B_2^n(T) \subset B_1^{n,n}(T), \quad B_1^{n,m}(T) \subset C^{n-1}[0, T; W_2^1(\Omega)]$$

$$B_1^{n,m}(T) \subset C^k[0, T; W_2^{1-(k+0.5-n)(m-n)^{-1}}(\Omega)] \quad \text{при } n \leqslant k < m$$

$$B_1^{n,m}(T) \subset W_2^n[0, T; W_2^{1/2}(\Gamma)], \quad H_3(T) \subset W_2^1(\Omega \times [0, T])$$

причем на пространстве H_1 эквивалентны норма (2.2) и норма $W_2^1(\Omega)$, а на $B_2^n(T)$ — норма (2.3) и норма $B_1^{n,n}(T)$; $\Gamma \in \Lambda_1$.

Здесь Λ_1 — класс поверхностей Ляпунова Γ, т. е. на поверхности Γ можно выделить конечное число областей Γ_k, каждая из которых представима параметрически в виде $z_k = f_k(x_k, y_k)$, где f_k — непрерывно дифференцируемые функции, причем любая внутренняя часть поверхности Γ принадлежит объединению некоторых строго внутренних замкнутых подобластей Γ_k, своих для каждой такой части.

Доказательство вытекает из теоремы (3.2) (см. [2], гл. 1) и неравенства Корна.

Лемма 2.2. Пусть имеется набор m вектор-функций $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_m$ со следующими свойствами:

$$\mathbf{a}_k \in W_2{}^1(\Omega), \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

$$\mathbf{a}_k \in W_2^{1-(k+0.5-n)(m-n)^{-1}}(\Omega), \quad k = n, \ldots, m-1, \quad \text{если } m > n$$

В этом случае существует вектор-функция $\mathbf{a} \in B_1^{n,m}(T)$, принимающая в качестве начальных значений (1.4) этот набор. Если функции $\mathbf{a}_k$ удовлетворяют однородным краевым условиям (1.5) в смысле пространств, которым они принадлежат, то и вектор-функция $\mathbf{a}$ удовлетворяет однородным краевым условиям (1.5).

Доказательство вытекает из теоремы 3.2 (см. [2], гл. 1)

Лемма 2.3. Для любой вектор-функции $\boldsymbol{\omega}$, заданной на некоторой поверхности $\Gamma \subset \Omega$, $\Gamma \in \Lambda_1$, такой, что $\partial_t{}^k\boldsymbol{\omega} \in L_2[0, T; W_2^{1/2}(\Gamma)]$ $k = 0, \ldots, \ldots, n-1$ существует вектор-функция $\mathbf{a} \in B_1^{n,n}(T)$, принимающая на Γ значение $\boldsymbol{\omega}$, причем, если $\partial_t{}^k \boldsymbol{\omega} = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$ при $t = 0$, то и $\partial_t{}^k\mathbf{a} = 0$ при $t = 0$, и оператор восстановления непрерывен.

Доказательство проводится аналогично [3].

Леммы 2.2 и 2.3 указывают важные частные случаи существования вектор-функции $\boldsymbol{\Phi}$ из условия согласованности определенного класса.

Необходимо отметить, что для вектор-функции $\mathbf{a} \in B_1^{n,m}(T)$ с начальными значениями $\partial_t{}^k\mathbf{a} = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$ при $t = 0$ справедливо представление

$$\mathbf{a}(x_i, t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} \partial_\tau{}^n\mathbf{a}(x_i, \tau)\, d\tau \tag{2.5}$$

3. Каждый из трех случаев соотношения степеней полиномов B, C, указанных в п. 1 в связи с особенностями при постановке задачи, должен быть рассмотрен отдельно.

Определение 3.1. Обобщенным решением задачи линейной вязкоупругости в случае $n = m_B \geqslant m_C + 2$ называется вектор-функция $\mathbf{u} \in B_1^{n,n}(T)$, удовлетворяющая начальным и краевым условиям (1.4), (1.5), такая, что для любой вектор-функции $\delta\mathbf{u} \in H_2(T)$ справедливо равенство (1.3).

