

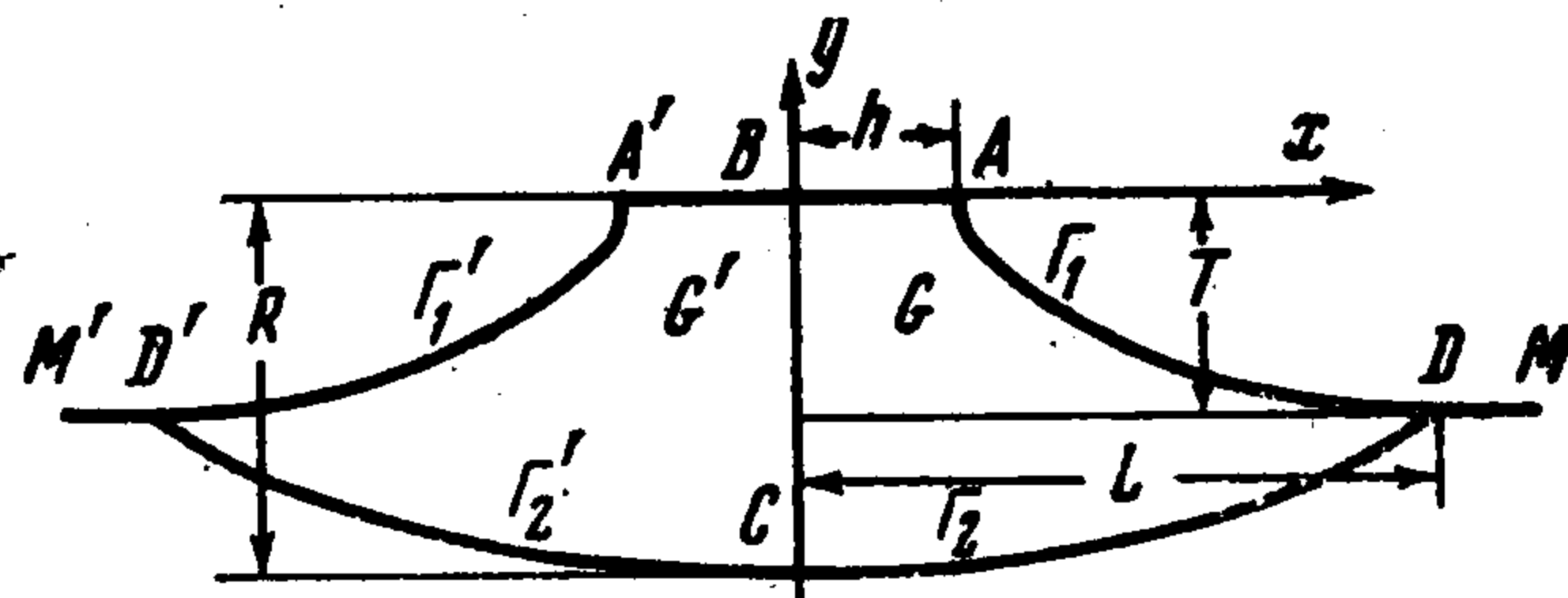
**О ФОРМЕ ЛИНЗЫ ПРЕСНЫХ ВОД ПРИ ЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ ИСПАРЕНИЯ**

**Ю. И. Капранов**

(Новосибирск)

Строится решение задачи об установившейся линзе пресных вод, образованной фильтрацией из канала. На свободной поверхности функция тока задается в виде линейной комбинации координат, включающей частные зависимости, рассмотренные ранее В. Н. Эмихом [1]. Граница раздела между пресными и солеными водами, свободная поверхность и характерные размеры линзы находятся с использованием аналитической теории линейных дифференциальных уравнений.

1. **Постановка задачи.** Геометрия рассматриваемой области течения представлена на фиг. 1. Нижняя полуплоскость  $y \leq 0$  занята пористой средой с постоянными пористостью  $m$  и коэффициентом фильтрации  $K$ . Пресные воды плотности  $\rho_1$ , фильтруясь из канала  $A'BA$  ширины  $2h$ , продавливают поверхность более плотных грунтовых вод и образуют линзу  $G \cup G'$ . Предполагается, что расположенные ниже границы раздела  $M'D'CDM$  соленые грунтовые воды плотности  $\rho_2$  ( $\rho_2 > \rho_1$ ) неподвижны [2], а движение в линзе установившееся. Последнее обеспечивается наличием испарения со свободной поверхности  $\Gamma_1 \cup \Gamma_1'$ , которое задается в виде следующего линейного соотношения между функцией тока  $\psi$  и координатами свободной поверхности:  $\psi - \varepsilon_2 y + \varepsilon_1 x = \text{const}$ . В силу симметрии течения относительно оси  $x = 0$  ниже будет рассматриваться только правая половина  $x \geq 0$ .



Фиг. 1

Если ввести параметры

$$\delta = \frac{\rho_2}{\rho_1} - 1, \quad \delta_1 = T \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad \mu = \frac{\varepsilon_1}{K}, \quad \nu = \frac{\varepsilon_2}{K}$$

