

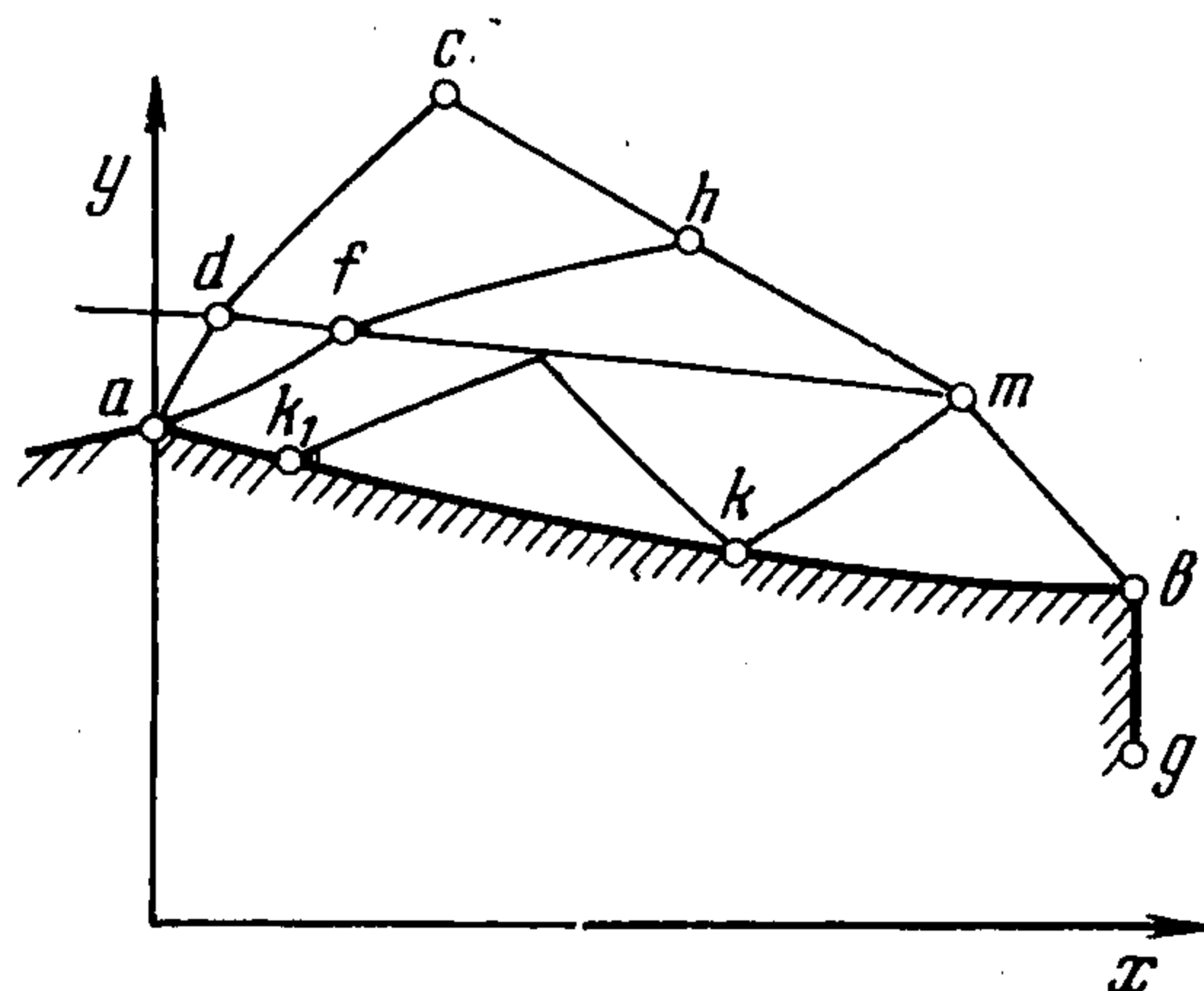
К ПОСТРОЕНИЮ КОНТУРА МИНИМАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

[А. Н. Крайко, Н. И. Тилляева

(Москва)

Рассматривается вариационная задача о построении образующей плоского или осесимметричного тела, обеспечивающей минимум волнового сопротивления при обтекании неоднородным (неизэнтропическим и неизоэнергетическим) сверхзвуковым потоком идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа в случае, когда в область определенности искомого контура попадает зона резкого изменения параметров, сохраняющихся (при отсутствии скачков) вдоль линии тока, т. е. энтропии и полной энтальпии. В пределе указанная зона вырождается в тангенциальный разрыв. Исследование ограничено конфигурациями (например соплами или кормовыми частями тел), для которых в рассматриваемой области отсутствуют ударные волны (в том числе, головной скачок уплотнения). Установлено, что известное решение [1, 2], полученное ранее для неоднородных потоков и дающее гладкий (без внутренних точек излома) оптимальный контур, в подобных случаях не может быть реализовано и должно быть заменено решением, при котором образующая оптимального тела содержит не менее одной внутренней точки излома. Так как конфигурации такого типа не могут быть исследованы с помощью использованного в [1, 2] перехода к контрольному контуру, то для получения необходимых условий экстремума, определяющих форму оптимальной образующей приходится применять общий метод множителей Лагранжа в форме, развитой в [3-5]. На основе полученных условий оптимальности разработан численный алгоритм и в случае течения с тангенциальным разрывом построены примеры оптимальных образующих плоских тел.

1. Рассмотрим задачу о построении образующей  $ag$  плоского ( $\nu = 0$ ) или осесимметричного ( $\nu = 1$ ) тела, которая обеспечивает минимум волнового сопротивления при обтекании сверхзвуковым потоком идеального газа. Пусть газ течет слева направо, а оси прямоугольной системы координат  $x, y$ , которая в осесимметричном случае лежит в меридиональной плоскости, расположим так, чтобы начальная точка  $a$  искомого участка образующей принадлежала оси  $y$ , как показано на фиг. 1 (при  $\nu = 1$   $x$  — ось симметрии). Из геометрических характеристик наряду с координатами точки  $a$  считаются заданными максимально допустимая длина  $X$  рассматриваемого тела и  $y_g$  — значение ординаты конечной точки контура (здесь и далее нижние индексы  $a, b, g, \dots$  приписываются параметрам в соответствующих точках). В силу ограничения на длину оптимальный контур может



Фиг. 1

содержать торец  $bg$  — участок краевого экстремума, на котором  $x \equiv X$ , а допустимые вариации  $\delta x \leq 0$ . Торце газом не обтекается, причем давление  $p^+$ , действующее на него, будем считать известной константой, не зависящей от формы искомого контура.

В общем случае направление касательной к контуру справа от точки  $a$  не обязано совпадать с направлением вектора скорости «набегающего» сверхзвукового потока слева от этой точки. Поэтому контур  $ag$  будет обтекаться с образованием либо пучка волн разрежения с центром в точке  $a$ , либо присоединенный или отошедшей ударной волны. Ограничимся первой возможностью, что соответствует обтеканию, например, кормовой части, верхней части профиля под достаточно большим углом атаки, а также контура сопла (последнее будет рассмотрено отдельно, так как для него исследование удобно проводить в верхней полуплоскости, когда ориентация контура  $ag$  оказывается отличной от изображенной на фиг. 1). В этом случае параметры потока на характеристике  $ac$  — левой границе начального пучка волн разрежения — можно считать известными функциями  $\psi$ , где  $\psi$  — функция тока, определяемая условием  $\psi_a = 0$  и уравнением

$$d\psi = cy^v \rho (u dy - v dx) \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $c$  — нормирующая константа, которая выбирается произвольно, а  $u$  и  $v$  — проекции вектора скорости на оси  $x$  и  $y$ . Уравнение (1.1) связывает приращения  $x$ ,  $y$  и  $\psi$  вдоль произвольной кривой в плоскости  $xy$  и, в частности, вдоль характеристики  $ac$ .

При отсутствии в рассматриваемой области течения ударных волн, а также каких-либо других диссипативных процессов (что предполагается) удельная энтропия газа  $s$  и его полная энтальпия  $H \equiv h + w^2 / 2$ , где  $h$  — удельная энтальпия, а  $w^2 = u^2 + v^2$  — квадрат модуля скорости, сохраняются вдоль каждой линии тока. Поэтому в общем случае неоднородного (неизэнтропического и неизоэнергетического) потока исследование удобно проводить в переменных  $\psi y$ , при использовании которых уравнения, описывающие обтекание участка  $ab$  искомого контура, имеют вид

$$L_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial y^v \rho}{\partial \psi} = 0, \quad L_2 \equiv \frac{\partial (y^v \rho v)^{-1}}{\partial y} + \frac{\partial (u/v)}{\partial \psi} = 0 \quad (1.2)$$

$$2h(p, \rho, \psi) + w^2 = 2H(\psi), \quad s(p, \rho, \psi) = S(\psi)$$

Здесь  $p$  — давление, а функции, входящие в два последних соотношения, считаются известными. По  $\psi$  указанные функции могут иметь разрывы первого рода, которым в плоскости течения отвечают тангенциальные разрывы, совпадающие с линиями тока. При переходе через подобные разрывы в общем случае рвутся все параметры, кроме давления и угла  $\theta \equiv \arctg(v/u)$ , образуемого вектором скорости с осью  $x$ . В дальнейшем ограничимся случаем, когда в область определенности участка  $ab$ , левой и правой границами которой являются характеристики  $ah$  и  $hb$ , попадает не более одной линии тангенциального разрыва. Именно такая ситуация изображена на фиг. 1, где линия тангенциального разрыва — линия тока  $dm$ . Скачком числа Маха  $M = w/a$ , где  $a = a(p, \rho, \psi)$  — скорость зву-

ка и угла Маха  $\alpha = \arcsin(1/M)$ , наблюдающимся при переходе через  $dm$ , отвечают изломы характеристик ( $ah$  — замыкающая характеристика начального пучка), как это и показано на фиг. 1.

Сформулируем вариационную задачу. При перечисленных выше условиях требуется построить образующую  $ag$ , т. е. найти зависимость  $x = \xi(y)$ , где  $0 \leq \xi(y) \leq X$ , реализующую минимум волнового сопротивления  $\chi$ . Последнее с точностью до несущественных множителя и слагаемого равно

$$\chi = \int_a^b p y^\nu dy + \frac{y_g^{1+\nu} - y_b^{1+\nu}}{1+\nu} p^+ \quad (1.3)$$

Здесь интеграл берется вдоль контура тела, на котором должно выполняться условие непротекания

$$L_3 \equiv \frac{\partial x}{\partial y} - \frac{u}{v} = 0 \quad (1.4)$$

Параметры в (1.1)–(1.4) удобно считать безразмерными. Если  $l_*$ ,  $w_*$  и  $\rho_*$  — характерные длина, скорость и плотность, то относим величины с размерностью длины к  $l_*$ , скорости — к  $w_*$ , плотности — к  $\rho_*$ , давления — к  $\rho_* w_*^2$ , функции тока — к  $\rho_* w_* l_*^{1+\nu}$  и волнового сопротивления — к  $\rho_* w_*^2 l_*^{1+\nu}$ .