Для определенности рассматривается случай $m_A = m_B$. Пусть вектор-функция $\boldsymbol{\Phi}$ из условия согласованности такова, что $\boldsymbol{\Phi} \in B_1^{n,n}(T)$. Обобщенное решение задачи линейной вязкоупругости ищется в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Phi} \tag{3.1}$$

где вектор-функция $\mathbf{u}_0$, очевидно, принадлежит пространству $B_2^n(T)$. Вводя обозначение $\mathbf{v} = \partial_t{}^n\mathbf{u}_0$ и учитывая (2.5), (3.1) уравнение (1.3) можно привести к следующему виду:

$$(\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{u})_{H_2(T)} = \int_0^T \{R_1(\mathbf{v}, \delta\mathbf{u}) + R_2(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{F}, \mathbf{P}, \delta\mathbf{u})\}\, dt \tag{3.2}$$

где R_k — некоторые линейные по каждой из своих переменных интегро-дифференциальные формы. Необходимо отметить, что форма R_1 (v, δu) содержит переменную v лишь под знаком интеграла по времени t, за исключением члена ρ $(\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{u})_{L_2(\Omega)}$ при $m_C+2=m_B$, который в этом случае необходимо добавить в выражение нормы H_1. При $\rho > 0$ такая новая норма H_1 эквивалентна старой.

Можно показать, что однозначная разрешимость уравнения (3.2) в пространстве $H_2(T)$ эквивалентна существованию единственного обобщенного решения задачи линейной вязкоупругости. Все свойства и методы решения уравнения (3.2) легко переносятся непосредственно на уравнение (1.3). Таким образом, ниже будет исследоваться уравнение (3.2), а результаты формулируются сразу для уравнения (1.3). Аналогично проводится исследование в п. 4.

Теорема 3.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) $m_C+2\leqslant m_B=n$, $m_A\leqslant m_B$, 2) $\mu>0$, 3) если $m_A=m_B$, то $\lambda+ + 2\mu>0$, 4) если $m_B=m_C+2$, то $\rho>0$, 5) $\Phi\in B_1^{n,n}(T)$, 6) $C(\partial_t)\,\mathbf{F}\in L_2[0,T;H_1^-]$, 7) $C(\partial_t)\,P_i\in L_2[0,T;\;W_2^{-1/2}(S)]$

В этом случае: 1) существует единственное обобщенное решение задачи линейной вязкоупругости в том смысле, как оно введено определением 3.1; 2) решение можно отыскивать приближенно методом Бубнова — Галеркина в виде $\mathbf{u}_n^*=c_1(t)\,\psi_1+\ldots+c_n(t)\,\psi_n$, где ψ_k — ортонормированный базис в H_1, причем система уравнений метода Бубнова — Галеркина разрешима на каждом этапе, а последовательность $\mathbf{u}_n^*$ сильно сходится в пространстве $B_1^{n,n}(T)$ к решению задачи.

Оценивая члены правой части уравнения (3.2) при помощи неравенства Гельдера, легко видеть, что каждый из этих членов есть линейный непрерывный функционал по переменной $\delta\mathbf{u}=\varphi$ в пространстве $H_2(T)$. По теореме Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве уравнение (3.2) можно записать в эквивалентной операторной форме

$$(\mathbf{v}\cdot\varphi)_{H_2(T)}=(G_T\mathbf{v}\cdot\varphi)_{H_2(T)}+(\mathbf{f}\cdot\varphi)_{H_2(T)} \tag{3.3}$$

Строится следующий итерационный процесс:

$$\mathbf{v}_n=G_T\mathbf{v}_{n-1}+\mathbf{f}$$

где $\mathbf{v}_0$ — произвольная вектор-функция, $\mathbf{v}_0\in H_2(T)$. Соответствующий процесс для уравнения (1.3) назовем методом «упругих решений».

При помощи неравенства Гельдера характерный член выражения $(G_T\mathbf{v}\cdot\varphi)_{H_2(T)}$ оценивается следующим образом:

$$\left|\int_0^T\int_\Omega\int_0^\tau E(\tau-\alpha)\,\varepsilon(\alpha)\,d\alpha\,\varepsilon_1(\tau)\,d\Omega\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant m_1\left\{\int_0^T t\int_\Omega\int_0^t \varepsilon^2(\alpha)\,d\alpha\,d\Omega\,dt\right\}^{1/2}\|\varepsilon_1\|_{L_2(\Omega\times[0,T])}$$

где $m_1=\max|E(t)|$ при $t\in[0,T]$.