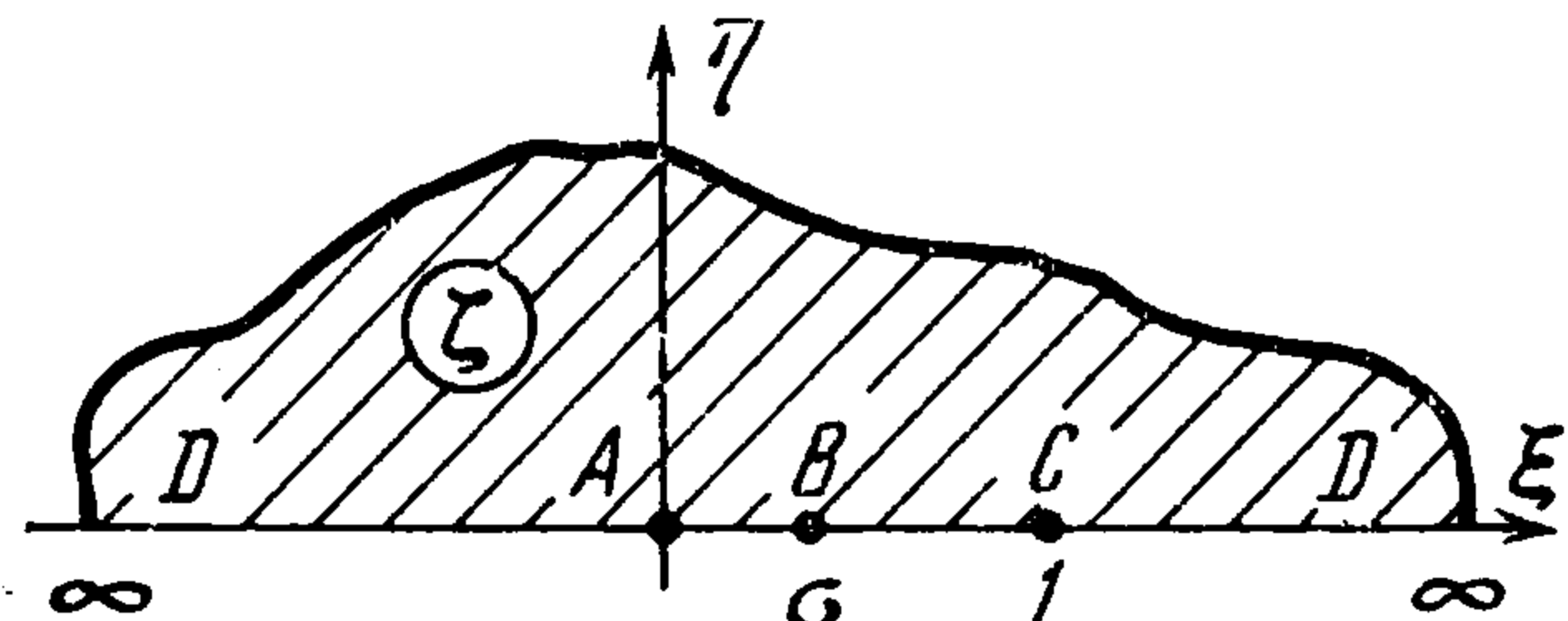
то при сформулированных выше предположениях приведенный потенциал  $\varphi$  и приведенная функция тока, по-прежнему обозначаемая через  $\psi$ , будучи гармоническими функциями, удовлетворяют следующим условиям [2]:

$$\begin{aligned} \varphi|_{AB} = \psi|_{BC} = \psi|_{CD} = (\varphi - \delta y - \delta_1)|_{CD} = (\varphi + y)|_{DA} = \\ = (\psi + \mu x - \nu y - \mu L - \nu T)_{DA} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

В процессе решения этой задачи величины  $\mu, \nu$ , ширина канала  $2h$  и максимальное расстояние  $T$  свободной поверхности от оси  $y = 0$  считаются заданными положительными числами, причем

$$0 < \mu, \nu < 1, \quad \mu < \delta \quad (1.2)$$

Вводятся следующие функции:  $z(\zeta)$  ( $z = x + iy$ ), которая конформно отображает верхнюю полуплоскость  $R_{\zeta}^+$  плоскости вспомогательной переменной  $\zeta = \xi + i\eta$  на область течения  $G$  (соответствие точек указано на фиг. 2), и



Фиг. 2

$$\omega = \varphi + i\psi, \quad w = \frac{d\omega}{dz} = u + iv$$

$$Z = i\sqrt{\zeta - \sigma} \frac{dz}{d\zeta}, \quad \Omega = \sqrt{\zeta - \sigma} \frac{d\omega}{d\zeta}$$

(1.3)

Здесь под  $\sqrt{\zeta - \sigma}$  понимается непрерывная в  $R_{\zeta}^+$  ветвь, такая, что  $\arg \sqrt{\zeta - \sigma} = 0$  при  $\zeta = \xi > \sigma$ .

2. Построение функций  $\Omega$  и  $Z$ . При указанном выборе ветви корня условия (1.1) приводят к следующей краевой задаче для  $\Omega$  и  $Z$  (см. [2]): на вещественной оси  $\eta = 0$

$$\operatorname{Im}(\Omega - Z) = \operatorname{Im}[(i - \nu)\Omega + i\mu Z] = 0 \quad (-\infty < \xi < 0)$$

$$\operatorname{Im} \Omega = \operatorname{Im} Z = 0 \quad (0 < \xi < 1) \quad (2.1)$$

$$\operatorname{Im} \Omega = \operatorname{Im}(i\Omega + i\delta Z) = 0 \quad (1 < \xi < +\infty)$$

( $\operatorname{Im} f$  и  $\operatorname{Re} f$  — мнимая и вещественная части  $f$  соответственно).