2. Допустим, что искомая оптимальная конфигурация не имеет внутренних точек излома, т. е. относится к типу, изображенному на фиг. 1. Тогда решение задачи можно, как и в случае отсутствия контактного разрыва [1,2], провести методом контрольного контура. Беря на  $ac$ ,  $ah$  и  $cb$  в качестве независимой переменной функцию тока  $\psi$  и учитывая, что в точке  $m$  значение  $\psi_m = \psi_l$  фиксировано, а вариации  $\delta\vartheta$  и  $\delta w$ , в силу непрерывности  $\vartheta$  и  $p$ , связаны соотношениями

$$\delta\vartheta_{m+} = \delta\vartheta_{m-}, \quad (\rho w)_{m+} \delta w_{m+} = (\rho w)_{m-} \delta w_{m-}$$

где минус (плюс) приписан верхним (нижним) предельным значениям на тангенциальном разрыве, приходим к следующим результатам. Для оптимального контура  $ag$  на характеристике  $hb$  должно выполняться равенство ( $\lambda$  — константа, одна и та же на  $hm$  и на  $mb$ )

$$y^\nu \rho w^2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \vartheta = \lambda \quad (2.1)$$

которое (при выбранной точке  $h$ ) вместе с уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\psi} + \frac{u \sqrt{w^2 - a^2} + av}{y^\nu \rho a w^2} = 0, \quad \frac{dy}{d\psi} + \frac{v \sqrt{w^2 - a^2} - au}{y^\nu \rho a w^2} = 0 \\ u^2 \frac{d(v/u)}{d\psi} - \frac{\sqrt{w^2 - a^2}}{\rho a} \frac{dp}{d\psi} + \frac{v v}{y^{1+\nu} \rho} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

выполняющимися вдоль любой характеристики второго семейства, достаточно для построения характеристики  $hb$ . Ордината точки  $b$  при этом либо совпадает с  $y_g$ , либо (при  $y_b > y_g$ ) находится из условия (условия Буземана)

$$(\rho w^2 \operatorname{tg} \alpha \sin 2\vartheta)_b = 2(p^+ - p_b) \quad (2.3)$$

На первый взгляд кажется, что соотношения (2.1)—(2.3) вместе с произволом в выборе точки  $h$ , т. е. интенсивности начального пучка и положения  $h$  на его замыкающей характеристике, позволяют построить оптимальную характеристику  $hb$ , а затем (решив задачу Гурса) и контур  $ag$ , удовлетворяющий всем имеющимся условиям. Однако это не так. Действительно, поскольку равенство (2.1) с одной и той же константой  $\lambda$  должно выполняться на  $hb$  с обеих сторон от точки  $m$ , то с учетом непрерывности  $u$  и  $\vartheta$  в этой точке отсюда следует, что в  $m$  должно иметь место равенство

$$\Delta \equiv 1 - \omega_m = 0$$

$$(\omega = (\rho w^2 \operatorname{tg} \alpha)_+ / (\rho w^2 \operatorname{tg} \alpha)_-)$$

Так как в  $\omega$ , кроме термодинамических параметров, входит только модуль скорости, то, используя конечные соотношения из (1.2), можно показать, что  $\omega$  — функция лишь  $H_+$ ,  $H_-$ ,  $S_+$ ,  $S_-$  и давления (из самого определения  $\omega$  ясно, что при отсутствии тангенциального разрыва, когда  $H_+ = H_-$  и  $S_+ = S_-$ ,  $\omega = 1$  при любом  $p$ ). Вспоминая, что предельные значения  $H$  и  $S$  с обеих сторон тангенциального разрыва совпадают с аналогичными величинами на  $ac$ , т. е. заданы, видим, что в общем случае ( $H_+ \neq H_-$  и  $S_+ \neq S_-$ ) условие  $\Delta = 0$ , если и может выполняться, то лишь тогда, когда  $p_m$  — корень уравнения

$$\omega(H_+, H_-, S_+, S_-, p_m) = 1 \quad (2.4)$$

Таким образом, даже при условии, что данное уравнение имеет действительные положительные корни, удовлетворяющие рассматриваемой схеме течения, конфигурация, изображенная на фиг. 1, в общем случае построена быть не может.

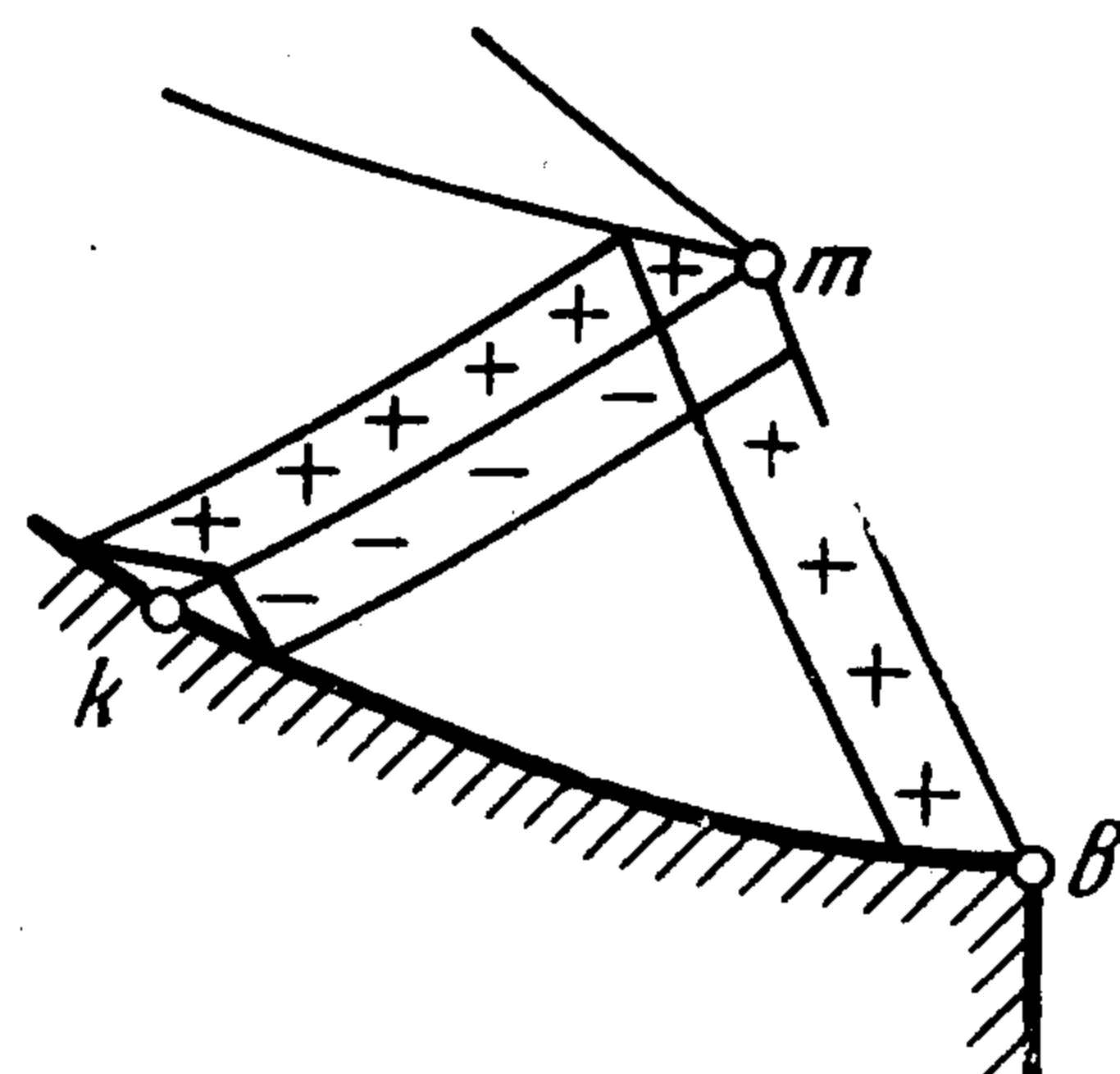
Нетрудно понять физический смысл условия (2.4). Можно показать, что коэффициент отражения от контактного разрыва возмущений давления, приходящих в  $m$  по характеристике первого семейства  $kt$  и отражающихся по характеристике противоположного семейства, равен

$$K = (1 - \omega) / (1 + \omega)$$

Следовательно, равенство (2.4) эквивалентно условию обращения в нуль указанного коэффициента отражения, что, как правило, не имеет места.

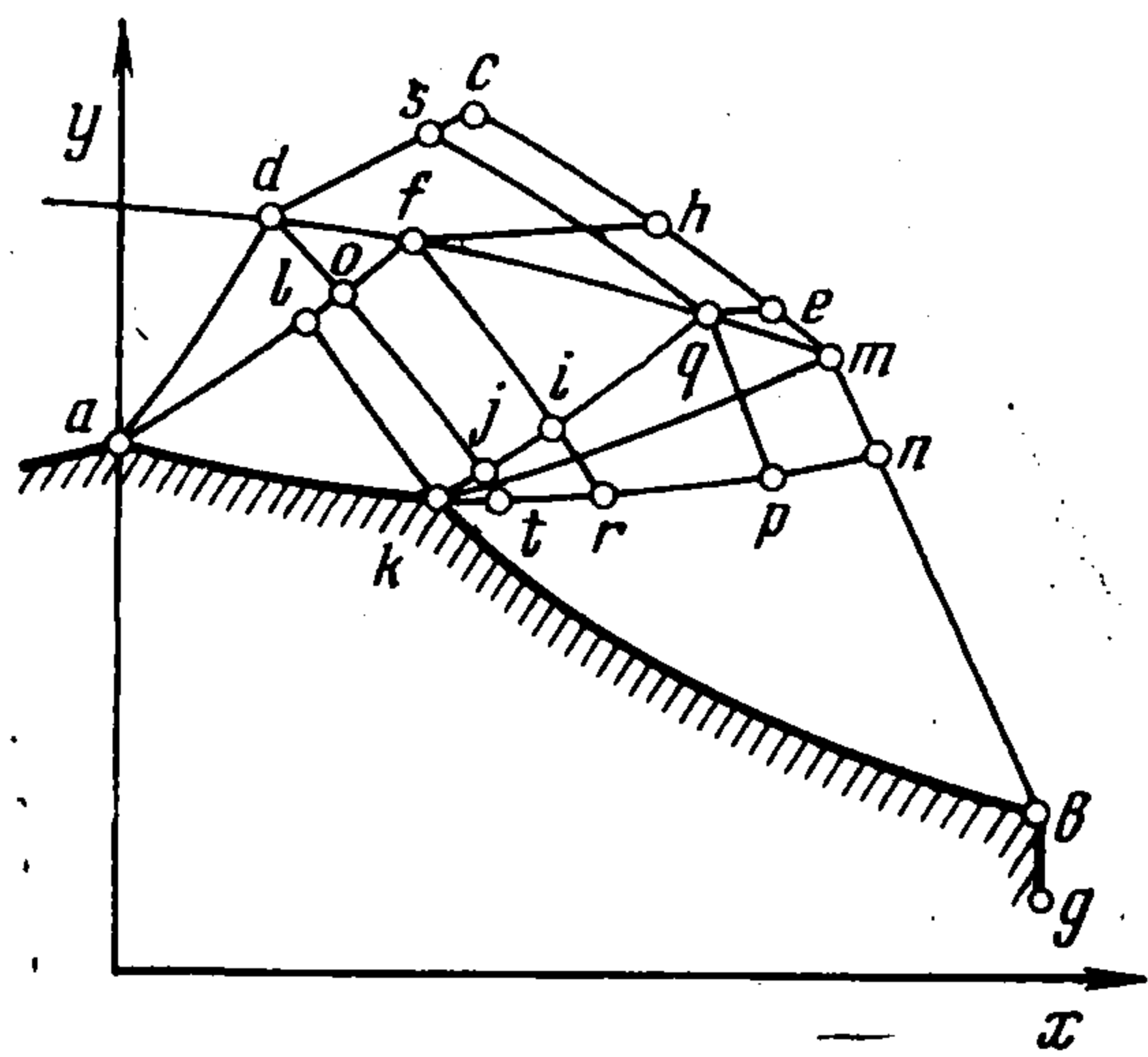
То, что при  $K \neq 0$  конфигурация без внутренних точек излома не может быть оптимальной, можно показать, воспользовавшись приемом, предложенным Г. Г. Черным [6] при исследовании обтекания тел, близких к клину. Действуя аналогичным образом (см. также [7]), проварьируем контур, не имеющий излома в точке  $k$ , только в интервале  $(y_k - \Delta y) < y < (y_k + \Delta y)$ , где  $\Delta y$  — малая положительная величина. Внутри указанного интервала исходный контур заменим (как показано на фиг. 2) двумя прямолинейными отрезками, пересекающимися с исходным контуром на границах интервала, а между собой в точке непроварьированной характеристики  $kt$  с абсциссой  $x_k + \Delta y \Delta \zeta$ , где  $\zeta = v/u$ , а  $\Delta \zeta$  — величина того же порядка, что и  $\Delta y$ . Линеаризуя уравнения течения относительно исходного (неравномерного) потока, можно показать, что с точностью до величин более высокого порядка, чем  $\Delta y \Delta \zeta$ , возмущения  $p$ , вызванные проведенным варьированием контура, исчезают всюду вне примыкающих к характеристикам  $kt$  и  $tb$  полос высоты порядка  $\Delta y$ . В случае положительного коэффициента отражения ( $K_m > 0$ ) повышение (понижение) давления имеет место в областях, помеченных на фиг. 2 значками плюс (минус). Далее можно показать, что приращение  $\chi$