Необходимо отметить, что T в этом неравенстве произвольно. Суммируя оценки для всех членов выражения $(G_T \mathbf{v}\cdot\varphi)_{H_2(T)}$, выбирая $\varphi = G_T\mathbf{v}$ и применяя лемму 2.1, можно получить оценку

$$\|G_t\mathbf{v}\|_{H_2(t)} \leqslant m_2 \left\{\int_0^t \tau \|\mathbf{v}\|^2_{H_2(\tau)}\, d\tau\right\}^{1/2} \tag{3.4}$$

где постоянная m_2 зависит лишь от t и конечна при $0 \leqslant t \leqslant T < \infty$.

Из (3.4) выводится оценка

$$\|G_T^{k+1}\mathbf{v}\|_{H_2(T)} \leqslant \|\mathbf{v}\|_{H_2(T)} (2^{-1/2} m_2 T)^k (k!)^{-1} \tag{3.5}$$

откуда вытекает, что при достаточно большом k оператор $G_T{}^k$ есть оператор сжатия. По принципу сжатых отображений уравнение (3.3) однозначно разрешимо. При помощи оценки (3.5) находится скорость сходимости ряда $\mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0) + (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \ldots$ к решению уравнения (3.3). Таким образом, справедлива следующая теорема, из которой вытекает первая часть утверждения теоремы 3.1.

Теорема 3.2. Пусть выполнены все условия теоремы 3.1. В этом случае последовательность приближенных решений метода упругих решений сходится к единственному обобщенному решению задачи линейной вязкоупругости $\mathbf{u}$ со скоростью

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_m\|_{B_1^{n,n}(T)} \leqslant K \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(MT)^k}{k!}$$

Здесь постоянная M зависит лишь от T, а постоянная K — от величины соответствующих норм внешних сил, вектор-функции $\mathbf{\Phi}$, начального приближения $\mathbf{u}_0 \in B_1^{n,n}(T)$, постоянных из теорем вложения; M, K не зависят от m.

Система уравнений r-го приближения метода Бубнова — Галеркина в терминах уравнения (3.2) имеет вид

$$(\mathbf{v}_r{}^*\cdot\psi_k)_{H_1} = R_1(\mathbf{v}_r^*, \psi_k) + R_2(\mathbf{\Phi}, \mathbf{F}, \mathbf{P}, \psi_k), \qquad k = 1, \ldots, r$$

Разрешимость этой интегро-дифференциальной ситемы при любом r доказывается как и разрешимость уравнения (3.2). Получающаяся при этом оценка нормы решения $\mathbf{v}_r{}^*$ не зависит от номера r. Поэтому из последовательности $\mathbf{v}_r{}^*$ можно выбрать слабо сходящуюся в $H_2(T)$ подпоследовательность. Легко показать, что этот слабый предел и есть обобщенное решение задачи. В силу единственности решения задачи вся последовательность сходится слабо. Сильная сходимость последовательности $\mathbf{v}_r{}^*$ на малом отрезке времени $[0, T_1]$ следует из того факта, что при достаточно малых t G_t есть оператор сжатия. Рассматривая теперь отрезок $[T_1, 2T_1]$ и учитывая свойства оператора G_T и сильную сходимость $\mathbf{v}_r{}^*$ в пространстве $H_2(T_1)$, можно видеть, что последовательность $\mathbf{v}_r{}^*$ сходится сильно в норме $H_2(2T_1)$ и т. д., пока весь отрезок $[0, T]$ не будет исчерпан конечным числом шагов.

Замечание 1. Пусть $\Phi \in C^n [0, T; H_1]$ и по переменной φ

$$\int\limits_S \varphi_i C(\partial_t) P_i \, dS + \int\limits_\Omega \varphi_i C(\partial_t) F_i \, d\Omega$$

есть непрерывный оператор из пространта $C^0 [0, T; H_1]$ в пространство непрерывных функций. В этом случае обобщенное решение задачи (из теоремы 3.1) лежит в пространстве $C^n [0, T; H_1]$.

Это замечание вытекает из теоремы 1, сформулированной в [4].

Замечание 2. В случае задачи так называемой квазистатики (формально получается из уравнения (1.3) при $\rho = 0$) теоремы 3.1, 3.2 верны, причем выполнение условия $m_C + 2 \leqslant m_B$ необязательно.