Краевые условия (2.1) и принцип симметрии Шварца позволяют продолжить  $\Omega$  и  $Z$  в нижнюю полуплоскость и затем определить формулы обхода вокруг особых точек 0, 1 и  $\infty$  [2]. Можно проверить, что в данном случае

$$[\nu - i(1 + \mu)]\Omega^- = [\nu + i(1 - \mu)]\Omega^+ + 2i\mu Z^+ \quad (\zeta = \zeta_1 = 0)$$

$$[\nu - i(1 + \mu)]Z^- = 2i\Omega^+ + [\nu - i(1 - \mu)]Z^+$$

$$\Omega^- = \Omega^+, \quad \delta Z^- = -2\Omega^+ - \delta Z^+ \quad (\zeta = \zeta_2 = 1) \quad (2.2)$$

$$[\nu + i(1 + \mu)]\Omega^- = [\nu - i(1 - \mu)]\Omega^+ - 2i\mu Z^+ \quad (\zeta = \zeta_3 = \infty)$$

$$[\nu + i(1 + \mu)]Z^- = -2[\nu - i(\delta + 1 - \mu)]\Omega^+ / \delta - \\ - [\nu + i(1 - \mu - 4\mu / \delta)]Z^+$$

Здесь для  $k = 1, 2$  через  $\Omega^+$  и  $Z^+$  обозначены предельные значения  $\Omega$  и  $Z$  соответственно из  $R_{\zeta}^+$  на отрезке вещественной оси  $(\zeta_k, \zeta_{k+1})$ ; через  $\Omega^-$  и  $Z^-$  — предельные значения этих функций на том же отрезке после обхода точки  $\zeta_k$  по часовой стрелке на угол  $2\pi$ . Для  $\zeta_3$  величины  $\Omega^{\pm}$  и  $Z^{\pm}$  имеют тот же смысл, но относительно переменной  $\tau = -1/\zeta$ .

Рассмотрим дифференциальное уравнение Римана

$$\frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} + k_1(\zeta) \frac{d\Phi}{d\zeta} + k_2(\zeta) \Phi = 0$$

$$k_1(\zeta) = \frac{1 - \alpha_1 - \beta_1}{\zeta} + \frac{1 - \alpha_2 - \beta_2}{\zeta - 1} \quad (2.3)$$

$$k_2(\zeta) = \frac{1}{\zeta(\zeta - 1)} \left( -\frac{\alpha_1\beta_1}{\zeta} + \frac{\alpha_2\beta_2}{\zeta - 1} + \alpha_3\beta_3 \right)$$

с тремя особыми точками 0, 1,  $\infty$ , с показателями  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \beta_3$ , которые удовлетворяют условию Фукса [3]

$$\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_3 = 1 \quad (2.4)$$

Предположим, что искомые функции  $\Omega$  и  $Z$  — решения этого уравнения [2] при некотором выборе показателей. Для определения последних используем тот факт [3], что в окрестности особой точки  $\zeta_k$  ( $k = 1, 2$ ) фундаментальные решения уравнения (2.3), исключая особые случаи, можно представить в виде  $\Phi_1^k(\zeta) = (\zeta - \zeta_k)^{\alpha_k} \Phi_{1k}(\zeta)$ ,  $\Phi_2^k(\zeta) = (\zeta - \zeta_k)^{\beta_k} \Phi_{2k}(\zeta)$  с голоморфными в окрестности и отличными от нуля в самой точке  $\zeta_k$  функциями  $\Phi_{1k}$ ,  $\Phi_{2k}$ . В окрестности бесконечно удаленной точки представления аналогичны с очевидной заменой  $\zeta$  на  $-1/\zeta$  и  $\alpha_k, \beta_k$  на  $\alpha_3, \beta_3$  соответственно. В силу сделанного предположения должны найтись постоянные  $a_k, b_k, c_k, d_k$ , такие, что в некоторой окрестности точки  $\zeta_k$

$$\Omega = a_k \Phi_1^k + b_k \Phi_2^k, \quad Z = c_k \Phi_1^k + d_k \Phi_2^k \quad (2.5)$$

Отсюда можно найти формулы обхода для  $\Omega$  и  $Z$ . Если сравнить их с (2.2) и воспользоваться естественным ограничением  $w \neq \text{const}$ , то получим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= m_1, & \beta_1 &= 2p + n_1, & \alpha_2 &= m_2 \\ \beta_2 &= n_2 + 1/2, & \alpha_3 &= q - p + m_3 + 1/2 \\ \beta_3 &= -q - p + n_3 + \begin{cases} 1, & \delta \geq \mu(2 + \delta) \\ 0, & \delta < \mu(2 + \delta) \end{cases} \\ a_1 &= -\mu c_1, & a_2 &= -\delta c_2, & b_1 &= d_1, & b_2 &= 0 \\ a_3 &= 2i\mu c_3 / (a + v - 2i\mu / \delta), & b_3 &= -2i\mu d_3 / (a - v + 2i\mu / \delta) \\ 2\pi p &= \text{arc tg } \frac{1 + \mu}{v}, & 2\pi q &= \text{arc tg } \frac{\delta - \mu(2 + \delta)}{a\delta} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$a = [v^2 + 4\mu(\delta - \mu)(1 + \delta) / \delta^2]^{1/2}, \quad |\text{arc tg } \dots| < \pi/2$$