из-за изменения  $p$  на самом проварьированном участке контура также есть величина более высокого порядка малости, чем  $\Delta y \Delta \zeta$ . Итак, если  $K_m > 0$  и  $\vartheta_b < 0$ , то остается только некомпенсированное отрицательное приращение  $\chi$  порядка  $\Delta y \Delta \zeta$ . При  $K_m < 0$  такой же результат получается при  $\Delta \zeta < 0$ , что отвечает выемке в окрестности точки  $k$ . Отсюда видно, что при  $K_m \neq 0$ , контур, не имеющий излома в точке  $k$ , не может быть оптимальным. Кроме того, выполненный анализ позволяет предположить, что при  $K_m > 0$  оптимальная конфигурация имеет в указанной точке излом, обтекаемый с образованием пучка волн разрежения, а при  $K_m < 0$  — ударной волны. Аналогичное рассмотрение можно провести и в случае, когда на участке  $ak$  имеется ещё одна ( $k_1$  — в случае фиг. 1) или несколько точек, таких, что возмущение, вызванное деформацией контура в их окрестности, отражаясь попеременно от тангенциального разрыва и от стенки, приходит в точку  $m$ . При этом следует иметь в виду, что от стенки возмущение давления отражается без изменения знака.



Фиг. 2

3. Дальнейшее исследование относится к случаю, когда для оптимальной конфигурации излом в точке  $m$  обтекается с образованием пучка волн разрежения (в согласии со сказанным выше, это можно ожидать при  $K_m >$



Фиг. 3

$> 0$ ). Кроме того, ограничимся ситуацией, при которой характеристика второго семейства  $lk$ , приходящая в  $k$ , пересекает  $ah$  ниже тангенциального разрыва, как показано на фиг. 3 (тонкие линии, отличные от  $dm$ , — характеристики), или в точке  $f$ .

Как уже отмечалось ранее, наличие внутренней точки излома делает необходимым использование общего метода множителей Лагранжа. При этом сначала составляется вспомогательный функционал

$$I = \chi + \int_a^b \tau L_3 dy + \iint_G (\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2) d\psi dy$$

в котором  $\tau = \tau(y)$  и  $\mu_i = \mu_i(\psi, y)$  — переменные множители Лагранжа, а  $G$  — область течения (в плоскости  $\psi y$ ), ограниченная контуром тела (прямой  $\psi = \psi_a$ ) и характеристиками  $ac$  и  $cb$ . В силу (1.2) и (1.4), при допустимом варьировании, когда  $u, v$ , а также плотность и давление, являющиеся в соответствии с (1.2) известными функциями  $u, v$  и  $\psi$ , удовлетворяют уравнениям и граничным условиям задачи, первые вариации  $I$  и оптимизируемого функционала  $\chi$  совпадают. Далее, действуя в согласии с [3-5,7], получим уравнения и условия «сопряженной» задачи для нахождения множителей Лагранжа в части  $G^\circ$  области  $G$ , лежащей (в плоскости  $xu$ ) справа от  $ah$ , и, в частности, на  $ab$ , а также необходимые условия минимума  $\chi$ , определяющие форму оптимальной образующей.

В подобластях своей непрерывности в  $G^\circ$  множители  $\mu_1$  и  $\mu_2$  должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_1}{\partial y} + y^{\nu} \rho u \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} + \frac{1}{v} \frac{\partial \mu_2}{\partial \psi} + \frac{uv}{y^{\nu} \rho a^2 v^2} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} &= 0 \\ y^{\nu} \rho v \frac{\partial \mu_1}{\partial \psi} - \frac{a^2 - v^2}{y^{\nu} \rho a^2 v^2} \frac{\partial \mu_2}{\partial y} - \frac{u}{v^2} \frac{\partial \mu_2}{\partial \psi} &= 0 \end{aligned}$$

При  $w > a$  эта система имеет два семейства действительных характеристик, которые совпадают с характеристиками уравнений течения (1.2) и на которых

$$R d\mu_1 \pm d\mu_2 = 0 \quad (R = y^{\nu} \rho v^2 / \beta, \quad \beta = \sqrt{M^2 - 1}) \quad (3.1)$$

Здесь и далее верхний (нижний) знак отвечает характеристикам первого (второго) семейства. Дифференциалы  $d\mu_i$  в (3.1) берутся вдоль характеристики.

На характеристиках, лежащих в  $G^\circ$  и являющихся линиями разрыва множителей Лагранжа, скачки  $\mu_i$  удовлетворяют равенствам

$$R [\mu_1]_{\pm} [\mu_2] = 0 \quad (3.2)$$

где  $[\mu_i]$  — разность значений  $\mu_i$  до и после разрыва (в направлении течения).

Граничные условия сопряженной задачи для  $\mu_i$  формулируются на стенке  $ab$  и на замыкающей характеристике  $hb$  и имеют вид

$$\mu_1 = 1 \text{ на } ab, \quad R\mu_1 + \mu_2 = 0 \text{ на } hb \quad (3.3)$$

Наконец, множитель  $\tau$  на  $ak$  и  $kb$  определяется так, чтобы здесь  $\tau = \mu_2$ .

На линии контактного разрыва  $fm$  множители  $\mu_i$  непрерывны. С другой стороны, при переходе через тангенциальный разрыв в точке  $m$  изменяются коэффициенты при  $\mu_i$  во втором условии из (3.3). Отсюда следует, что характеристика  $km$  будет линией разрыва множителей Лагранжа. Интенсивность разрыва в точке  $m$ , характеризуемая, например, скачком  $[\mu_2]_m$ , определяется из (3.3) и (3.2) и дается формулой

$$[\mu_2]_m = -K_m \mu_{2m+} \quad (3.4)$$

Здесь и далее индекс минус (плюс) при  $\mu_i$  приписывается значениям  $\mu_i$  до (после) соответствующей линии разрыва. Если коэффициент отражения в точке  $m$  обращается в нуль, то, как видно из (3.4), характеристика  $km$  перестает быть линией разрыва множителей  $\mu_i$ , что отвечает рассмотренному ранее решению без внутренних точек излома.

Использование второго условия (3.3) позволяет проинтегрировать уравнение (3.1), отвечающее характеристике второго семейства, и прийти к формулам для  $\mu_i$  на  $hb$ . Указанные формулы имеют вид

$$\mu_1 = -CR^{-1/2}, \quad \mu_2 = CR^{1/2} \text{ на } hb \quad (3.5)$$

Здесь  $C$  — константа, своя для  $hm$  и  $mb$  соответственно. Указанные значения  $C$  определяются из сравнения значений  $\mu_{1b}$  и  $\mu_{2m-}$ , вычисленных

по (3.5), с величинами, получающимися в согласии с (3.3) и (3.4). Так, например, на  $mb$  в силу (3.3) имеем  $C = -R_b^{1/2}$ .

Учитывая, что с обеих сторон характеристик — линий разрыва множителей Лагранжа — последние удовлетворяют соответствующей дифференциальной связи из (3.1), аналогичным путем придем к формулам

$$[\mu_1] = [\mu_1]_n (R_n / R)^{1/2}, \quad [\mu_2] = [\mu_2]_n (R / R_n)^{1/2} \quad (3.6)$$

Эти формулы определяют  $[\mu_i]$  в произвольной точке линии разрыва через  $R$ , т. е. через  $y$  и параметры потока в этой точке, а также через интенсивность скачка  $\mu_i$  и значение  $R$  в произвольной точке  $n$  той же характеристики.

Для произвольного (необязательно оптимального) контура  $akb$ , обтекание которого происходит без образования в  $G^\circ$  ударных волн, уравнения и граничные условия (3.1)–(3.6) позволяют решить в  $G^\circ$  сопряженную задачу и найти, в частности, значения множителей  $\mu_i$  на контуре  $akb$ . При этом можно показать, что в случае, изображенном на фиг. 3, еще одной линией разрыва  $\mu_i$  будет характеристика  $lk$ . Далее, если рассматриваемый контур оптимален, то на каждом его гладком отрезке множитель  $\mu_2$  сохраняет постоянное значение

$$\mu_2 = C_1 \text{ на } ak, \quad \mu_2 = C_2 \text{ на } kb \quad (3.7)$$

а в точке излома  $k$  выполняются условия

$$E_1 \equiv \int_{k_-}^{k_+} \{R(\mu_1 - 1) + \mu_2 - \mu_{2k_+}\} d_- \frac{u}{v} = 0 \quad (3.8)$$

$$\{E_2 \equiv \mu_{2k_+} - \mu_{2k_-} = 0$$

Здесь интеграл в точке  $k$  берется через весь пучок волн разрежения, а нижний индекс минус (плюс) приписан параметрам на стенке до (после) излома. Из сравнения (3.7) с (3.5) видно, что  $C_2 = -C^2 = -R_b$ .

В дополнение к (3.7) и (3.8) оптимальный контур должен удовлетворять еще двум условиям оптимальности

$$\{y^v (p^+ - p) + \mu_2 (u / v)\}_b \geq 0, \quad \mu_{2b} \leq 0 \quad (3.9)$$

Первое из них (при знаке равенства) служит для определения  $y_b$ , второе — условие того, что торец  $bg$  — участок краевого экстремума. Как следует из (3.7) с учетом выражения для  $C_2$ , это условие при  $v_b \neq 0$  удовлетворяется всегда. Знак неравенства в первом условии из (3.9) может иметь место лишь при  $y_b = y_g$ .