4. Пусть вектор-функция $\varphi \in H_3^\circ (T)$ и, для определенности, $m_A = m_B$. Тогда (1.3) преобразуется следующими двумя способами:

$$(\partial_t^n \mathbf{u} \cdot \varphi)_{H_2(T)} - \int\limits_0^T \{(\rho \partial_t^{n+1} \mathbf{u} \cdot \partial_t \varphi)_{L_2(\Omega)} - (\rho c_1 \partial_t^{n+1} \mathbf{u} \cdot \varphi)_{L_2(\Omega)} - \tag{4.1}$$

$$- (\rho c_2 \partial_t^n \mathbf{u} \cdot \varphi)_{L_2(\Omega)}\} \, dt = - (\rho \mathbf{a}_{n+1} \cdot \varphi)_{L_2(\Omega)} \big|_{t=0} + \int\limits_0^T R_3 (\mathbf{u}, \mathbf{F}, \mathbf{P}, \varphi) \, dt$$

$$\text{при } n = m_B = m_C$$

$$(\partial_t^n \mathbf{u} \cdot \varphi)_{H_2(T)} - \int\limits_0^T \{(\rho \partial_t^n \mathbf{u} \cdot \partial_t \varphi)_{L_2(\Omega)} - (\rho c_1 \partial_t^n \mathbf{u} \cdot \varphi)_{L_2(\Omega)}\} \, dt = \tag{4.2}$$

$$= (\rho \mathbf{a}_n \cdot \varphi)_{L_2(\Omega)} \big|_{t=0} + \int\limits_0^T R_4 (\mathbf{u}, \mathbf{F}, \mathbf{P}, \varphi) \, dt \quad \text{при } n = m_B = m_C + 1$$

Здесь R_3, R_4 — линейные формы по каждой из своих переменных, содержащие $\partial_t^k \mathbf{u}$ лишь при $k < n$.

Определение 4.1. Обобщенным решением задачи линейной вязкоупругости в случае $n = m_B = m_C$ [$n = m_B = m_C + 1$] называется вектор-функция $\mathbf{u} \in B_1^{n, n+1} (T)$ [$\mathbf{u} \in B_3^n (T)$], удовлетворяющая начальным и краевым условиям (1.4), (1.5) и равенству (4.1), (4.2) для любой вектор-функции $\varphi \in H_3^\circ (T)$, причем n-е начальное условие принимается в следующем смысле:

$$\lim \| \partial_t^n \mathbf{u} - \mathbf{a}_n \|_{L_2(\Omega)} = 0 \quad \text{при } t \to 0$$

Теорема 4.1. Пусть выполнены следующие условия:
1) $n = m_B \geqslant m_A$, 2) $\mu > 0$, $\rho > 0$, 3) $\lambda + 2\mu > 0$, если $m_B = m_A$, 4) $\Phi \in B_1^{n+l, n+l+1} (T)$, если $n = m_C$, 5) $\Phi \in B_1^{n+l, n+l} (T)$, если $n = m_C + 1$, 6) $\partial_t^{k-1} C(\partial_t) F_i \in L_2 (\Omega \times [0, T])$, 7) $\partial_t^k C(\partial_t) P_i \in L_2 (S \times [0, T])$, 8) $k = 0, \ldots, l$, $l \geqslant 1$.

В случае $n = m_C$ [$n = m_C + 1$]: 1) существует единственное обобщенное решение задачи линейной вязкоупругости в смысле определения 4.1, 2) решение может быть найдено методом Бубнова — Галеркина, причем система уравнений метода Бубнова — Галеркина однозначно разрешима на каждом этапе, последовательность приближенных решений метода Бубнова — Галеркина лежит в некотором шаре пространства $B_1^{n+l-1, n+l} (T)$

$[B_3^{n+l-1}(T)]$ и слабо сходится к обобщенному решению задачи $\mathbf{u} \in B_1^{n+l-1,\, n+l}(T)$ $[\mathbf{u} \in B_3^{n+l-1}(T)]$, 3) если $l \geqslant 2$, то последовательность $\mathbf{u}_r$ сходится сильно в пространстве $B_1^{n+l-2,\, n+l-1}(T)$ $[B_3^{n+l-2}(T)]$.

Доказательство теоремы существования методом Бубнова — Галеркина для нестационарных задач впервые было предложено в работе [5].