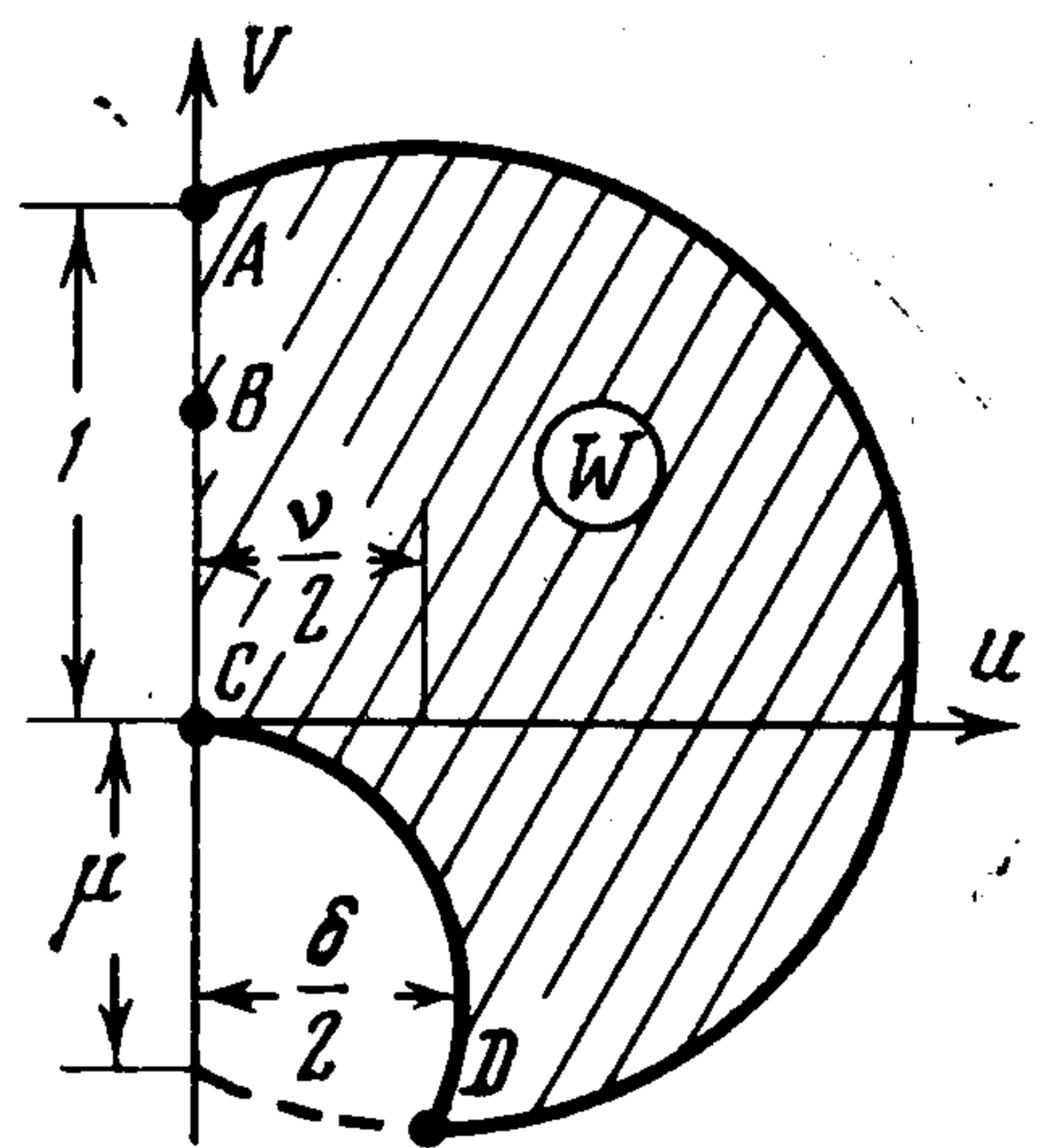
Здесь  $m_1, n_1, \dots, n_3$  — пока неопределенные целые числа.

Из интегрируемости] (в обычном смысле) функций  $\Omega / \sqrt{\zeta - \sigma}$  и  $Z / \sqrt{\zeta - \sigma}$  в каждой из окрестностей особых точек  $\zeta_k$  следует, что  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \geq -1$ , а  $\alpha_3, \beta_3 \geq 1/2$ . В силу (2.6) это означает, что  $m_1 > 0, m_2 \geq 0, n_1 \geq -1, n_2 \geq -1, m_3 \geq 1, n_3 \geq 0$  при  $\delta \geq \mu(2 + \delta)$  и  $n_3 \geq 1$  при  $\delta < \mu(2 + \delta)$ . Дальнейшие неравенства получаются из годографа скорости, изображенного (в случае выполнения (1.2)) на фиг. 3. Так, для  $\zeta = 0$  из (2.5) и (2.6) следует

$$w(0) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} i \frac{d_1 - c_1 \mu \zeta^{\alpha_1 - \beta_1} \Phi_{11} / \Phi_{21}}{d_1 + c_1 \zeta^{\alpha_1 - \beta_1} \Phi_{11} / \Phi_{21}}$$

Поэтому  $w(0) = i$  лишь при  $\alpha_1 > \beta_1$ . Аналогично получается, что  $\alpha_2 > \beta_2$  и  $\alpha_3 > \beta_3$ , т. е.  $m_1 \geq n_1 + 1, m_2 \geq n_2 + 1, m_3 \geq n_3 + 1$  при  $\delta \geq \mu(2 + \delta)$  и  $m_3 \geq n_3$  при  $\delta < \mu(2 + \delta)$ . Подстановка  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  из (2.6) в условие (2.4) приводит последнее к уравнению в целых числах

$$m_1 + n_1 + m_2 + n_2 + m_3 + n_3 + \begin{cases} 1, & \delta \geq \mu(2 + \delta) \\ 0, & \delta < \mu(2 + \delta) \end{cases} = 0$$



Фиг. 3

Отсюда следует, что  $m_1 = m_2 = 0$ ,  $n_1 = n_2 = -1$ ,  $m_3 = 1$ ,  $n_3 = 0$  при  $\delta \geq \mu(2 + \delta)$  и  $n_3 = 1$  при  $\delta < \mu(2 + \delta)$ ; поэтому

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 1 - \gamma = 2p - 1, \quad \beta_2 = -1/2 \\ \alpha_3 = \alpha = q - p + 3/2, \quad \beta_3 = \beta = 1 - q - p \end{aligned} \quad (2.7)$$

Известно [3], что фундаментальные решения уравнения (2.3) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Phi_1^1 &= F(\alpha, \beta; \gamma; \zeta) \\ \Phi_2^1 &= \zeta^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma; 2 - \gamma; \zeta) \\ \Phi_1^2 &= F(\alpha, \beta; \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - \zeta) \\ \Phi_2^2 &= (1 - \zeta)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma + 1 - \alpha - \beta; 1 - \zeta) \\ \Phi_1^3 &= (-\zeta)^{-\alpha} F(\alpha, \alpha + 1 - \gamma; \alpha + 1 - \beta; 1/\zeta) \\ \Phi_2^3 &= (-\zeta)^{-\beta} F(\beta + 1 - \gamma, \beta; \beta + 1 - \alpha; 1/\zeta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь  $F(\alpha, \beta; \gamma; \zeta)$  — гипергеометрический ряд, сходящийся внутри единичного круга; через  $\zeta^\lambda$  ( $\lambda$  — вещественное) обозначена непрерывная в  $R_\zeta^+$  ветвь, определяемая равенством  $\zeta^\lambda = |\zeta|^\lambda e^{i\lambda \arg \zeta}$ , где  $\arg \zeta$  заключен между  $-\pi$  и  $\pi$  (разрез по отрицательной полуоси).