Построение участков  $ak$  и  $kb$  оптимального контура (при известных углах поворота потока в точках  $a$  и  $k$ ) эквивалентно определению «оптимальных» характеристик  $lk$  и  $nb$ . Переход к указанным характеристикам, т. е. перенос на них соответствующих условий оптимальности, осуществляется благодаря тому, что в рассматриваемом случае аналогично [7, 8] равенства  $\mu_1(\psi, y) \equiv 1$ ,  $\mu_2(\psi, y) \equiv \text{const}$  — интеграл уравнений (3.1), дающий решение задач Коши в треугольниках  $alk$  и  $knb$  при начальных условиях (3.3) и (3.7) на  $ak$  и  $kb$ . В результате множители Лагранжа при решении сопряженной задачи приходится определять лишь в области  $lhnkl$ , причем гра-

нические условия для  $\mu_i$  ставятся на  $hn$  и  $kn$ . Условия на  $hn$  непосредственно вытекают из сформулированных ранее условий на  $hb$ , а условия на  $kn$  принимают вид

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = C_2 \quad \text{на } kn \quad (3.10)$$

Константу  $C_2$ , как и константу  $C$  из (3.5) на отрезке  $tn$ , удобнее выражать через параметры потока в точке  $n$ . В соответствии с (3.5) и (3.10) имеем:  $C = -R_n^{1/2}$ ,  $C_2 = -R_n$ .

Далее, так как  $\mu_1 \equiv 1$  всюду в треугольнике  $knb$ , то из (3.5) следует, что на отрезке  $nb$  величина  $R$  сохраняет постоянное значение; с учетом выражения для  $R$  после перехода от  $v$  и  $\beta$  к  $w$ ,  $\vartheta$  и  $\alpha$  это приводит к условию (2.1), получающемуся методом контрольного контура. В то же время первое условие (3.9), служащее для определения  $y_b$ , после подстановки  $\mu_{2b}$  принимает вид

$$\{\beta (p^+ - p) - \rho uv\}_b \geq 0 \quad (3.11)$$

При знаке равенства (т. е. в случае  $y_b > y_g$ ) оно совпадает с условием (2.3), также полученным методом контрольного контура. Естественность совпадения условий на  $nb$  и в точке  $b$  с условиями, полученными ранее, очевидна. Действительно, в силу сверхзвукового характера течения, участок  $kb$ , как и любой концевой участок тела, должен быть оптимальным, причем так как тангенциальный разрыв проходит выше точки  $n$ , то его построение можно проводить методом контрольного контура.

Условие, определяющее оптимальное распределение параметров на характеристике  $lk$ , получается из (3.2) аналогичным образом и формулируется в виде равенства

$$E_3 \equiv R (\mu_1 - 1) + \mu_2 - C_1 = 0 \quad \text{на } lk \quad (3.12)$$

эквивалентного условию (3.7) на  $ak$ . Множители Лагранжа в (3.12) берутся с правой стороны от характеристики  $lk$ , являющейся линией разрыва  $\mu_i$ . Последними при решении сопряженной задачи находятся  $\mu_{1l}$  и  $\mu_{2l}$ . После этого константа  $C_1$  определяется так, чтобы  $E_{3l} = 0$ .

Аналогичным образом можно рассмотреть и вариационную задачу о построении образующей сверхзвуковой части сопла Лавала, реализующей максимум тяги. Фигуры, отвечающие этой задаче, получаются из фиг. 1—3 зеркальным отражением (при неизменном положении системы координат) относительно некоторой прямой  $y = \text{const} > y_c$ . Поскольку при этом характеристики первого семейства становятся характеристиками второго семейства (и наоборот), то некоторые из соотношений, полученных выше, изменяются. Так, уравнения (2.2) и вторые равенства в (3.3) и (3.5), выполняющиеся на замыкающей характеристике, следует заменить на

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\psi} - \frac{u \sqrt{w^2 - a^2} - av}{y^v \rho a w^2} &= 0, & \frac{dy}{d\psi} - \frac{v \sqrt{w^2 - a^2} + au}{y^v \rho a w^2} &= 0 \\ u^2 \frac{d(v/u)}{d\psi} + \frac{\sqrt{w^2 - a^2}}{\rho a} \frac{dp}{d\psi} + \frac{v v}{y^{1+v} \rho} &= 0 \\ R\mu_1 - \mu_2 &= 0, & \mu_2 &= -CR^{1/2} \end{aligned}$$

соответственно. Условия (2.3) и (3.11) в точке  $b$  теперь примут вид

$$(\rho w^2 \operatorname{tg} \alpha \sin 2\vartheta)_b = 2(p_b - p^+), \quad \{\beta (p^+ - p) + \rho uv\}_b \geq 0$$

а равенство (3.12), определяющее характеристику  $lk$ , станет

$$E_3 \equiv R(\mu_1 - 1) - \mu_2 + C_1 = 0 \quad \text{на } lk$$

Изменяются также выражения для константы  $C_2$  в (3.7) и (3.10), которая теперь оказывается равной:  $C_2 = C^2 = R_b$  и  $C_2 = R_n$ , соответственно. Кроме того, во внутренней задаче удобно считать, что  $\psi_a = 1$ , а нормирующую константу  $c$  в уравнении (1.1) для функции тока выбрать так, чтобы при  $\psi_a = 1$  значение  $\psi$  на оси симметрии обращалось в нуль. После этого и замены выражений типа: «минимум сопротивления» словами «максимум тяги» всё сказанное для внешней задачи становится справедливым и для сопла.

4. Рассмотрим специальный случай плоского течения ( $v = 0$ ), в котором  $H(\psi)$  и  $S(\psi)$  — кусочно-постоянные функции, имеющие разрыв только при  $\psi = \psi_a$ , а направление вектора скорости на отрезке  $dc$  начальной характеристики не меняется ( $\vartheta \equiv \vartheta_a$ ). При этом на  $dc$  постоянны и прочие параметры газа, а сам указанный отрезок прямолинеен. Вследствие этого в четырехугольнике  $dchf$  начального пучка реализуется течение Прандтля — Майера с прямолинейными характеристиками первого семейства.

Допустим теперь, что  $\vartheta$  на оптимальной характеристике  $lk$ , определяющей форму начального участка образующей, также постоянно<sup>1</sup>. Тогда указанная характеристика будет прямолинейна, причем в четырехугольнике  $lfik$  тем же свойством обладают все характеристики того же семейства что и  $lk$ . Так как в данном случае  $p \equiv p_f$  и  $\vartheta \equiv \vartheta_f$  на  $fi$  и  $fh$ , то в соответствии с уравнениями течения отрезок  $fj$  линии тангенциального разрыва оказывается прямолинейным, как и отрезки всех характеристик второго семейства, лежащие в  $fheqif$  по одну сторону от тангенциального разрыва (на  $fj$  характеристики любого семейства претерпевают излом).

Рассматривая далее сопряженную задачу для множителей Лагранжа, можно показать, что последние при сделанном выше допущении постоянны на каждой характеристике второго семейства в области  $lfheqkl$ , а следовательно, и на  $lk$ . Отсюда видно, что в рассматриваемом случае постоянное распределение  $\vartheta$  и других параметров газа на характеристике  $lk$  удовлетворяет (за счет выбора константы  $C_1$ ) условию (3.12), т. е. является оптимальным.

Отмеченное обстоятельство существенно упрощает построение оптимальной конфигурации, сужая область, в которой необходимо решать сопряженную задачу, до второго пучка волн разрежения  $kqenk$ . Кроме того, в этом случае при решении обратной задачи, в которой вместо  $X$  и  $p^+$  задаются интенсивность начального пучка и положение точки  $l$  на  $af$ , итерационная процедура численного решения задачи, составляющая наиболее трудоемкую часть соответствующего алгоритма, включает определение только двух величин: излома стенки в точке  $k$  и ординаты (или абсциссы)

<sup>1</sup> Заметим, что в рассматриваемом случае в силу (2.1) и (2.2) это заведомо имеет место на отрезке  $nb$  замыкающей характеристики, а также на всех характеристиках второго семейства в треугольнике  $knb$ . В случае плоского безвихревого течения прямолинейны все характеристики второго семейства в области определенности  $ahba$  искомого контура.

точки  $e$  на  $ke$ . Последние находятся из требования удовлетворения условий (3.8) в процессе многократного решения прямой (для вычисления параметров потока) и сопряженной (для  $\mu_i$ ) задач в  $kqenk$ . В общем же случае численный алгоритм должен включать дополнительную процедуру расчета оптимального распределения  $\vartheta = \vartheta(\psi)$  на  $lk$ .

Если  $sq$  — характеристика второго семейства, то полученное выше решение сохраняется и тогда, когда сформулированные в начале п. 4 предположения о характере течения на  $dc$  выполняются лишь на отрезке  $ds$ , а на  $sc$  поток произволен (при вихревом течении на  $sc$  при этом в дополнение требуется, чтобы  $\psi_h$  не превосходило  $\psi_s$ ). Отметим также, что в исследованном решении течение Прандтля — Майера с прямолинейными характеристиками первого семейства реализуется и в четырехугольнике  $iqpr$ , причём в этом четырехугольнике множители  $\mu_i$  постоянны вдоль прямолинейных характеристик. Если в дополнение к сделанным ранее предположениям  $\vartheta \equiv \text{const}$  и на  $ad$ , то областями простой волны будут ещё треугольники  $ado$  и  $kjt$ . В последнем множители Лагранжа также постоянны на характеристиках первого семейства.

5. Прежде чем переходить к примерам расчета, который проводился для конфигураций типа п. 4, приведем результаты анализа случая слабого тангенциального разрыва. Отметим, что этот анализ справедлив при произвольном набегающем потоке, для которого при отсутствии тангенциального разрыва можно построить непрерывное решение, описываемое формулой (2.1).

Итак, пусть известны параметры непрерывного («исходного») сверхзвукового набегающего потока и прочие условия задачи, а также величина  $\psi_d$  и скачки  $H$  и  $S$  при  $\psi = \psi_d$ , которые имеют порядок  $\varepsilon$  и определяют «возмущенное» течение с тангенциальным разрывом. Удобно считать, что параметры исходного и возмущенного потоков на  $ad$  совпадают, а введение тангенциального разрыва изменяет поток на  $dc$ . Если, как и ранее,  $kt$  — характеристика первого семейства, проходящая в точку  $t$  замыкающей характеристики с  $\psi_t = \psi_d$ , то возмущение набегающего потока приводит к появлению излома в точке  $k$ , а также вызывает деформацию участков  $ak$  и  $kb$  исходного оптимального контура. Цель настоящего анализа состоит в получении формул для вычисления величины излома в точке  $k$ , т. е. разности  $(\zeta_{k+} - \zeta_{k-})$ , а также приращений  $\Delta\zeta_1$  и  $\Delta\zeta_2$ , отвечающих частям излома соответственно до и после характеристики  $kt$ . Указанные формулы имеют точность до  $\varepsilon$  включительно и справедливы для крайней правой внутренней точки излома при любом числе таких точек (т. е. как в случае фиг. 3, так и в случае фиг. 1).

Естественно ожидать, что введение слабого тангенциального разрыва не вызовет существенной деформации исходного оптимального контура, построенного при  $\varepsilon = 0$ . Поэтому примем, что  $\Delta\zeta_1$ ,  $\Delta\zeta_2$  и  $\zeta_{k+} - \zeta_{k-} = \Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2$  имеют порядок  $\varepsilon$ . Дальнейшее исследование опирается на уравнения и условия, полученные выше, и включает следующие этапы. Сначала обычным образом строится оптимальный контур и все течение в  $ahb$ , отвечающие  $\varepsilon = 0$ , т. е. непрерывному потоку на  $ac$ . Это по заданному  $\psi_d$  позволяет найти невозмущенную характеристику  $kt$  и величину

$$A = -d \ln R / d\zeta$$

где  $d \ln R$  — дифференциал, вычисляемый на характеристике  $tb$  и соответствующий приращению  $d\zeta$  в точке  $k$ . Оба приращения определяются при известной характеристике  $kt$  для течения в пучке, который реализуется справа от  $kt$  при введении излома в точке  $k$ .