Ниже описывается кратко ход доказательства в случае $n = m_C$. Решение, как и в п. 3, ищется в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\Phi}, \qquad \mathbf{u}_0 = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{v}\, d\tau$$

что приводит к эквивалентной задаче, однозначная разрешимость которой влечет за собой существование единственного обобщенного решения задачи линейной вязкоупругости.

Эквивалентная задача. Найти вектор-функцию $\mathbf{v} \in H_3(T)$, удовлетворяющую следующему равенству:

$$(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{H_3(T)} - \int_0^T \{(\rho\partial_t\mathbf{v}\cdot\partial_t\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\Omega)} - (\rho c_1\partial_t\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\Omega)} -$$

$$-(\rho c_2\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\Omega)}\}\, dt = \int_0^T \left\{R_3\left(\int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{v}\, d\tau,\ \mathbf{F},\ \mathbf{P},\boldsymbol{\varphi}\right) + R_5(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\varphi})\right\} dt \tag{4.3}$$

для любой вектор-функции $\boldsymbol{\varphi} \in \overset{\circ}{H}_3(T)$ и $\mathbf{v} = 0$ при $t = 0$.

Доказательство существования решения эквивалентной задачи проводится методом Бубнова — Галеркина; r-е приближение метода

$$\mathbf{v}_r = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{rk}(t)\,\boldsymbol{\psi}_k$$

находится из системы уравнений

$$\alpha_{rk}''(t) + c_1\alpha_{rk}'(t) + c_2\alpha_{rk}(t) + (\mathbf{v}_r\cdot\boldsymbol{\psi}_k)_{H_1} =$$

$$= R_3\left(\int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{v}_r\, d\tau,\ \mathbf{F},\mathbf{P},\ \boldsymbol{\psi}_k\right) + R_5(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\psi}_k) \tag{4.4}$$

с начальными условиями $\alpha_{rk}(0) = \alpha_{rk}'(0) = 0,\ k = 1,\ldots, r$.

Здесь $\boldsymbol{\psi}_k$ — элементы базиса пространства H_1 такие, что

$$\rho\,(\boldsymbol{\psi}_k\cdot\boldsymbol{\psi}_n)_{L_2(\Omega)} = \delta_{kn}$$

Однозначная разрешимость системы уравнений Бубнова — Галеркина (4.4) следует из того факта, что для соответствующих коэффициентов α_{rk} вектор-функции

$$\mathbf{u}_{0r} = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{v}_r\, d\tau$$

получается система обыкновенных дифференциальных уравнений нормального типа с постоянными коэффициентами.

Доказывается априорная оценка решения (4.4) в пространстве $H_3(T)$, для чего k-е уравнение (4.4) умножается на α_{rk}', затем эти равенства складываются и интегрируются по времени в пределах от 0 до t. В правых частях (4.4) вектор-функция содержится только под знаком интеграла по времени, поэтому проводя в полученном равенстве интегрирование по частям по времени t, имеем

$$\left|\int_0^t R_3(\mathbf{u}_{0r}, \mathbf{F}, \mathbf{P}, \partial_\tau \mathbf{v}_r)\, d\tau\right| \leqslant M_1 \int_0^t \|\mathbf{v}_r\|_{H_1}^2 d\tau + M_2 \|\partial_\tau \mathbf{v}_r\|_{L_2(\Omega\times[0,T])} + 0.5\|\mathbf{v}_r\|_{H_1}^2$$

Левая часть полученного равенства имеет вид

$$\|\partial_t \mathbf{v}_r\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_1 \int_0^t \|\partial_\tau \mathbf{v}_r\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau + c_2 \int_0^t (\mathbf{v}_r \cdot \partial_\tau \mathbf{v}_r)_{L_2(\Omega)} d\tau + \|\mathbf{v}_r\|_{H_1}^2$$

Из сравнения левой и правой частей равенства и неравенства Гронуолла вытекает равномерная при всех $0 \leqslant t \leqslant T$ оценка, не зависящая от r

$$\|\mathbf{v}_r\|_{H_1}^2 + \|\partial_t \mathbf{v}_r\|_{L_2(\Omega)}^2 \leqslant M_3 \tag{4.5}$$

Здесь постоянные M_k, $k = 1,2,3$ зависят лишь от величины соответствующих норм $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{F}$ и длины отрезка $[0, T]$.