Для определения коэффициентов  $a_k, \dots, d_k$  в (2.5) сначала требуется, чтобы  $\Omega$  и  $Z$  удовлетворяли краевым условиям (2.1). Последние выполняются лишь тогда, когда коэффициенты  $c_1, d_1, c_2, d_2, a_3 e^{i\pi\alpha}, b_3 e^{i\pi\beta}$  вещественные (здесь используется (2.6)). Вместе с тем, любые два локальных представления функции  $\Omega$  (или  $Z$ ) обязаны совпадать в общей для них области определения. Если взять, например, из (2.5) выражения для  $\Omega$  и  $Z$ , справедливые лишь внутри круга  $|\zeta| < 1$  ( $k = 1$ ), и продолжить по известным формулам [3]  $\Phi_1^1$  и  $\Phi_2^1$  внутрь круга  $|\zeta - 1| < 1$ , то в результате получатся новые представления для  $\Omega$  и  $Z$  в этом круге. Но последние должны совпадать с (2.5) при  $k = 2$ , что, в силу линейной независимости  $\Phi_1^2$  и  $\Phi_2^2$ , эквивалентно совпадению коэффициентов при каждой из  $\Phi_1^2, \Phi_2^2$ . Это приводит к уравнениям, связывающим  $a_1, \dots, d_1$  с  $a_2, \dots, d_2$ . Аналогично выводятся соотношения между  $a_2, \dots, d_2$  и  $a_3, \dots, d_3$ . Не приводя этих довольно громоздких вычислений, отметим лишь результат

$$\begin{aligned} a_1 &= -\lambda\mu, \quad b_1 = \lambda\mu \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + 1 - \gamma) \Gamma(\beta + 1 - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \Gamma(2 - \gamma)} \\ c_1 &= \lambda, \quad d_1 = b_1 \\ b_2 &= 0, \quad c_2 = \lambda \frac{1 + \mu}{1 + \delta} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} \\ a_2 &= -\delta c_2, \quad d_2 = \lambda(1 + \mu) \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \\ a_3 &= -\delta c_2 \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1 - \gamma) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta + 1 - \gamma) \Gamma(\beta)} e^{-i\pi\alpha} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$b_3 = -\delta c_2 \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1 - \gamma) \Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha + 1 - \gamma) \Gamma(\alpha)} e^{-i\pi\beta}$$

$$c_3 = a_3 (\nu + a - 2i\mu / \delta) / 2i\mu$$

$$d_3 = b_3 (\nu - a + 2i\mu / \delta) / 2i\mu$$

Здесь  $\Gamma(\alpha)$  — гамма-функция и  $\lambda$  — пока произвольный параметр. Итак, решение краевой задачи (2.1) имеет вид

$$\Omega = \lambda\Omega_0, \quad Z = \lambda Z_0 \quad (2.10)$$

с  $\Omega_0, Z_0$  из (2.5),  $\Phi_1^k$  и  $\Phi_2^k$  из (2.8) и  $a_k, \dots, d_k$  из (2.9), если в последних положить  $\lambda = 1$ .

3. Свободная поверхность, граница раздела и параметры отображения. В силу (1.3) в окрестности особой точки  $\zeta_k$

$$\omega = \omega_k + \lambda \int_{\zeta_k}^{\zeta} \frac{\Omega_0 ds}{\sqrt{s - \sigma}}, \quad z = z_k - i\lambda \int_{\zeta_k}^{\zeta} \frac{Z_0 ds}{\sqrt{s - \sigma}}$$

$$\omega_1 = i[\nu T + \mu(L - h)], \quad z_1 = h$$

$$\omega_2 = \delta_1 - \delta R, \quad z_2 = -iR$$

$$\omega_3 = T, \quad z_3 = L - iT$$

Определенные таким образом  $\omega$  и  $z$  будут решением искомой задачи тогда и только тогда, когда любые два «смежных» представления для  $\omega$  (или для  $z$ ) совпадают в одной общей для них точке и выполняются (1.1). Можно проверить, что эти требования эквивалентны совокупности следующих двух систем уравнений:

$$h = \lambda \int_0^{\sigma} \frac{\operatorname{Re} Z_0^+ ds}{\sqrt{\sigma - s}}, \quad T = -\lambda \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im} Z_0^+ ds}{\sqrt{\sigma - s}} \quad (3.1)$$

$$L = \lambda \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} Z_0^+ ds}{\sqrt{s - \sigma}}, \quad R = \lambda \int_{\sigma}^1 \frac{\operatorname{Re} Z_0^+ ds}{\sqrt{s - \sigma}}$$

$$\nu T + \mu(L - h) = \lambda \int_0^{\sigma} \frac{\operatorname{Re} \Omega_0^+ ds}{\sqrt{\sigma - s}}, \quad \delta_1 - \delta R = \lambda \int_{\sigma}^1 \frac{\operatorname{Re} \Omega_0^+ ds}{\sqrt{s - \sigma}}$$

$$T - R = \lambda \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} Z_0^+ ds}{\sqrt{s - \sigma}}, \quad L - h = \lambda \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Re} Z_0^+ ds}{\sqrt{\sigma - s}} \quad (3.2)$$

Как отмечалось в п. 1, ширина канала  $2h$  и наибольшее расстояние  $T$  свободной поверхности от оси  $y = 0$  заданы. Поэтому первые два уравнения системы (3.1) можно считать определяющими параметрами  $\sigma$  и  $\lambda$ , а последние два — как выражения для характерных размеров линзы  $L$  и  $R$ . Оказывается, что при значениях  $\sigma, \lambda, h, L$  и  $R$ , определенных указанным образом, система (3.2) также удовлетворяется. В самом деле, построенные в п. 2 функции  $\Omega_0 / \sqrt{\zeta - \sigma}$  и  $Z_0 / \sqrt{\zeta - \sigma}$  регулярны и интегрируемы

в особых точках  $\zeta_k$ . Поэтому интеграл от каждой из них по вещественной оси равен нулю, т. е.