Известно [1,2,9], что для любого течения производная типа  $A$  может быть выражена через распределения параметров газа на  $kt$ . В случае плоского безвихревого потока, когда исходное течение есть простая волна, формула для  $A$  существенно упрощается, причём здесь для её получения, кроме выражения для  $R$ , используется только условие совместности из (2.2). В общем случае  $A$  всегда можно определить численно, рассчитав методом характеристик одну характеристику пучка, примыкающую к  $kt$ , и взяв отношение приращений  $\ln R$  и  $\zeta$  в соответствующих точках исходной и построенной характеристик.

Используя далее величину  $A$ , а также соотношения (3.5) на  $hb$  и (3.4) в точке  $m$ , придем к формулам, которые с точностью до  $\varepsilon$  включительно дают  $\mu_1$  и  $\mu_2$  на отрезках  $tn$  и  $te$  замыкающей характеристики (в отличие от предыдущего здесь и далее имеются в виду характеристики возмущенного течения). Так как ширина пучка  $kqetpk$ , а следовательно, и его частей, лежащих слева и справа от  $kt$ , — величины порядка  $\varepsilon$ , то, используя уравнения характеристик (3.1) для  $\mu_i$ , а также условия:  $\mu_1 \equiv 1$ ,  $\mu_2 \equiv \mu_{2k+}$  на  $kn$  и формулы (3.6) на разрыве  $kt$  и проводя необходимое интегрирование, можно по найденным распределениям  $\mu_i$  на  $tn$  и  $te$  определить  $\mu_i$  в точке  $k$  в функции  $\zeta$ . Указанные соотношения с точностью до  $\varepsilon$  включительно имеют вид

$$\begin{aligned} (\mu_1 - 1) (R_k / R_m)^{1/2} &= 0.5A (\zeta - \zeta_{k+}) + \gamma K_m \\ (\mu_2 - \mu_{2k+}) (R_m R_k)^{1/2} &= 0.5A (\zeta - \zeta_{k+}) + \gamma K_m \end{aligned}$$

где  $\gamma = 0$  (1) справа (слева) от  $kt$ , а величины  $R_m$  и  $R_k$  вычисляются для невозмущенного оптимального профиля.

Подстановка этих распределений в условия (3.8) и последующее интегрирование по  $\zeta$  в первом из них дает два уравнения для  $\Delta \zeta_1$  и  $\Delta \zeta_2$ , решая которые, получим

$$\Delta \zeta_1 = \Delta \zeta_2 = K_m / A \quad (5.1)$$

Как следует из приведенной формулы, при малых коэффициентах отражения излом контура действительно пропорционален  $K_m \sim \varepsilon$ , причём характеристика  $kt$  делит его пополам. Если  $A$  отрицательно (а это имеет место во всех рассматривавшихся случаях и, по-видимому, всегда), то отсюда в согласии с выводом, сделанным ранее, следует, что при положительных коэффициентах отражения в точке  $m$  излом в точке  $k$  обтекается с образованием пучка волн разрежения, как и было принято при анализе. Ясно, что случай  $K_m < 0$  не может быть исследован аналогичным образом.

6. Линейный анализ п. 5 пригоден лишь при малых  $K_m$ . При умеренных или больших коэффициентах отражения (в соответствии с определением  $|K| \leq 1$ ) необходимая информация может быть получена лишь в результате численного решения. Наибольший интерес при этом представля-

ет ответ на два вопроса: 1) какова величина излома в точке  $k$ ; и 2) насколько волновое сопротивление оптимального контура меньше, чем сопротивление контура, спрофилированного каким-либо другим (более простым) способом. В связи с первым вопросом заметим, что изломы во внутренних точках контуров головных частей тел минимального волнового сопротивления, обтекаемых с присоединенной ударной волной, во всех рассчитанных случаях оказываются весьма незначительными [10,11].

Для получения ответа на поставленные вопросы были разработаны необходимые алгоритмы для ЭВМ и с их помощью проведено построение плоских оптимальных контуров, рассмотренных в п. 4. Параллельным оси  $x$  принимался весь набегающий поток, т. е.  $\vartheta \equiv 0$  на  $ac$ , причем прочие параметры газа в нем были взяты постоянными с каждой стороны от тангенциального разрыва. Рассматривалось течение совершенного газа с одинаковым для всего потока показателем адиабаты  $\kappa = 1.4$ . Решалась обратная задача, в которой, как уже отмечалось, вместо максимально допустимой длины  $X$  и  $p^+$  задавались интенсивность излома в начальной точке, совмещенной с началом координат ( $y_a = x_a = 0$ ), и положение точки  $l$  на характеристике  $ah$ . Поэтому за характерный размер ( $l_*$ ) бралась не длина тела, а ордината линии тангенциального разрыва в набегающем потоке ( $y_d = 1$ ). За характерные скорость и плотность ( $w_*$  и  $\rho_*$ ) были взяты критические скорость и плотность невозмущенного потока в пристеночном слое. В силу этого отношение  $p / \rho^\kappa$ , используемое вместо энтропии, а также полная энтальпия в нем равны

$$S_+ \equiv \left( \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\kappa} \right)_+ = \frac{1}{\kappa}, \quad H_+ \equiv \left( h_\infty + \frac{w_\infty^2}{2} \right)_+ = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}$$

Здесь индекс  $\infty$  вместе с нижним индексом плюс (минус) приписывается параметрам газа в набегающем потоке около стенки (над тангенциальным разрывом).

Расчеты велись методом характеристик и состояли из решения прямой задачи для определения параметров течения и сопряженной задачи для вычисления множителей Лагранжа. Решение прямой задачи включает последовательный расчет начального пучка  $adchfa$ , области  $klfheqk$  и второго пучка  $kqetnkk$ . При этом течение в  $klfheqk$  рассчитывается по найденной в процессе построения начального пучка характеристике  $ah$  и прямолинейной характеристике  $lk$ , параметры на которой в рассматриваемом случае совпадают со своими значениями в точке  $l$ . Сопряженная задача предполагает интегрирование уравнений течения и уравнений для  $\mu_i$  только во втором пучке (расчет первых двух областей проводится с запасом, так как положение точки  $s$ , а следовательно, и вся характеристика  $se$  заранее неизвестны и находятся в процессе решения). В сопряженной задаче счет ведется в обратном направлении (от характеристики  $kn$ ), причем сначала, начиная от точки  $k$ , строится новая характеристика первого семейства, а затем по параметрам на ней и на предыдущей характеристике и по граничным условиям для  $\mu_i$  на  $ne$  определяются множители Лагранжа. В отличие от параметров потока на каждой характеристике пучка последними находятся множители  $\mu_i$  в точке  $k$ . При расчете множителей наряду с уравнениями характеристик (3.1) и условиями на  $kn$  и  $ne$  используются соотношения на разрыве  $kt$ .

В процессе вычисления  $\mu_i$  в точке излома (на разных характеристиках пучка) проводится счет интеграла из (3.8). Это по окончании решения сопряженной задачи

позволяет вычислить левые части обоих условий (3.8), причем второе из них в данном случае удобнее переписать в форме

$$E_2 \equiv R_k (\mu_{1k} - 1) + (\mu_{2k} - \mu_{2k+})$$

где индекс  $k$  без знака плюс приписан величинам в точке  $k$  на характеристике  $ke$ .

В рассматриваемом случае (а при фиксированной характеристике  $lk$  всегда) левые части проверяемых равенств, т. е.  $E_1$  и  $E_2$  — функции только  $\Delta\zeta_1$  и  $\Delta\zeta_2$ , которые при неоптимальном выборе значений указанных приращений отличны от нуля (то, что зависимости  $E_1$  и  $E_2$  от  $\Delta\zeta_1$  и  $\Delta\zeta_2$  не являются явными, а находятся в процессе счета, несущественно). Оптимальные значения  $\Delta\zeta_i$  — корни уравнений

$$E_1 (\Delta\zeta_1, \Delta\zeta_2) = 0, \quad E_2 (\Delta\zeta_1, \Delta\zeta_2) = 0$$

которые, как и в [10, 11], находились в процессе итераций по методу Ньютона. Каждая итерация включает численное определение частных производных от  $E_i$  по  $\Delta\zeta_1$  и  $\Delta\zeta_2$  и требует трехкратного решения прямой и сопряженной задач для второго пучка. Начальное приближение для  $\Delta\zeta_i$  либо вычислялось по формуле (5.1) линейной теории, либо бралось из расчета ранее сосчитанного варианта. При этом во всех рассматривавшихся случаях количество итераций, обеспечивающее правильность всех значащих цифр в результатах, которые приводятся ниже, не превышало четырех.

По окончании итераций по  $\Delta\zeta_i$  из точки  $n$  с  $\psi = \psi_n$  выпускается оптимальная характеристика  $nb$ , которая в данном случае прямолинейна (параметры на  $nb$  постоянны и равны параметрам в точке  $n$ ). На ней по  $\psi_b = \psi_a$  определяются координаты точки  $b$  и  $X = x_b$ , а по условию Буземана (2.3) — противодействие  $p^+$ . Если получившееся значение  $p^+ \geq 0$ , то для заданного набегающего потока и найденных  $X$  и  $p^+$ , которые теперь также можно считать заданными, построенная конфигурация оптимальна при любом  $y_g \leq y_b$ . Отрезки  $ak$  и  $kb$  образующей  $ab$  получаются затем как линии тока с  $\psi = \psi_a$  из решения двух задач Гурса, в которых известны характеристики  $al$  и  $lk$  и  $kn$  и  $nb$  соответственно. Волновое сопротивление  $\chi_{ab}$  отрезков  $ak$  и  $kb$  может быть вычислено при этом либо непосредственным интегрированием по контуру  $ab$ , либо (еще до построения отрезков  $ak$  и  $kb$ ) через потоки импульса, протекающие через отрезки известных характеристик  $al$ ,  $lk$ ,  $kn$  и  $nb$ . Разность величин, полученных обоими способами, как обычно, используется для оценки точности вычислений.

После построения каждой оптимальной конфигурации для сравнения строился неоптимальный контур, отвечающий тому же набегающему потоку и заданным (совпадающим с найденными) значениям  $X$  и  $p^+$ . Указанные неоптимальные контуры брались такими, что замыкающие характеристики  $h^{\circ}b^{\circ}$  их областей определенности удовлетворяют условию (2.1) со своей константой  $\lambda$  на каждом из отрезков  $h^{\circ}m^{\circ}$  и  $m^{\circ}b^{\circ}$ . На  $h^{\circ}m^{\circ}$  константа  $\lambda$  равна левой части (2.1) в точке  $h^{\circ}$ , а на  $m^{\circ}b^{\circ}$  — в точке  $m_+^{\circ}$ . Параметры в  $m_+^{\circ}$  находятся по параметрам в  $m_-^{\circ}$  в соответствии с условиями непрерывности  $p$  и  $\zeta$  на тангенциальном разрыве. Интенсивность начального пучка и положение точки  $h^{\circ}$  на его замыкающей характеристике выбираются при этом так, что построенный контур имеет заданную длину  $X$ , и при известном давлении  $p^+$  на торец в его концевой точке  $b^{\circ}$  выполняется условие Буземана (2.3). Можно показать, что в рассматриваемом случае принятый метод построения сравниваемого контура обеспечивает оптимальность не контура  $ab^{\circ}$  как единого целого, а каждого из его отрезков  $ak^{\circ}$  и  $k^{\circ}b^{\circ}$  в отдельности.