В силу априорной оценки (4.5) из последовательности приближений $\mathbf{v}_r$ можно выбрать слабо сходящуюся в пространстве $H_3(T)$ к $\mathbf{v}_0$ подпоследовательность. Оператор вложения $H_3(T)$ в пространство $L_2(\Omega)$ вполне непрерывен, поэтому $\mathbf{v}_0 = 0$ при $t = 0$.

Система (4.4) приводится к виду (4.3), для чего k-е равенство (4.4) умножается на $d_k(t)$, затем равенства складываются, интегрируются по времени и производится, где необходимо, интегрирование по частям по времени. Переход к пределу показывает что $\mathbf{v}_0$ удовлетворяет уравнению (4.3) для любой функции φ вида

$$\varphi = \sum_{k=0}^N d_k(t)\psi_k, \qquad d_k(T) = 0 \tag{4.6}$$

В силу того, что множество функций вида (4.6) плотно в $H_3{}^\circ(T)$, вытекает, что $\mathbf{v}_0$ — решение эквивалентной задачи. Для доказательства единственности решения в уравнении (4.3) следует положить

$$\varphi = \chi(t) = \int_t^s \mathbf{v}(\tau)\, d\tau, \qquad \chi(t) = 0, \quad \text{если } t \geqslant s$$

при $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{P} = 0$, $\mathbf{\Phi} = 0$. После элементарных оценок, подобных проведенным для получения неравенства (4.5), получаем

$$\|\chi(0)\|_{H_1}^2 + \|\mathbf{v}(s)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leqslant M_4 \left\{\int_0^s \|\chi(t)\|_{H_3(t)}^2 dt + \|\chi(0)\|_{L_2(\Omega)}^2\right\}$$

откуда и вытекает единственность решения эквивалентной задачи.

Из единственности решения следует, что вся последовательность приближений метода Бубнова — Галеркина $\mathbf{v}_r$ сходится слабо в $H_3(T)$.

Рассуждения относительно $l - 1$ раз продифференцированных по времени уравнений (4.4), аналогичные приведенным выше, заканчивают доказательство второй части теоремы 4.1. Сильную сходимость подпоследовательности приближенных решений метода Бубнова — Галеркина можно показать, исходя из плотности функций вида

$$\sum_{k=0}^N c_k(t)\psi_k, \qquad c_k(t) \in C^\infty(0, T)$$

в пространстве $B_1^{n,m}(T) \cap B_2{}^n(T)$.

Случай $n = m_C + 1$ рассматривается аналогично: задача сводится к эквивалентной задаче подстановкой (3.1). Некоторое отличие исследования эквивалентной задачи от проведенного выше при $n = m_C$ состоит в следующем: во-первых, для получения априорной оценки решений системы Бубнова — Галеркина надо k-е уравнение системы умножать на α_{rk}, а не на α_{rk}' и, во-вторых, необходимо доказать для предельного элемента последовательности Бубнова — Галеркина ограниченность в норме $L_2(\Omega)$ для всех $0 \leqslant t \leqslant T$. Методика исследования эквивалентной задачи полностью совпадает с соответствующей методикой исследования линейного параболического уравнения [6].

Замечание 1. Условия 6), 7) теоремы 4.1 можно заменить следующими:

$$\partial_t^k C(\partial_t)\mathbf{F} \in L_2[0, T; H_1^-]$$
$$\partial_t^k C(\partial_t) P_i \in L_2[0, T; W_2^{-1/2}(S)]$$

Замечание 2. Все полученные выше результаты справедливы для плоской задачи вязкоупругости.

Замечание 3. Все полученные выше результаты можно обобщить на случай анизотропного тела, причем коэффициенты соответствующих полиномов могут кусочно-непрерывно зависеть от координат x_i и времени t.

Автор благодарит И. И. Воровича за внимание и помощь в работе.

Поступила 16 VI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений М., Физматгиз, 1958.
2. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., «Мир», 1971.
3. Слободецкий Л. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, т. 197.
4. Ciobanu G. H. On the existence and uniqueness of solution in linear viscoelasticity. First boundary value problem. Arch. of Mech. 1971, vol. 23, No. 1.
5. Ворович И. И. О методе Бубнова — Галеркина в нелинейной теории колебаний пологих оболочек. Докл. АН СССР, 1956, т. 110, № 5.
6. Ладыженская О. А., Солонников А. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1967.