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\sigma}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \Omega_0^+ ds}{\sqrt{s-\sigma}} + \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im} \Omega_1^+ ds}{\sqrt{\sigma-s}} = \int_{-\infty}^{\sigma} \frac{\operatorname{Re} \Omega_1^+ ds}{\sqrt{\sigma-s}} = \\ &= \int_{\sigma}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} Z_1^+ ds}{\sqrt{s-\sigma}} + \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im} Z_0^+ ds}{\sqrt{\sigma-s}} = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} Z^+ ds}{\sqrt{s-\sigma}} - \int_{-\infty}^{\sigma} \frac{\operatorname{Re} Z_0^+ ds}{\sqrt{\sigma-s}} \end{aligned}$$

Отсюда следует, в частности, что

$$L - h - \lambda \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Re} Z_0^+ ds}{\sqrt{\sigma-s}} = \lambda \left[ \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} Z_0^+ ds}{\sqrt{s-\sigma}} - \int_{-\infty}^{\sigma} \frac{\operatorname{Re} Z_0^+ ds}{\sqrt{\sigma-s}} \right] = 0$$

Это равносильно четвертому уравнению системы (3.2) (остальные проверяются аналогично).

Уравнение для определения параметра  $\sigma$  представим в виде

$$\frac{h}{T} = F(\sigma) \equiv \int_0^{\sigma} \frac{\operatorname{Re} Z_0^+ ds}{\sqrt{\sigma-s}} \int \left[ - \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im} Z_1^+ ds}{\sqrt{\sigma-s}} \right] \quad (3.3)$$

При помощи неравенства  $|q| \leq p$  можно показать, что числитель и знаменатель выражения для функции  $F(\sigma)$  положительны. Из  $1.5 < \gamma < 2$  следует [4], что  $F(+0) = \nu / (1 + \mu)$  и  $F(1-0) = +\infty$ . Поэтому для любых положительных значений параметров  $h$  и  $T$ , таких, что

$$h / T > \nu / (1 + \mu) \quad (3.4)$$

уравнение (3.3) будет разрешимо на отрезке  $0 < \sigma < 1$ . Если через  $Q$  обозначить полный расход со свободной поверхности  $\Gamma_1$  ( $QK^{-1} = \nu T + \mu(L - h)$ ), то условие (3.4) можно записать следующим образом:

$$Q < Kh + K\mu L$$

Последнее означает, что расход со свободной поверхности за счет испарения не превосходит (в установившемся случае) расхода из канала при свободной фильтрации. Свободная поверхность имеет вид

$$\begin{aligned} x(\xi) &= L - \lambda \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\operatorname{Re} Z_0^+ ds}{\sqrt{\sigma-s}}, & y(\xi) &= -T - \lambda \int_{-\infty}^{\xi} \frac{\operatorname{Im} Z_0^+ ds}{\sqrt{\sigma-s}} \\ & & & (-\infty < \xi < -1) \\ x(\xi) &= h - \lambda \int_0^{\xi} \frac{\operatorname{Re} Z_1^+ ds}{\sqrt{\sigma-s}}, & y(\xi) &= -\lambda \int_0^{\xi} \frac{\operatorname{Im} Z_1^+ ds}{\sqrt{\sigma-s}} \\ & & & (-1 < \xi < 0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Можно показать, что  $dy / d\xi > 0$ ; это придает смысл полученному выражению для  $\Gamma_1$ . Вблизи  $A$  ( $\xi < 0$  близко к нулю)  $dx / dy = \operatorname{ctg}(2\pi\rho) - (-\xi)^{\gamma-1} \mu_1 \Phi_{11} / \Phi_{21}$  ( $\mu_1 > 0$  — постоянная), поэтому в пределе

$$dx / dy|_A = \nu / (1 + \mu) > 0$$

Вместе с тем,  $dx/d\xi > 0$ , если  $\xi$  достаточно мало, т. е.  $x = x(y)$  локально строго монотонно возрастает. Это приводит к «выеданию» свободной поверхности [1]. Расчеты показывают, что эта особенность, представляющая собой недостаток рассматриваемой модели, при реальных значениях параметров проявляется лишь в очень малой окрестности точки  $A$ .