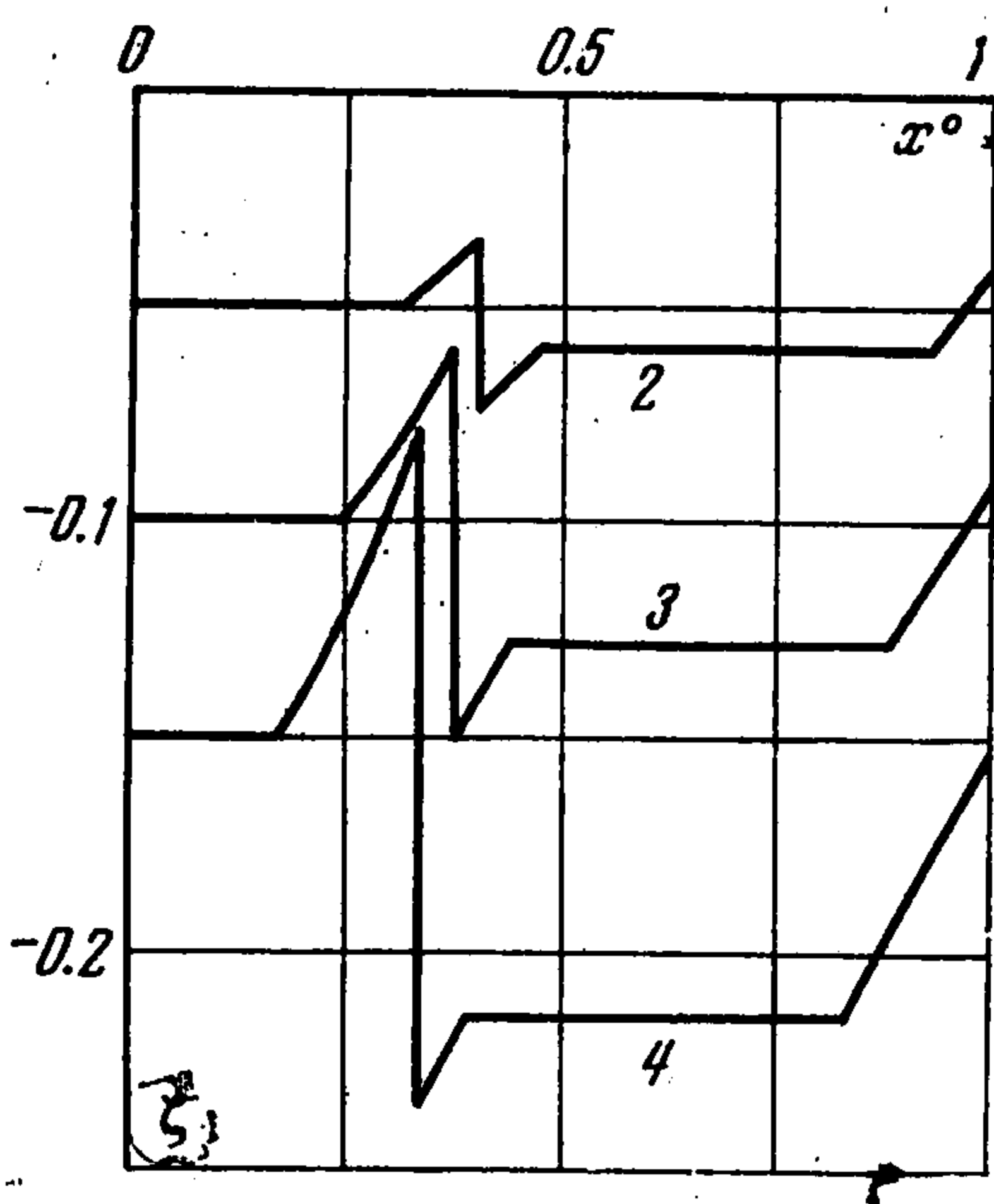
В выполненном в п. 5 линейном анализе сопряженной задачи линеаризация велась относительно решения, отвечающего профилю, оптимальному при отсутствии в набегающем потоке тангенциального разрыва. Можно поступать иначе, беря в качестве исходного течения обтекание гладкого неоптимального контура, соответствующего построенной выше характеристике  $h^{\circ}b^{\circ}$ . При этом тангенциальный разрыв имеется уже в исходном («невозмущенном») течении. Несмотря на такое различие, окончательный результат, который получается в этом случае, совпадает с формулой (5.1), величину  $A$  в которой можно теперь вычислять как слева, так и справа от характеристики  $k^{\circ}m^{\circ}$  исходного течения. Именно так находились приведенные ниже для сравнения углы из-

лома, вычисленные по (5.1), причем  $A$  в расчетах бралось равным полусумме соответствующих величин в  $m_-^\circ$  и  $m_+^\circ$ .

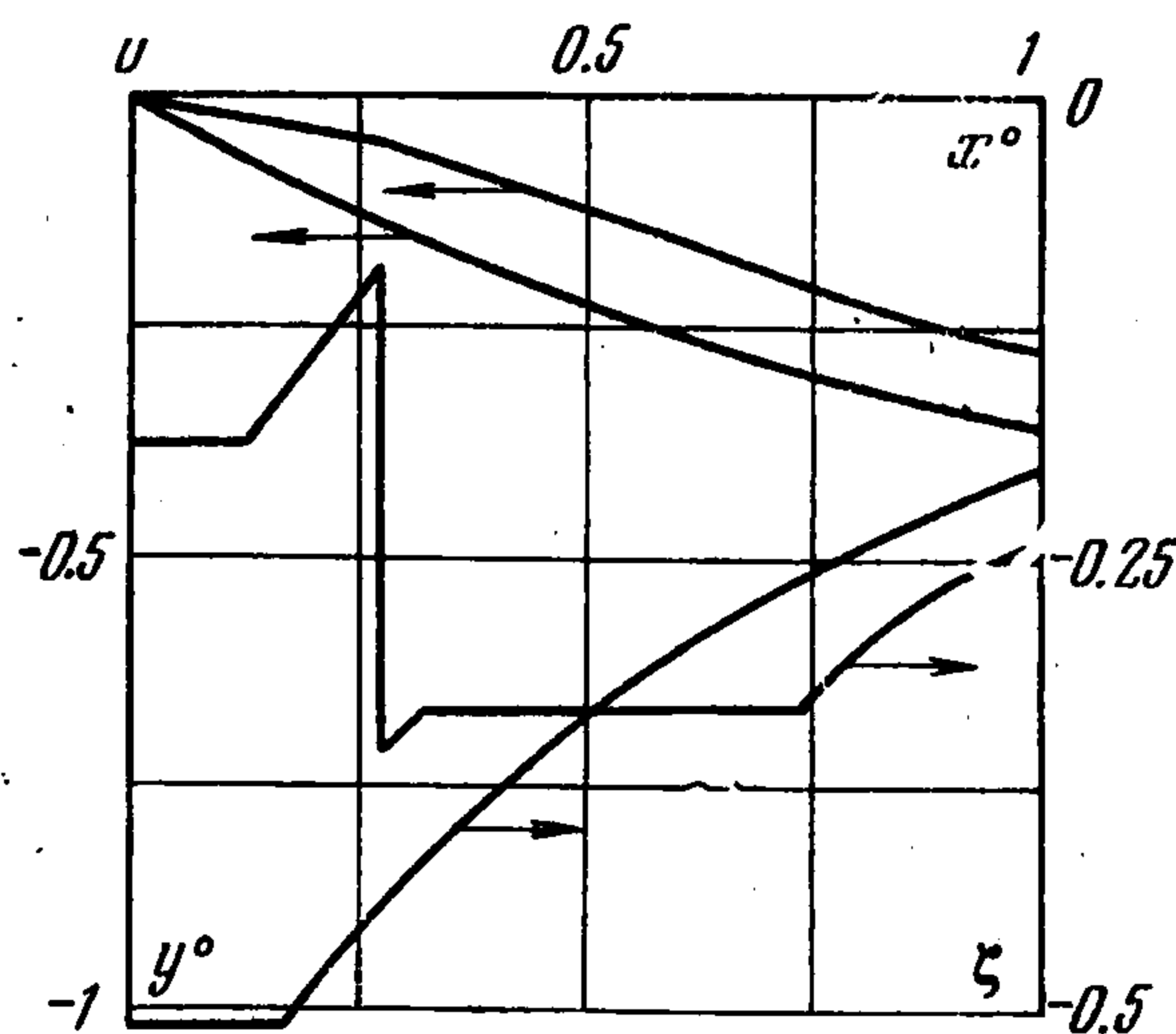
Было рассчитано несколько оптимальных контуров, характеристики которых оказались следующими

$X =$	3.30	3.45	5.10	7.61	11.3
$p^+ \cdot 10 =$	3.87	3.71	2.01	0.81	0.12
$x_k =$	1.41	1.41	1.91	2.60	3.08
$-y_k \cdot 10 =$	0.70	0.68	1.85	3.43	5.04
$-y_b =$	0.17	0.19	0.58	1.39	3.09
$-y_g =$	0.19	0.22	0.67	1.66	4.00
$-\zeta_a \cdot 10^2 =$	5.00	5.00	10.0	15.0	19.0
$-\zeta_{k-} \cdot 10^2 =$	5.00	3.40	6.08	7.40	9.10
$-\zeta_{k+} \cdot 10^2 =$	5.12	7.39	1.51	2.35	3.59
$-\zeta_b \cdot 10^2 =$	5.13	4.59	9.55	1.57	2.41
$-\Delta\zeta_1 \cdot 10 =$	0.06	0.22	0.50	0.89	1.39
$-\Delta\zeta_2 \cdot 10 =$	0.06	0.18	0.40	0.72	1.28
$-\Delta\zeta_i \cdot 10 =$	0.07	0.10	0.20	0.31	0.41
$-\zeta_{a^\circ} \cdot 10^2 =$	6.16	9.05	19.4	32.7	50.8
$-\zeta_{b^\circ} \cdot 10^2 =$	5.02	3.47	7.08	11.6	20.5
$-\chi \cdot 10^2 =$	8.56	10.0	22.2	35.7	46.9
$\Delta\chi \cdot 10^2 =$	0.95	1.88	3.18	4.57	3.45

Здесь в каждом столбце, кроме величин, относящихся к оптимальному контуру, приведены некоторые геометрические характеристики сравниваемого гладкого контура, величина  $\Delta\zeta_i$ , найденная по формуле (5.1) линейной теории, а также выигрыш по



Фиг. 4



Фиг. 5

$\chi$ , полученный за счет оптимального профилирования. Последний дается относительным приращением  $\Delta\chi \equiv (\chi - \chi^\circ) / \chi^\circ$ , где  $\chi^\circ$  — волновое сопротивление неоптимальной конфигурации (в соответствии с определением,  $\chi$  и  $\chi^\circ$  отрицательны). При этом ординаты  $y_g$  и  $y_{g^\circ}$  конечных точек оптимального и сравниваемого контуров брались одинаковыми (равными  $y_{b^\circ}$ ). Параметры набегающего потока в случае первого контура были следующими:  $S_- = 7.143$ ,  $H_- = 30$ ,  $M_- = 2.73$ ,  $M_+ = 1.2$ ,  $p_+ = 0.556$ , что дает  $K_\infty = 0.15$ . Аналогичные величины для остальных четырех контуров, которые обтекались одним и тем же невозмущенным потоком, были равны: 0.143, 12, 8.57, 1.1, 0.633 и 0.53.