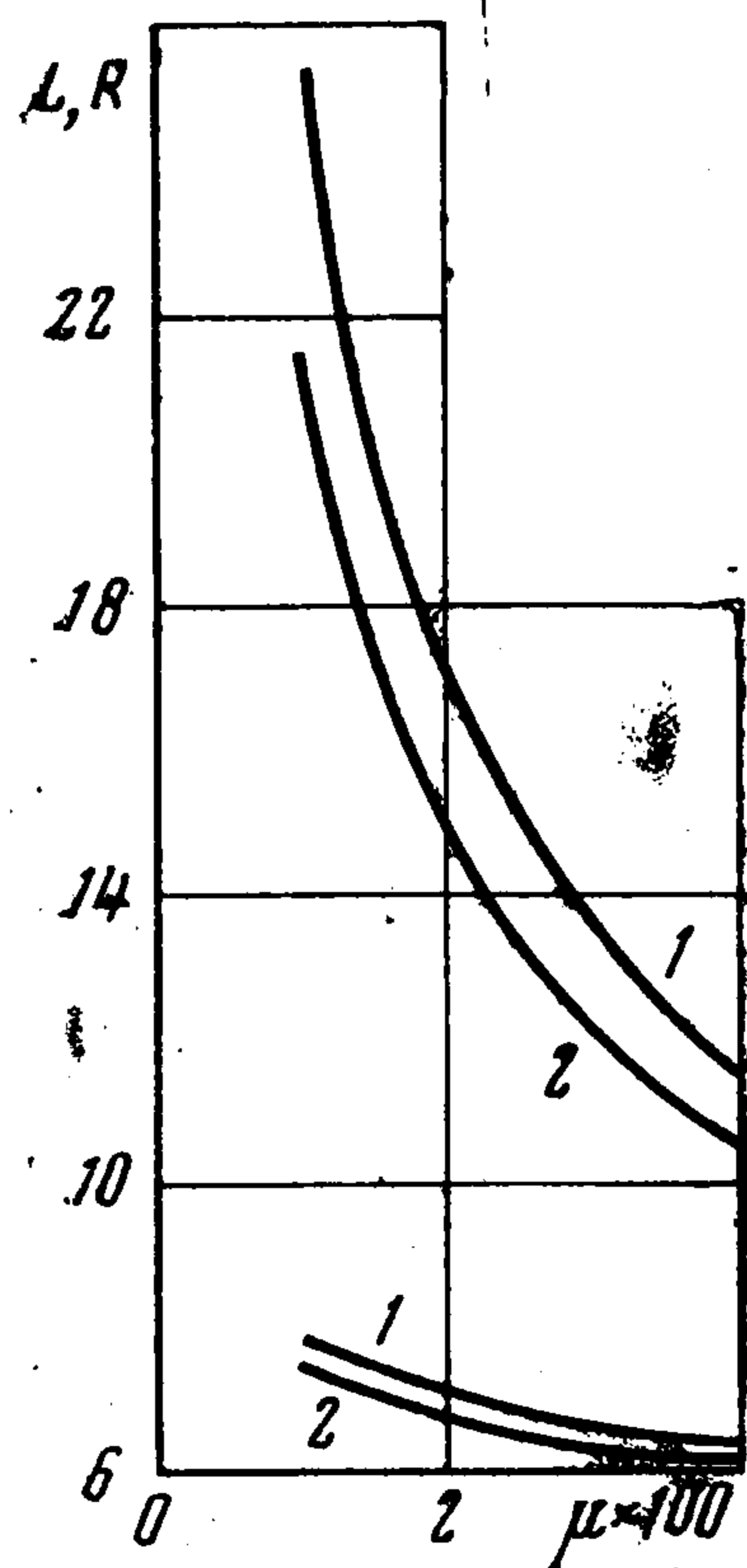
Граница раздела представляется в виде

$$x(\xi) = L - \lambda \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\text{Im } Z_1^+ ds}{\sqrt{s-\sigma}}, \quad y(\xi) = -T + \lambda \int_{\xi}^{+\infty} \frac{\text{Re } Z_1^+ ds}{\sqrt{s-\sigma}} \quad (3.6)$$

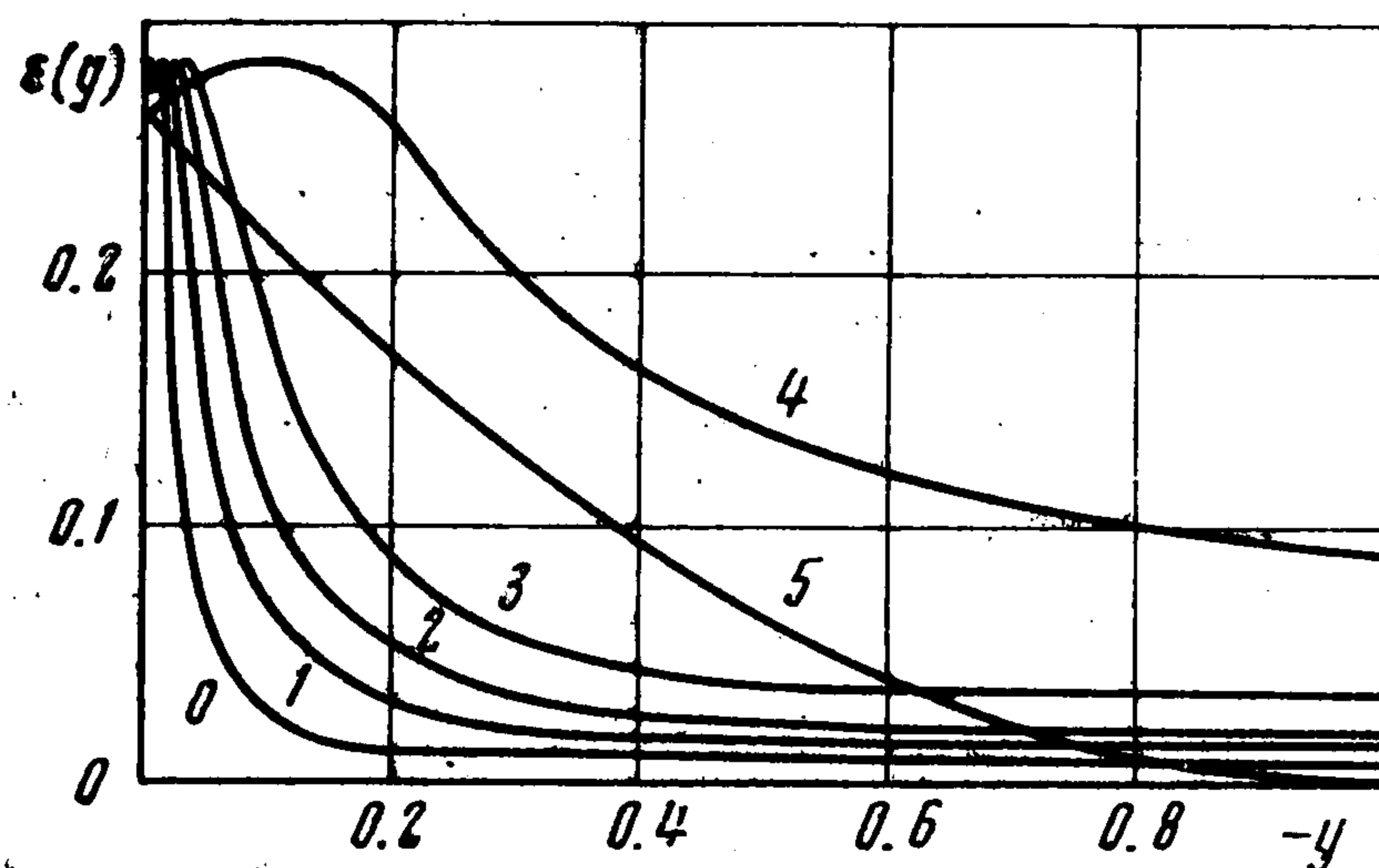
$$(1 < \xi < +\infty)$$

Можно показать, что  $dx/d\xi > 0$ . Численные результаты говорят о монотонном возрастании  $y = y(x)$ .

4. Результаты вычислений. Зависимость характерных размеров линзы  $L$  и  $R$  от параметров  $\mu$  и  $\nu$  иллюстрируется фиг. 4. Верхняя пара кривых представляет собой график  $L = L(\mu)$ , а нижняя —  $R = R(\mu)$ . Здесь  $h = T = 1$ ,  $\delta = 0.1$  и  $\nu = 0.01$ ,  $0.1$  для кривых 1 и 2 соответственно. Из графиков видно, что размеры линзы  $L$  и  $R$  в большей степени зависят от  $\mu$ , чем от  $\nu$ . Подобное поведение характерно и для частных моделей:  $\mu = 0$  или  $\nu = 0$  [1]. Для  $h = 5$ ,  $T = 1$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\nu = 0.281$  и  $\mu = 0$  в [1] было получено  $L = 39.355$  и  $R = 9.56$ . Если в рассматриваемой постановке  $h$ ,  $T$ ,  $\delta$  и  $\nu$  приравнять указанным выше значениям, а  $\mu$  последовательно уменьшать ( $\mu =$



Фиг. 4



Фиг. 5

$= 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005$  и т. д.), то  $L$  и  $R$  будут стремиться к своим пределам:  $L = 23.05, 27.41, 35.43, 37.06, \dots$ ;  $R = 9.07, 9.26, 9.52, 9.57, \dots$ . Подобное согласование с результатами работы [1] наблюдается и при  $\nu \rightarrow 0$ .

Частные модели ( $\mu = 0$  или  $\nu = 0$ ) обладают тем недостатком, что определяемая на их основе закономерность изменения интенсивности испарения с глубиной отличается от реальной [1], которая, как известно, достаточно хорошо аппроксимируется следующей зависимостью, предложенной С. Ф. Аверьяновым [5]:

$$\epsilon^\circ(y) = \epsilon_0 (1 + y/y_0)^n \quad (4.1)$$

Здесь  $K\epsilon^\circ ds$  — величина испарения с элемента дуги  $ds$  свободной поверхности ( $s$  отсчитывается от точки  $A$ ),  $K\epsilon_0$  равно интенсивности испарения с поверхности земли и  $y_0$  — так называемая критическая глубина, начиная с которой испарение считается равным нулю. Предполагается, что показатель  $n$  заключен между 1 и 3. В рассматриваемой постановке интенсивность испарения  $\epsilon$  со свободной поверхности  $\Gamma_1$  имеет

следующий вид:

$$\varepsilon(s) = \mu dx/ds - \nu dy/ds \quad (4.2)$$

Результаты расчетов, проведенных по этой формуле, представлены на фиг. 5. Кривые 1—4 описывают поведение  $\varepsilon = \varepsilon(y)$  при  $\mu = 0.005, 0.01, 0.02$  и  $0.08$  соответственно. Для сравнения там же нанесен график зависимости (4.1) при  $n = 2$  и  $y_0 = T$  (кривая 5); предполагалось, что  $T = 1, h = 5, \delta = 0.1, \nu = 0.281$ . Если сравнить их с кривой, взятой из [1] и на фиг. 5 помеченной индексом нуль, то видно, что введение одновременно параметров  $\mu$  и  $\nu$  позволяет в целом существенно точнее аппроксимировать зависимость (4.1).

Из (4.2) следует, что при  $s = 0$

$$\varepsilon(0) = \nu / \sqrt{\nu^2 + (1 + \mu)^2}$$

В силу слабой зависимости  $\varepsilon(0)$  от  $\mu$  ( $\mu$  мало) в расчетах полагалось  $\varepsilon_0 = \nu / \sqrt{1 + \nu^2}$  и параметр  $\mu$  варьировался так, чтобы добиться приемлемого согласования зависимостей (4.2) и (4.1). Из графиков фиг. 5 видно, что предположения (1.2) достаточно разумны, так как уже для  $\mu = 0.08$  кривая  $\varepsilon(y)$  из (4.2) в целом значительно превышает кривую  $\varepsilon^0(y)$  из (4.1).

Автор благодарит В. Н. Эмиха, с которым неоднократно обсуждалась постановка и решение задачи.

Поступила 17 X 1972

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова - Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н. Математические методы в вопросах орошения. М., «Наука», 1969.
2. Полубаринова - Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., «Наука», 1965.
4. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, ч. 2. Трансцендентные функции. М., Физматгиз, 1963.
5. Костяков А. Н., Фаворин Н. Н., Аверьянов С. Ф. Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод. М., Изд-во АН СССР, 1956.