Распределения  $\zeta$  вдоль трех построенных контуров показаны на фиг. 4, где  $x^\circ = x / X$ , а цифры у кривых — номера контуров. Аналогичная кривая для пятого оптимального контура, а также его форма, т. е. зависимость  $y^\circ = y / X$  от  $x^\circ$ , изобра-

жены на фиг. 5. Кроме того, на этой фигуре построены распределение  $\zeta$  и сам гладкий контур, отвечающий тем же  $X$ ,  $p^+$  и набегающему потоку, что и контур № 5. В отличие от прочих гладких контуров, рассчитывавшихся для сравнения, гладкий контур, изображенный на фиг. 5, обтекается так, что замыкающая характеристика его области определенности не пересекает тангенциального разрыва. Поскольку для такого гладкого контура выполняются все условия оптимальности, то в данном случае рассматриваемая вариационная задача имеет два решения (по этому поводу см. также п. 7). Сравнение  $\chi$  построенных контуров показало, что в рассчитанном примере контур с внутренней точкой излома оказался лучше гладкого оптимального контура.

Как следует из приведенных результатов, в данной задаче (в отличие от ситуации, наблюдающейся для головных частей тел минимального сопротивления [10,11]) излом в точке  $k$  имеет тот же порядок и даже может превосходить излом в начальной точке, т. е.  $\zeta_a$ . Кроме того, отметим, что, несмотря на отличие  $\Delta\zeta_1$  и  $\Delta\zeta_2$  от  $\Delta\zeta_l$ , во всех случаях отношение  $\Delta\zeta_1 / \Delta\zeta_2$  близко к единице, как следует из линейной теории.

7. В заключение остановимся на двух вопросах, представляющих самостоятельный интерес. Прежде всего, проследим эволюцию оптимальной конфигурации при изменении  $X$  во всем возможном диапазоне значений. С этой целью, зафиксировав все условия задачи, кроме  $X$ , т. е. набегающий поток и  $p^+$ , начнем изменять  $X$ , постепенно увеличивая его от нуля. Так как при достаточно малых  $X$  замыкающая характеристика  $hb$  лежит целиком между тангенциальным разрывом и стенкой, то здесь оптимальна обычная конфигурация без внутренних угловых точек. По мере увеличения  $X$  точка  $h$  удаляется от точки  $a$ , и в какой-то момент (при  $X = X_1$ , где  $X_1$  — функция  $p^+$  и параметров набегающего потока) впервые возникает возможность построить оптимальную конфигурацию исследованного выше типа. При этом, поскольку в точке  $k$  должны удовлетворяться два условия (3.8), то, как и в задаче о составном сопле [7], появление второго излома происходит путем «расщепления» начального пучка на два близко расположенных (в момент расщепления совпадающих) пучка конечной интенсивности. Важно подчеркнуть, что это происходит еще до того, как точка  $h$ , отвечающая решению без излома, достигнет тангенциального разрыва. Поэтому для некоторого интервала максимально допустимых длин будет существовать два решения (с изломом и без него). Заранее неизвестно, какое из этих решений дает меньшее  $\chi$ . Поэтому в каждом случае выбор оптимального контура должен (при наличии двух решений) определяться сопоставлением значений  $\chi$ , как это было сделано в п. 6.

При дальнейшем увеличении  $X$  переход к случаю двух, трех и т. д. внутренних угловых точек по той же причине каждый раз будет происходить аналогичным образом, т. е. с расщеплением пучка в  $a$  и с появлением области двух решений.

Рассмотрим случай больших  $X$  с другой точки зрения. Пусть длина стала такой, что при гладком контуре имела бы место ситуация, изображенная на фиг. 1. Здесь ломаная из отрезков характеристик, заканчивающаяся в точке  $b$  в пределах области определенности отражается от тангенциального разрыва более одного раза. Ограничимся далее случаем, когда в точках отражения  $K > 0$ . Известно также, что введенный аналогичным образом коэффициент отражения от твердой стенки равен единице.

В силу указанных причин анализ, подобный выполненному в конце п. 2, показывает, что деформация гладкого контура в любой из точек  $k, k_1, \dots$  способом, изображенным на фиг. 2, приводит к уменьшению  $\chi$ . Это дает некоторое основание полагать, что в случае  $K > 0$  все внутренние точки излома будут обтекаться с образованием пучков волн разрежения.

Второй вопрос, который представляет особый интерес, касается деформации оптимального профиля при непрерывном размазывании тангенциального разрыва. На первый взгляд причина появления излома в точке  $k$  — отличие от нуля коэффициента отражения в точке  $m$ . При гладком контуре это в силу условий сопряженной задачи ведет к возникновению разрыва  $\mu_i$  на характеристике  $mk$  и, как следствие, — к необходимости излома в точке  $k$ . Именно в отражении возмущений от ударной волны [10,11], а также от оси или плоскости симметрии [12,13] заключается механизм появления внутренних точек излома в других задачах (здесь, разумеется, имеются в виду изломы, не связанные с заданием координат внутренней точки, как в работе [14], или с различной ролью соответствующих участков образующей уже в исходном функционале, как в случае точки стыковки начального и конечного участков составного сопла [7]). Если тангенциальный разрыв размаывается, т. е. заменяется узкой зоной непрерывного изменения параметров, и поэтому исчезает отражающая поверхность, то разрыв множителей Лагранжа, который ранее имел место на  $km$ , также размаывается между характеристиками  $k_m^-$  и  $k_m^+$ . Одновременное усложнение картины отражения возмущений затрудняет анализ подобной ситуации при помощи приема, позволившего в п. 2 в случае тангенциального разрыва легко установить необходимость излома контура. Тем не менее, как будет показано далее, слабое размазывание тангенциального разрыва не ведет к исчезновению (или к слабому «скруглению») внутренней точки излома оптимального контура.

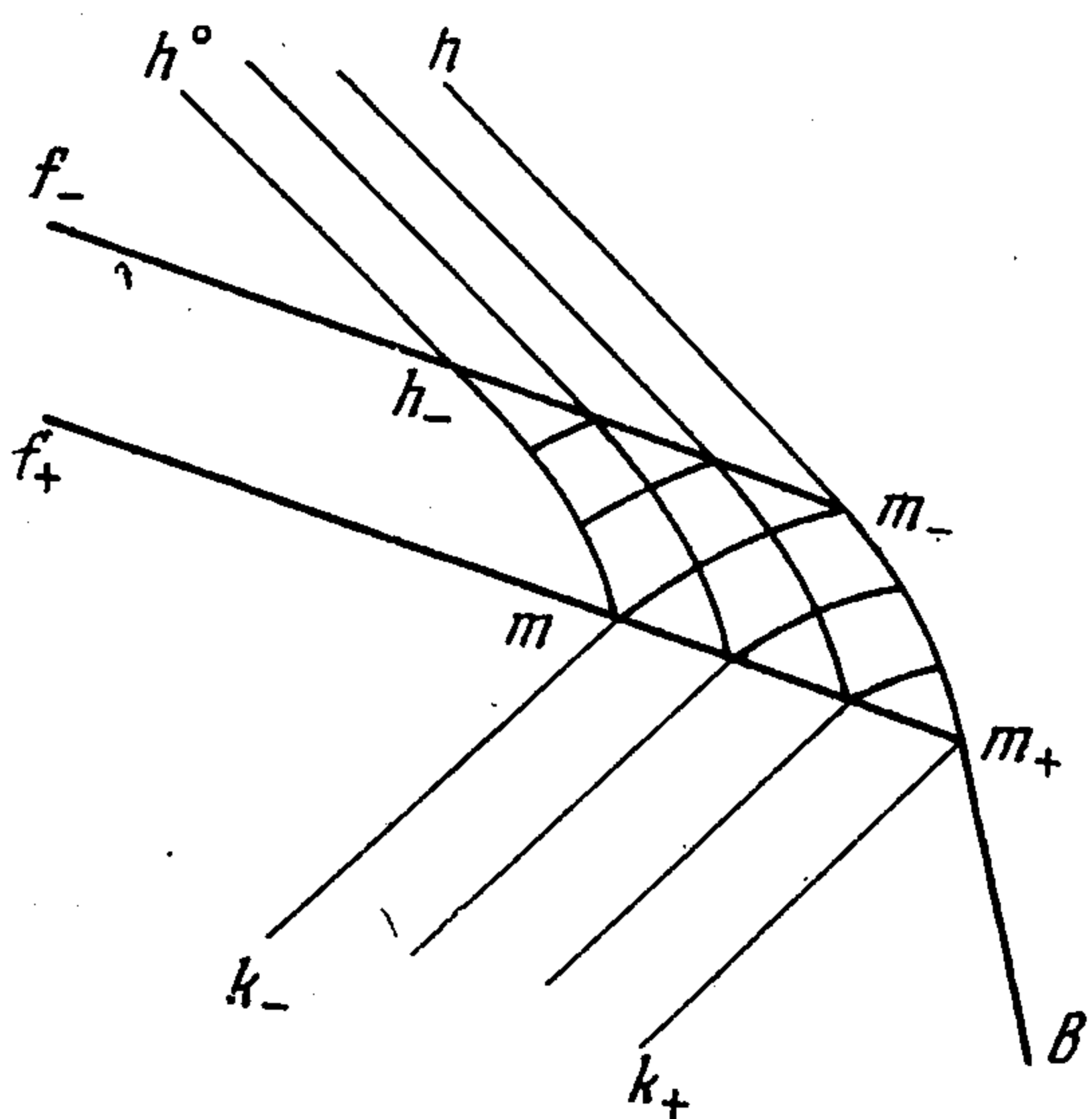
Допустим противное, т. е. пусть замена линии разрыва  $dm$  узкой зоной непрерывного изменения параметров, которая ограничена линиями тока  $d_m^-$  и  $d_m^+$ , приводит к слабому (или сильному) скруглению излома в точке  $k$  образующей, оптимальной при  $\Delta = 0$ , где  $\Delta$  — ширина области резкого изменения параметров. Для любой гладкой образующей решение задачи может быть получено методом контрольного контура, т. е. сводится к результатам п. 2. Таким образом, оптимальное распределение параметров всюду на  $hb$  и, в частности, на  $m_m^+$  должно удовлетворять условию (2.1) с константой  $\lambda$ , вычисленной по значению левой части данного равенства в точке  $h$ . Однако после того, как в соответствии с (2.1) и уравнениями характеристики второго семейства, т. е. (2.2), построено распределение параметров на  $m_m^+$ , встает вопрос о возможности реализации полученного оптимального распределения за счет профилирования образующей  $ab$  справа от характеристики  $k_m^-$ , причем начальный отрезок образующей ( $ak_-$ ) при этом фиксирован. Подчеркнем, что соответствующее оптимальное распределение можно построить при любом  $\Delta$ , в том числе при  $\Delta = 0$ . Если  $K_m > 0$ , то в последнем случае указанному разрывному распределению отвечает центрированная волна разрежения из характеристик

первого семейства с центром в точке  $m$ . Данная возможность не рассматривалась ранее по той причине, что подобное течение нельзя реализовать никаким профилированием стенки, находящейся на конечном расстоянии от точки  $m$ . Аналогичная ситуация имеет место и при слабом размазывании разрыва. Действительно, в этом случае скорость изменения таких параметров, как  $p$  и  $\theta$ , в полученном из (2.1) распределении (т. е. величина соответствующих производных вдоль  $m_-m_+$ ) определяется величиной  $\Delta$ , обращаясь при  $\Delta=0$  в бесконечность, а максимально быстрый «разгон» по  $p$  и  $\theta$  в реальном течении, наблюдающийся, как известно [1,2,9], при изломе контура  $ab$  в точке  $k$ , всегда конечен. Следовательно, при достаточно малых  $\Delta$  непрерывное распределение (2.1), вытекающее из предположения об исчезновении угловой точки, не может быть реализовано, и поэтому оптимальный контур должен иметь в  $k$  излом. Таким образом, в данном случае необходимость введения излома диктуется невозможностью построения гладкой оптимальной образующей.

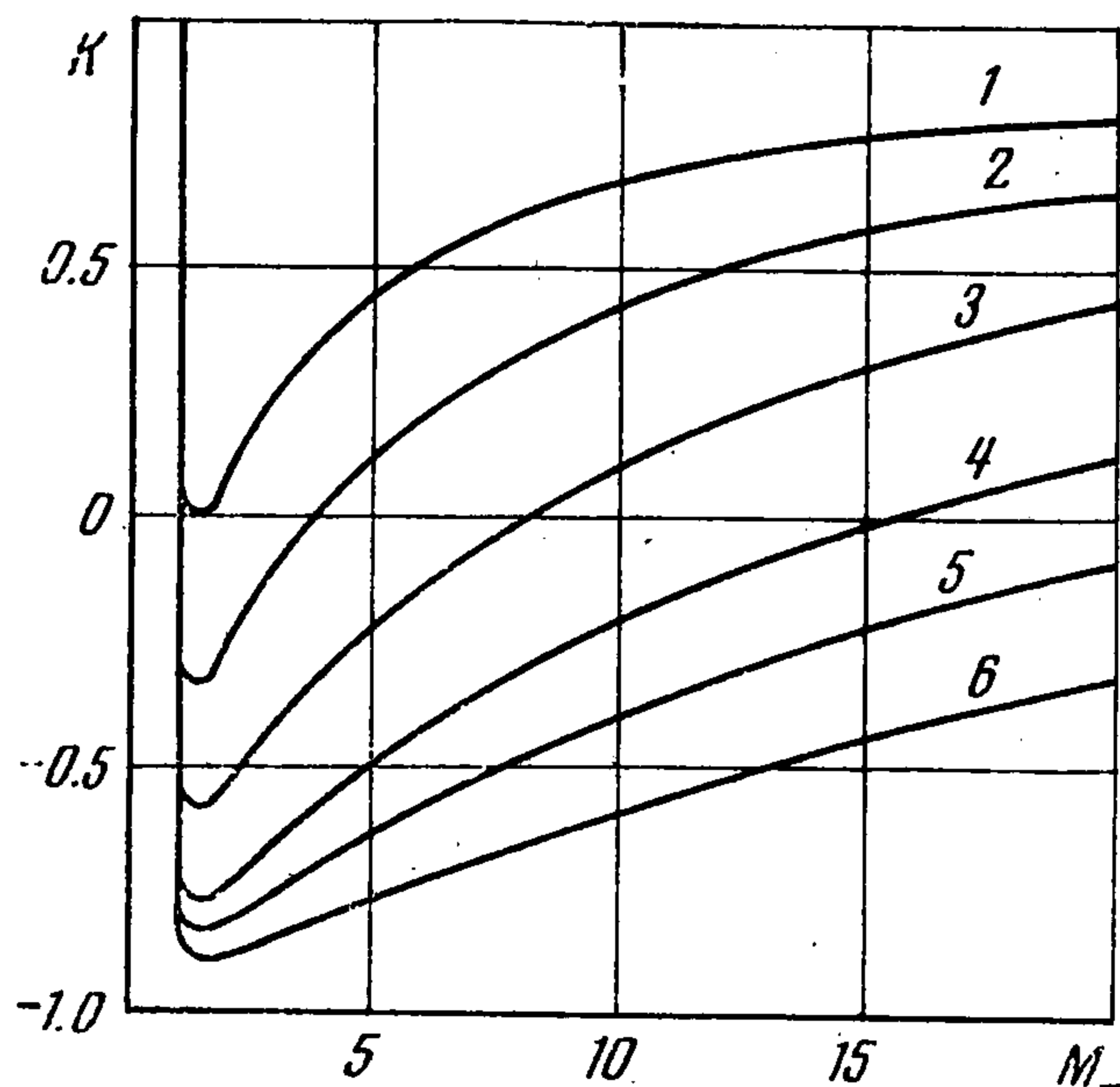
Естественно ожидать, что слабое размазывание тангенциального разрыва будет вызывать лишь небольшую деформацию оптимальной конфигурации, построенной для  $\Delta = 0$ , при обязательном сохранении излома в точке  $k$ . Для справедливости данного утверждения необходимо, однако, чтобы размазывание разрыва  $dm$  слабо изменяло параметры потока и множители Лагранжа всюду вне отдельных узких зон ширины порядка  $\Delta$ , причем при пересечении последних с точностью до  $\Delta$  должны выполняться соотношения, имевшие место при  $\Delta = 0$  на соответствующих разрывах. Для параметров газа данное требование действительно выполняется. В то же время с множителями Лагранжа дело обстоит несколько сложнее. С одной стороны, при переходе через узкие зоны резкого изменения  $\mu_i$ , ограниченные одноименными характеристиками, в областях плавного изменения параметров потока по-прежнему имеют место (теперь с точностью до  $\Delta$ ) соотношения (3.2) для  $[\mu_i]$ . Последнее можно показать, интегрируя через указанную область уравнение из (3.1), отвечающее характеристике противоположного семейства, и определяя  $[\mu_i]$  как разность значений  $\mu_i$  с обеих сторон указанной зоны.

С другой стороны, как только распределение параметров на замыкающей характеристике перестает быть разрывным, так всюду на  $hb$  становятся справедливы формулы (3.5) для  $\mu_i$ , причем (что особенно важно) с одной (а не с разными на  $hm_-$  и  $m_+b$ , как при  $\Delta = 0$ ) константой  $C$ . Отсюда видно, что распределения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  на отрезке  $hm_-$  замыкающей характеристики при любом  $\Delta \neq 0$  отличаются на величины порядка единицы от распределений, полученных при  $\Delta = 0$ . Это, в свою очередь, должно, казалось бы, вести к сильному отличию  $\mu_i$  во всей области  $afhm_ka$ , т. е. к нарушению сформулированного выше требования, необходимого для непрерывной деформации оптимального контура при малых  $\Delta$ . В действительности этого все же не происходит. Как показывает более тщательный анализ, при малых  $\Delta$  имеется еще одна узкая область резкого изменения  $\mu_i$ . Эта область примыкает к отрезку  $hm_-$  замыкающей характеристики и ограничена слева характеристикой второго семейства  $h^{\circ}m$ . На фиг. 6, где  $f_-m_-$

и  $f_+m_+$  — линии тока, ограничивающие область размазанного тангенциального разрыва, зонам резкого изменения  $\mu_i$  отвечает густая сетка характеристик соответствующего семейства. При этом в треугольнике  $mm_h$  при приближении к  $h_t$  изменения  $\mu_i$  вдоль характеристик второго семейства уменьшаются, становясь на  $h_t$  величинами порядка  $\Delta$ . Благодаря существованию указанной области, на  $h^0t$  в противоположность  $ht$  множители  $\mu_i$  отличаются от значений, полученных для  $\Delta = 0$  на  $ht$ , на величины порядка  $\Delta$ . Данное обстоятельство и обеспечивает непрерывную деформацию оптимальной конфигурации при слабом размазывании



Фиг. 6



Фиг. 7

тангенциального разрыва. Отмеченные моменты, в частности присутствие в области определенности контура  $ab$  зон резкого изменения  $\mu_i$ , необходимо учитывать при численном решении рассмотренной задачи. Отметим, кстати, что, поскольку причиной разрыва  $\mu_i$  на характеристике  $lk$  является излом контура в точке  $k$ , то этот разрыв при  $\Delta \neq 0$  не размазывается.

Исследованная выше конфигурация реализуется только при  $K_m > 0$ , поэтому важно знать область параметров потока, для которых указанное условие действительно имеет место. Можно показать, что для совершенного газа (при  $\kappa_- = \kappa_+$ )

$$\omega = M_+^2 \sqrt{M_-^2 - 1} / (M_-^2 \sqrt{M_+^2 - 1})$$

где  $M_-$  и  $M_+$  берутся в рассматриваемой точке тангенциального разрыва. Результаты расчетов  $K = K(M_-, M_+)$  приведены на фиг. 7. Кривым 1—6 отвечают следующие значения  $M_+$ :  $\sqrt{2}$  ( $\sqrt{2}$ ), 4 (1.0328), 8 (1.0079), 16 (1.002), 24 (1.0009) и 40 (1.0003). Наличие двух значений объясняется тем, что каждая кривая, соответствующая  $M_+ = A$ , отвечает также  $M_+ = A/\sqrt{A^2 - 1}$ . В согласии с выражениями для  $K$  и  $\omega$  коэффициент отражения обращается в нуль при  $M_- = M_+$  и при  $M_- = M_+ / \sqrt{M_+^2 - 1}$ . Это для фиксированного  $M_+ \neq \sqrt{2}$  дает две точки пересечения кривой  $K = K(M_-)$  с осью абсцисс.

Авторы благодарны А. В. Шипилину за ценные советы по построению итерационной процедуры, а также Т. Н. Вишневецкой и Л. С. Щегловой за помощь при проведении расчетов.

Поступила 18 XII 1972

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М., Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
2. Крайко А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. М., Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
3. Гудерлей К. Г., Армштейн Д. В. Общий метод построения оптимальных ракетных сопел. В кн.: Теория оптимальных аэродинамических форм. М., «Мир», 1969, стр. 172—194.
4. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2, стр. 285—295.
5. Крайко А. Н. К решению вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2, стр. 312—320.
6. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
7. Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Решение вариационной задачи о построении контура составного сопла. ПММ, 1971, т. 35, вып. 4, стр. 619—632.
8. Борисов В. М., Шипилин А. В. О соплах максимальной тяги с произвольными изопериметрическими условиями. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1, стр. 182—183.
9. Шмыглевский Ю. Д. О некоторых свойствах осесимметричных сверхзвуковых течений газа. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 5, стр. 782—784.
10. Шипилин А. В. Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4, стр. 9—19.
11. Шипилин А. В. Вариационные задачи газовой динамики с присоединенными ударными волнами. В кн.: Сборник теоретических работ по гидромеханике. М., Тр. ВЦ АН СССР, 1970, стр. 54—106.
12. Крайко А. Н., Осипов А. А. К решению вариационных задач сверхзвуковых течений газа с инородными частицами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4, стр. 596—605.
13. Осипов А. А. К решению вариационных задач газовой динамики сверхзвуковых неравновесных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1, стр. 77—79.
14. Борисов В. М. О системе тел с минимальным волновым сопротивлением. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 6, стр. 1028—1034.